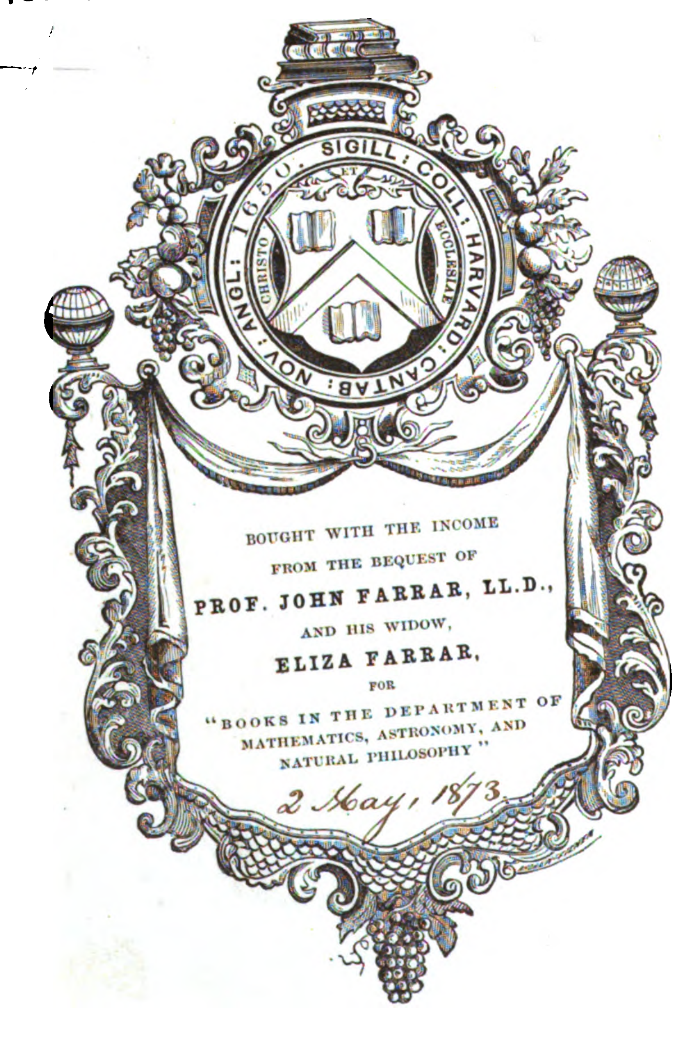



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
2 May, 1873.

LEHRBUCH

DER

NEUEREN GEOMETRIE

FÜR HÖHERE UNTERRICHTS-ANSTALTEN UND ZUM SELBSTSTUDIUM.

VON

DR. RUDOLF STAUDIGL,

PROFESSOR DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE AM K. K. POLYTECHNISCHEN INSTITUTE IN WIEN.

MIT 82 HOLZSCHNITTEN.

WIEN, 1870.

VERLAG VON L. W. SEIDEL & SOHN.

Vorwort.

Die neuere Geometrie, oder Geometrie der Lage, welche bis vor Kurzem fast nur im engsten Kreise von Fachmännern Pflege fand und nur ausnahmsweise an einigen höheren Unterrichtsanstalten gelehrt wurde, obwohl sie bereits vor Decenien durch Poncelet, Möbius, Steiner, Staudt und Chasles zu einem wissenschaftlichen Systeme ausgebildet war, erfreut sich in jüngster Zeit der regsten Aufmerksamkeit von Seite des mathematischen Publikums. Sie erscheint in den Programmen vieler technischer Institute als Lehrgegenstand aufgenommen, ihre Principien finden bereits Anwendung in verwandten wissenschaftlichen Disciplinen, ihr Studium stellt sich für den angehenden Techniker, den künftigen Lehrer mathematischer Fächer immer mehr als eine Nothwendigkeit dar. Die Leistungen, welche sie mit verhältnissmässig so einfachen Mitteln zu Stande brachte, namentlich eine Reihe glänzender Entdeckungen, die wir den eben genannten Männern verdanken, gewannen ihr stets neue Anhänger. Der Mangel an leichtfasslichen und vollständigen Lehrbüchern war wie es scheint zunächst der Grund, wesshalb die neuere Geometrie so lange nur wenig beachtet blieb. Die „Geometrie der Lage“ von Staudt, das erste Werk, welches den in Rede stehenden Gegenstand systematisch und in seinen Grundzügen vollständig behandelte, ist anerkanntermassen eben nicht für Anfänger geschrieben. Die vortrefflichen Werke von Chasles, Paulus, Reye und Gretschel,*) welchen vorzugsweise das Verdienst gebührt die neuere Geometrie weiteren Kreisen zugänglich gemacht zu haben, sind allerdings für den ersten Unterricht berechnet. Dennoch schien mir ein leichtfasslich geschriebenes Lehrbuch wünschenswerth, in welchem nicht bloss die ebenen, sondern auch die räumlichen Gebilde behandelt werden, und welches sich nicht auf die Untersuchung allgemeiner Lagenverhältnisse allein beschränkt, sondern auch metrische Beziehungen erörtert.

*) Siehe das beigegebene Bücherverzeichniss.

Bei der Abfassung des vorliegenden Lehrbuches war ich bestrebt in ziemlicher Ausführlichkeit und möglichster Klarheit die Elemente der neueren Geometrie darzustellen. Ich wählte die synthetische Methode. Sie ist mit wenigen Ausnahmen überall festgehalten. Wenn auch einige Beweise dadurch etwas schwerfällig wurden, so gewann doch die Anschaulichkeit der Beweisführung. Uebrigens gelangt die Synthesis sehr häufig schneller zum Ziele als die Analysis und hat dabei als Unterrichtsmethode den Vorzug, dass sie das Vorstellungsvermögen in beständiger Uebung erhält. Da auch die imaginären Gebilde Berücksichtigung fanden, war es wohl nothwendig einige kleine Rechnungen vorzunehmen. Es ist ja bisher noch nicht gelungen auf rein synthetischem Wege zu einer vollkommen befriedigenden, einfachen Vorstellung des Imaginären zu gelangen: und doch kann die synthetische Geometrie, ohne bedeutende Lücken zu zeigen, die imaginären Gebilde nicht ganz unberücksichtigt lassen. — Als Beispiel, dass solche Gebilde dieselbe Rolle spielen können wie die reellen, mag der Umstand angeführt werden, dass ein Kegelschnitt auch dann durch fünf seiner Punkte oder Tangenten vollkommen bestimmt wird und construirt werden kann, wenn zwei oder vier dieser bestimmenden Elemente imaginär sind.

Der erste und zweite Abschnitt, in welchen die einförmigen Grundgebilde und ihre ebenen Erzeugnisse, die Kegelschnitte, untersucht werden, sind ziemlich ausführlich behandelt. In den folgenden drei Abschnitten ist das Wesentliche über die Grundgebilde der zweiten Stufe, die Flächen zweiter Ordnung und die Gebilde der dritten Stufe, oder räumlichen Systeme zu finden. Den Schluss bildet ein Kapitel über die Raumcurven dritter Ordnung. Es wäre vielleicht angezeigt gewesen auch die ebenen Curven und Flächen dritter Ordnung aufzunehmen, doch würde eine auch nur das Wichtigste betreffende Untersuchung dieser Gebilde den Umfang des Buches allzusehr vergrössert haben.

Das Gesetz der Reciprocität, welches den ersten Studien in der neueren Geometrie einen so eigenthümlichen Reiz verleiht, ist überall durch Doppelsätze zum Ausdrucke gekommen wo der Gang der Untersuchung dadurch nicht zu sehr gehemmt wurde.

Um das Nachschlagen zu erleichtern sind die wichtigeren Lehrsätze mit Nummern versehen worden. Auch das beigegebene Register dürfte beim Studium einige Erleichterung gewähren.

Die wichtigsten Anforderungen, welche an ein elementares Lehrbuch gestellt werden können: Klarheit und Uebersichtlichkeit der Darstellung, entsprechende Auswahl und systematische Gruppirung des Lehrstoffes, war ich vor allem bestrebt zu erfüllen. Die Schwierigkeiten, welche ich dabei zu überwinden hatte, sind nicht zu verkennen. Es musste so

mancher Lehrsatz auf anderen Grundlagen als bisher entwickelt, so mancher neue Beweis gefunden werden.

Möge diese Arbeit ihren Zweck erfüllen und einiges dazu beitragen, dass die Kenntniss der neueren Geometrie immer grössere Verbreitung finde.

Wien, im Juni 1870.

Der Verfasser.

Verzeichniss

der bekanntesten Werke, welche die neuere Geometrie, oder Theile derselben, vorwiegend synthetisch behandeln.

Poncelet J. V. „Traité des propriétés projectives des figures“. Paris, 1822. Zweite, vermehrte Auflage 1866.

Möbius A F. „Der barycentrische Calcul“. Leipzig, 1827.

Steiner J „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“. Berlin, 1832.

— — „Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises“. Berlin, 1833.

Chasles M. „Aperçu historique sur l'orgine et le développement des méthodes en géométrie etc“. Brüssel, 1837. Deutsch von Sohncke: „Geschichte der Geometrie etc“. Halle, 1839.

v. Staudt K. G. Ch. „Geometrie der Lage“. Nürnberg, 1847.

Chasles M. „Traité de géométrie supérieure“. Paris, 1852.

Paulus Ch. „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie“. Stuttgart, 1853.

Schnuse E. H. „Grundlehren der neueren Geometrie“. (Nach Chasles' Traité de géométrie superieure.) Braunschweig, 1856.

Witzschel B. „Grundlinien der neueren Geometrie“. Leipzig, 1858.

v. Staudt K. G. Ch. „Beiträge zur Geometrie der Lage“. Nürnberg, 1860.

Weissenborn H. „Die Projection in der Ebene“. Berlin, 1862.

Chasles M. „Traité des sections coniques“. Paris, 1865.

Pfaff H. „Neuere Geometrie“. Erlangen, 1867.

Schröter H. „Die Theorie der Kegelschnitte“. Leipzig, 1867.

Sturm R. „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung“. Leipzig, 1867.

Reye Th. „Die Geometrie der Lage“. Hannover, 1868.

Gretschel H. „Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie“. Leipzig, 1868.

Geiser C. F. „Einleitung in die synthetische Geometrie“. Leipzig, 1869.

Zahlreiche wichtige Abhandlungen über Gegenstände der neueren Geometrie finden sich in den mathematischen Zeitschriften von Clebsch, Crelle, Grunert und Schlömilch.

Register.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Grundgebilde der ersten Stufe.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Erzeugnisse zweier projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel, welche in derselben Ebene liegen.

Dritter Abschnitt.

Grundgebilde der zweiten Stufe.

Vierter Abschnitt.

Flächen zweiter Ordnung.

Fünfter Abschnitt.

Das räumliche System.

Berichtigungen.

Seite	Zeile	
1	7	v. o. allgemeinen st. allgemeinem.
8	11	v. o. Strahles *c* st. Strahles.
11	4	v. u. Chasles st. Chales.
13	11	v. u. r und r_1 st. R und R_1, und in Fig. 1 r_1 st. des einen r.
14	18	v. o. sin *bc* st. sin *bd*.
16		Fig. 3 *C* st. *J*.
18		Fig. 4 *ABCD* st. $A_1B_1C_1D_1$.
24	5	v. o. R_3 st. von R_2.
27	18	v. o. ist st. sind.
33	5	v. u. 29 st. 28.
34	17	v. o. R_3 st. R.
42	18	v. o. BS_1 und CS_1 st. BS und CS.
60	16	und 19 v. o. reell st. rell.
61	1	v. u. Desargues st. Désargues.
77	10	v. o. nach Stufe ist zu setzen: mit einem dritten.
108	10	v. u. R_1 st. R.
109	15	v. u. R_1 st. R und Zeile 17 v. u. R st. R_1.
139	17	v. o. desselben st. derselben.
155	16	v. u. abschneidet st. abschneiden.
196	2	v. u. Punkte BB_1 st. Punkte.
221	17	v. o. *a* st. *d*.
222	1	v. u. als sich entsprechende Theile st. als Theile.
249	18	v. u. B_1 st. B.
262	1	v. o. Elementes, das st. Element das es.
346	9	v. u. *C* st. *G*.

Erklärung der Grundgebilde.

Die neuere Geometrie nimmt eine kleine Zahl sogenannter Grundgebilde an, auf deren Eigenschaftèn und gegenseitige Beziehungen, welche vor allem untersucht werden, sie ihre weiteren Untersuchungen stützt.

Diese Grundgebilde sind: Die Punktreihe, der Strahlenbüschel, der Ebenenbüschel, das ebene System und der Strahlenbündel.

Eine Punktreihe wird im allgemeinem die Gesammtheit aller Punkte genannt, welche sich in ein und derselben Geraden befinden; doch bezeichnet man durch diesen Ausdruck auch jede in irgend einer Weise geordnete Reihe einzelner Punkte einer geraden Linie. Jeder Punkt einer Punktreihe bildet ein Element derselben und die Gerade, auf welcher sich die Reihe befindet, heisst der Träger der Reihe. Jeden von zwei Punkten des Trägers begrenzten Theil des letzteren nennt man eine Strecke. — Statt des Ausdruckes Punktreihe wird häufig auch die Bezeichnung gerades Gebilde gebraucht.

Ein Strahlenbüschel oder Vielstrahl wird im allgemeinen durch die Gesammtheit aller Geraden einer Ebene gebildet, welche sich in ein und demselben Punkte schneiden. In einem specielleren Sinne nennt man Strahlenbüschel auch die Gesammtheit einzelner Geraden, welche in derselben Ebene liegen, durch ein und denselben Punkt gehen und in irgend einer Weise angeordnet sind. Jede dieser Geraden heisst ein Strahl und bildet ein Element des Büschels. Der Schnittpunkt aller Strahlen wird der Mittelpunkt des Büschels genannt und kann als Träger des letzteren betrachtet werden; gewöhnlich bezeichnet man jedoch die Ebene, in welcher der Büschel liegt, als dessen Träger. Jeder Strahl wird durch den Mittelpunkt in zwei Halbstrahlen getheilt. Liegt der Mittelpunkt in unendlicher Entfernung, so sind alle Strahlen zu einander parallel und bilden einen Parallel-Strahlenbüschel.

Ebenenbüschel wird die Gesammtheit aller Ebenen genannt, welche durch ein und dieselbe Gerade hindurchgehen, oder — im engeren Sinne — die Gesammtheit einzelner Ebenen, welche sich in derselben Geraden schneiden und

in irgend einer Weise angeordnet sind. Jede dieser Ebenen bildet ein Element des Ebenenbüschels. Als Träger des letzteren kann sowohl der unendlich ausgedehnte Raum, als auch die allen Ebenen gemeinsame Gerade bezeichnet werden. Gewöhnlich wird jedoch diese Gerade die Axe des Ebenenbüschels genannt. Liegt die Axe in unendlicher Entfernung, sind also sämmtliche Elemente des Ebenenbüschels unter einander parallel, so heisst letzterer ein Parallel-Ebenenbüschel.

Das ebene System ist nicht so einfacher Natur, als die bisher betrachteten Gebilde. Man versteht nämlich darunter die Gesammtheit aller Punkte und Geraden, die sich in ein und derselben Ebene befinden. Der Träger des ebenen Systemes ist die Ebene, in welcher es liegt.

Ein Strahlenbündel wird durch sämmtliche Gerade gebildet, die durch einen bestimmten Punkt, den Mittelpunkt des Bündels, hindurchgehen. Im engeren Sinne nennt man Strahlenbündel auch die Gesammtheit einzelner Geraden, welche alle durch ein und denselben Punkt gehen und in irgend einer Weise angeordnet sind. Jede solche Gerade heisst ein Strahl des Bündels und jeder der sich ins Unendliche erstreckenden zwei Theile eines Strahles, welche einerseits durch den Mittelpunkt des Bündels begrenzt werden, wird ein Halbstrahl genannt. Als Träger des Bündels kann sowohl der Mittelpunkt, als auch der unendlich ausgedehnte Raum betrachtet werden. Der Strahlenbündel enthält im allgemeinen unendlich viele Strahlenbüschel, denn jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt des Büschels geht, schneidet den Bündel in einem Strahlenbüschel. Da umgekehrt jeder Strahlenbüschel eine Ebene bestimmt, so enthält jeder Strahlenbündel im allgemeinen unendlich viele Ebenen, welche sich in seinem Mittelpunkte treffen. Die Gesammtheit dieser Ebenen könnte ein Ebenenbündel genannt werden, indess erscheint es nicht nothwendig dieses neue Grundgebilde anzunehmen, da es ohnehin im Strahlenbündel enthalten ist.

Die Punktreihe, den Strahlenbüschel und den Ebenenbüschel nennt man Grundgebilde der ersten Stufe oder auch einförmige Grundgebilde. Letztere Bezeichnung findet ihre Erklärung in dem Umstande, dass jedes der genannten drei Gebilde aus unter sich gleichartigen Elementen besteht. Das ebene System und der Strahlenbündel heissen Grundgebilde der zweiten Stufe; man kann sich dieselben aus Gebilden der ersten Stufe zusammengesetzt denken, nicht aber umgekehrt. Das ebene System enthält unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel, der Strahlenbündel unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Die drei einförmigen Grundgebilde werden auf gleiche Stufe gestellt, wenn auch dagegen eingewendet werden könnte, dass in jedem Strahle eine Punktreihe und in jeder Ebene Punktreihen und Strahlenbüschel denkbar sind. Strahlen fasst man nämlich in der Regel nicht als Träger von Punktreihen, sondern bloss als gerade Linien auf, und Ebenen, wenn sie Elemente eines Ebenenbüschels sind, werden gewöhnlich nicht als Träger eines ebenen Systemes betrachtet.

Ein Gebilde der dritten Stufe ist das räumliche System. Es besteht aus der Gesammtheit aller Punkte, Geraden und Ebenen des unendlichen Raumes. Uebrigens kann in einem specielleren Sinne, auch jede Zusammenstellung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raume, als ein räumliches System angesehen werden. *)

Nicht selten fasst man die Grundgebilde der ersten Stufe allgemeiner auf, als sie oben erklärt wurden. Punktreihe kann nämlich auch eine Reihe von Punkten genannt werden, die sich in irgend einer bestimmten Curve befindet, Strahlenbüschel eine Aufeinanderfolge von geraden Linien, welche in ein und derselben Ebene liegen und nach irgend einem bestimmten Gesetze angeordnet sind und Ebenenbüschel eine Aufeinanderfolge von Ebenen, deren gegenseitige Lage einem bestimmten Gesetze entspricht. Auch der Strahlenbündel könnte allgemeiner als eine Aufeinanderfolge von geraden Linien, deren Lage im Raume durch irgend ein Gesetz bestimmt wird, aufgefasst werden; in der Regel versteht man jedoch unter den Grundgebilden jene einfacheren Gebilde, wie sie zuerst erklärt worden sind und bemerkt es in jedem Falle besonders, wenn eine allgemeinere Auffassung vorausgesetzt wird.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass zwei Grundgebilde desselben Namens, also zwei Punktreihen, zwei Strahlenbüschel u. s. w., gleichartige Grundgebilde heissen, während Grundgebilde verschiedenen Namens ungleichartige genannt werden.

---

*) Wir schliessen das räumliche System aus der Reihe der Grundgebilde aus, zu denen es bisher gezählt wurde, nachdem dasselbe alle denkbaren geometrischen Gebilde in sich enthält, daher nicht wohl als ein Grundgebilde bezeichnet werden kann.

Erster Abschnitt.

Grundgebilde der ersten Stufe.

a) Punktreihen und Strahlenbüschel. Ihre allgemeinen projectivischen Beziehungen.

Um irgend einen Punkt einer gegebenen Punktreihe unzweifelhaft zu bestimmen, können verschiedene, mehr oder weniger einfache Mittel angewendet werden. Das einfachste ist wohl, einen in der Reihe selbst gelegenen Fixpunkt zu wählen und die Entfernung des zu bestimmenden Punktes vom Fixpunkte anzugeben, wobei diese Entfernung positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der zu bestimmende Punkt auf der einen oder der anderen Seite des Fixpunktes gelegen ist. Dieses Mittel wird bekanntlich in der älteren Geometrie benützt. Die neuere Geometrie wählt zwei Fixpunkte, welche wir A und B nennen wollen und bestimmt die Lage eines dritten Punktes C der Punktreihe, indem sie das Verhältniss der Abstände AC und BC angibt. Dabei wird ebenfalls angenommen, dass diese Abstände, je nachdem C auf der einen oder andern Seite der Fixpunkte liegt, positiv oder negativ sind. Um nachzuweisen, dass die Lage des Punktes C durch das Verhältniss

$$\frac{AC}{BC}$$

vollkommen bestimmt sei, stellen wir uns vor, C bewege sich auf der nach beiden Seiten ins Unendliche verlängerten Geraden AB, etwa in der Richtung von A nach B, und nehmen an B sei rechts von A gelegen. Im Anfange seiner Bewegung befinde sich der bewegliche Punkt C links von A und seine Abstände seien für diese Lage negativ. Das Verhältniss $\frac{AC}{BC}$ bleibt, solange C den Fixpunkt A nicht überschreitet, unter den gemachten Voraussetzungen stets positiv und kleiner als die Einheit, da BC immer grösser als AC ist. Je näher C an A liegt, desto kleiner wird $\frac{AC}{BC}$ und wenn endlich C mit A zusammenfällt, so ist

der Werth dieses Verhältnisses gleich Null. Denkt man sich C wieder nach links zurückbewegt, so wächst $\frac{AC}{BC}$, da die Grösse des Zählers sich jener des Nenners immer mehr nähert, bis endlich $AC = BC$, also $\frac{AC}{BC} = 1$ wird, was erst dann der Fall sein kann, wenn C in unendlich grosse Entfernung gekommen ist. — Befindet sich C zwischen den Fixpunkten, so liegt er zu verschiedenen Seiten derselben, $\frac{AC}{BC}$ wird daher negativ. Der Werth von $\frac{AC}{BC}$ nimmt, wenn C von A gegen B fortschreitet, jede mögliche Grösse zwischen 0 und $-\infty$ an. Befindet sich C im Halbirungspunkte der Strecke AB, so ist $\frac{AC}{BC} = -1$. Rückt der Punkt C über B hinaus weiter fort, so bleiben seine Abstände von A und B gleichbezeichnet, das Verhältniss $\frac{AC}{BC}$ ist stets positiv, wird immer kleiner und erlangt alle möglichen zwischen $+\infty$ und $+1$ gelegenen Werthe.

Bemerkenswerth ist, dass für den links oder rechts gelegenen unendlich fernen Punkt C das Verhältniss $\frac{AC}{BC}$ gleich $+1$ wird. Wir können daraus schliessen, dass jede Gerade nur e i n e n unendlich fernen Punkt besitzt. Aus diesen Betrachtungen geht nämlich hervor, dass sobald $\frac{AC}{BC}$ gegeben ist, der Punkt C unzweideutig bestimmt erscheint. Für positive Werthe von $\frac{AC}{BC}$ liegt der Punkt C ausserhalb der endlichen Strecke AB, für negative innerhalb derselben, für positive Werthe, welche kleiner sind als die Einheit, liegt er links, für positive Werthe, welche grösser als die Einheit sind, befindet er sich rechts von A und B.

Einem vierten Punkte D der Geraden AB kommt das Verhältniss $\frac{AD}{BD}$ zu, wenn A und B wieder als Fixpunkte gelten, und dieses Verhältniss kann mit jenem $\frac{AC}{BC}$ in ein sogenanntes D o p p e l v e r h ä l t n i s s

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

gebracht werden, welches wir das D o p p e l v e r h ä l t n i s s d e r v i e r P u n k t e $ABCD$ nennen. Meist wird ein solches Doppelverhältniss einfach durch das Symbol $(ABCD)$ bezeichnet, so dass

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD)$$

gesetzt werden kann. Dabei nehmen wir an, dass jene zwei Buchstaben, welche im Zähler und Nenner der einfachen Verhältnisse zuerst stehen, Fixpunkte bezeichnen, und setzen diese Buchstaben auch in der symbolischen Bezeichnung zuerst.

Die Punkte A und B, sowie C und D werden einander zugeordnete Punkte genannt.

Von den Punkten $ABCD$ können ausser A und B auch die Punktpaare AC, AD, BC, BD und CD als Paare von Fixpunkten angenommen werden. Mit Rücksicht auf diese sechs Paare ergeben sich folgende Doppelverhältnisse:

$$(ABCD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD},$$

$$(ACBD)=\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD},$$

$$(ADBC)=\frac{AB}{DB}:\frac{AC}{DC},$$

$$(BCAD)=\frac{BA}{CA}:\frac{BD}{CD},$$

$$(BDAC)=\frac{BA}{DA}:\frac{BC}{DC},$$

$$(CDAB)=\frac{CA}{DA}:\frac{CB}{DB}.$$

Setzt man den Werth des ersten Doppelverhältnisses

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD}=m,$$

so zeigt eine einfache Rechnung, dass die übrigen Doppelverhältnisse beziehungsweise die Werthe haben:

$$m,\ 1-m,\ \frac{m}{m-1},\ \ \frac{1}{m},\ \ \frac{1}{1-m},\ \ \frac{m-1}{m},$$

wovon die drei letzteren die reciproken Werthe der drei ersteren sind. Um wenigstens für ein Doppelverhältniss diese Rechnung durchzuführen, betrachten wir das zweite

$$\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}.$$

Die Fixpunkte sind hier unseren Annahmen zufolge A und C. An die Stelle des Punktes B ist also C getreten. Nimmt man die Abstände aller rechts von den Fixpunkten gelegenen Punkte wieder positiv, so ist die Strecke BC, für B als Fixpunkt positiv, für C als Fixpunkt aber negativ. Man erkennt hieraus, dass es in unserem Falle nicht gleichgiltig sein kann, ob man schreibt BC oder CB, denn es ist

$$BC=-CB.$$

Mit Rücksicht darauf hat man also:

$$\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}=-\frac{AB\,.\,CD}{BC\,.\,AD}$$

und da $AB=AC-BC$, ferner $CD=BD-BC$ ist, so ergibt sich

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = -\left(\frac{1}{BC \cdot AD}\right)\left(AC \cdot BD - BC \cdot BD - AC \cdot BC + BC^2\right) =$$
$$= -m + \frac{1}{AD}\left(BD + AC - BC\right) = 1 - m.$$

In ähnlicher Weise können die Werthe der übrigen Doppelverhältnisse durch m bestimmt werden, wodurch man zu den bereits angegebenen Ausdrücken gelangt.

Der Umstand, dass in den symbolischen Bezeichnungen der sechs Doppelverhältnisse die vier Buchstaben $ABCD$ nur versetzt erscheinen, veranlasst uns die Frage zu erörtern, ob es nicht noch weitere Doppelverhältnisse, mit anderen Werthen für die vier Punkte gibt, als die sechs angegebenen. Da vier Elemente sich bekanntlich vierundzwanzigmal versetzen lassen, so würde man vierundzwanzig Doppelverhältnisse erhalten. Doch überzeugt man sich leicht, dass darunter keine Doppelverhältnisse vorkommen, welche andere Werthe hätten als die bereits angeführten. Z. B. das Doppelverhältniss

$$\frac{CD}{BD} : \frac{CA}{BA} = (CBDA)$$

hat, sowie das vierte von den oben angegebenen Doppelverhältnissen den Werth $\frac{1}{m}$, es ist somit kein neues, und ebensowenig würden andere aus den vier Buchstaben beliebig zusammengesetzte Symbole zu neuen Doppelverhältnissen führen. Da die Untersuchung aller vierundzwanzig Symbole zu weitläufig sein würde, begnügen wir uns mit dem einen Beispiele. *)

Sowie man irgend einen Punkt C einer Punktreihe durch das Verhältniss seiner Abstände von zwei Fixpunkten A und B derselben Reihe vollkommen

---

*) Als „Doppelverhältniss der vier Punkte" findet man bei verschiedenen Autoren verschiedene der erwähnten vierundzwanzig Doppelverhältnisse angeführt. Es ist eben vom Standpunkte der Theorie gleichgiltig, welches derselben vorzugsweise so benannt wird. Diejenigen, welche in Folge einer besonderen Anordnung der Buchstaben sich dem Gedächtnisse leicht einprägen, sind begreiflicher Weise den übrigen vorzuziehen. — Steiner nennt das Verhältniss

$$\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC},$$

Möbius das Verhältniss

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

Doppelverhältniss der vier Punkte. Nach unseren Annahmen hat der erste dieser Ausdrücke den Werth $\frac{1}{m}$, der zweite den Werth m. Chasles gibt als Doppelverhältniss der vier Punkte das Verhältniss

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

an, welchem unseren Annahmen zufolge der Werth $\frac{m-1}{m}$ zukommt.

bestimmen kann, so lässt sich auch irgend ein Strahl c eines Strahlenbüschels dadurch unzweideutig bestimmen, dass man das Verhältniss der Grösse jener Winkel angibt, welche der Strahl c mit zwei Fixstrahlen a und b desselben Büschels einschliesst. Dabei müssen selbstverständlich auch negative und positive Winkel unterschieden werden. Als Mass für die Grösse eines Winkels wählen wir seinen Sinus, aus einem Grunde, der in der Folge klar werden wird. Bezeichnet man die Winkel, welche von den Strahlen ac und bc eingeschlossen werden, beziehungsweise durch ac und bc, so bestimmt der gegebenen Erklärung gemäss das Verhältniss

$$\frac{\sin ac}{\sin bc}$$

die Lage des Strahles unzweideutig. Für einen vierten Strahl d besteht das Verhältniss $\frac{\sin ad}{\sin bd}$; bringt man nun die Verhältnisse der beiden Strahlen c und d selbst wieder in ein Verhältniss, so erhält man das Doppelverhältniss der vier Strahlen $abcd$:

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd},$$

für welches die symbolische Bezeichnung $(abcd)$ gewählt worden ist.

Bezüglich des Doppelverhältnisses von vier Strahlen könnten ganz analoge Untersuchungen durchgeführt werden, wie wir sie für das Doppelverhältniss von vier Punkten angestellt haben. Dabei würde sich zeigen, dass die vierundzwanzig möglichen Doppelverhältnisse von vier Strahlen ebenfalls nur sechs verschiedene Werthe haben können. Diese sind:

$$m,\ 1-m,\ \frac{m}{m-1},\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{1-m},\ \frac{m-1}{m},$$

wenn man den Werth des Doppelverhältnisses

$$(abcd) = m$$

setzt. —

Nachdem, wie oben bemerkt wurde, jede Gerade nur einen unendlich fernen Punkt hat, so muss angenommen werden, dass jede Gerade eine geschlossene Linie (etwa ein Kreis von unendlich grossem Halbmesser) sei, deren zwei nach entgegengesetzten Richtungen sich erstreckende Theile im unendlich fernen Punkte, den man auch einen uneigentlichen Punkt nennt, zusammentreffen. Dies vorausgesetzt, ist klar, dass durch einen einzigen Punkt eine Gerade nicht in zwei Strecken abgetheilt werden kann, sondern, dass dazu zwei Punkte erforderlich sind. Die eine der zwei Strecken enthält den unendlich fernen Punkt und hat eine unendlich grosse Ausdehnung, während die andere eine endliche Länge besitzt, wenn nicht der eine der zwei Punkte unendlich ferne liegt, in welchem Falle beide Strecken unendlich gross würden.

Nennt man den unendlich fernen Punkt U, und die beiden Punkte, welche die Gerade in zwei Strecken theilen, A und B, so sind alle Punkte der Strecke

AUB von jenen der Strecke AB durch die Punkte A und B getrennt, d. h. es ist nicht möglich von einem Punkte der einen Strecke zu einem Punkte der andern Strecke zu gelangen, ohne entweder A oder B zu übersetzen. Durch einen einzigen Punkt A einer Geraden wird dieser Erklärung zufolge kein Punkt der Geraden von irgend einem andern getrennt, denn, liegen auch zwei Punkte, etwa B und C, zu verschiedenen Seiten von A, so ist es doch nicht nothwendig, A zu überschreiten, um von B nach C zu gelangen, da man zu diesem Zwecke auch den unendlich grossen Umweg durch den unendlich fernen Punkt machen kann. Damit also zwei beliebige Punkte einer Punktreihe von einander getrennt seien, müssen mindestens noch zwei trennende Punkte vorhanden sein. Unter vier Punkten $ABCD$ einer Geraden, welche in derselben Ordnung aufeinander folgen, wie sie genannt wurden, sind nur zwei Paare vorhanden, deren jedes durch das andere getrennt wird. Es ist nämlich das Paar AC durch BD und umgekehrt das Paar BD durch AC getrennt. Nicht getrennt sind die unmittelbar aufeinander folgenden Punkte, sowie auch A und D.

Die Resultate dieser Betrachtungen gestatten uns Analogien zwischen der Punktreihe und dem Strahlenbüschel zu ziehen, welche eine gewisse Verwandtschaft beider Gebilde erkennen lassen. Man vergleiche folgende einander gegenübergestellte Sätze:

Unter drei Punkten einer Punktreihe ist keiner von dem andern getrennt.

Unter vier Punkten einer Punktreihe gibt es nur zwei Paare, welche von einander getrennt sind und vier Paare nicht getrennte.

Unter drei Strahlen eines Strahlenbüschels ist keiner von dem andern getrennt.

Unter vier Strahlen eines Strahlenbüschels gibt es nur zwei Paare, welche von einander getrennt sind und vier Paare nicht getrennte.

Die auf Strahlenbüschel bezüglichen Sätze bedürfen noch der Erklärung, was man unter getrennten Strahlen versteht. Sind $abcd$ vier Strahlen eines Strahlenbüschels, welche in derselben Ordnung, wie sie genannt wurden, aufeinander folgen, wenn man in einem bestimmten Sinne um den Mittelpunkt herum fortschreitet, so sind a und c durch die Strahlen b und d getrennt, weil es nicht möglich ist bei stetigem Fortschreiten vom Strahle a zu jenem c zu gelangen, ohne b oder d zu übersetzen. Es besteht also hier dasselbe Verhältniss wie bei der Punktreihe, nur kommt beim Strahlenbüschel im allgemeinen kein unendlich fernes Element vor, wodurch sich hier die Betrachtung vereinfacht. — Dem Punkte der Punktreihe entspricht der Strahl des Büschels und der Strecke in dem einen Gebilde entspricht der Winkel in dem andern.

Die Analogie zwischen Punktreihe und Strahlenbüschel tritt am deutlichsten hervor, wenn zwei derartige Grundgebilde so liegen, dass durch jeden Punkt der Reihe ein Strahl des Büschels hindurchgeht. Wird ein Strahlenbüschel durch eine beliebige in seiner Ebene liegende Gerade geschnitten, welche nicht durch den

Mittelpunkt geht, so bilden die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Strahlen eine Punktreihe von der eben bezeichneten Lage. Man sagt in diesem Falle, die beiden Grundgebilde haben eine perspectivische Lage gegen einander oder kürzer, sie sind perspectivisch. Denkt man sich nämlich, der Mittelpunkt des Büschels sei ein Projectionscentrum (das Auge) und fasst man die Strahlen als projicirende Gerade (Sehstrahlen) auf, so kann die Punktreihe als Projection (das Bild) irgend einer andern Punktreihe angesehen werden, welche durch den Schnitt einer zweiten Geraden mit dem Büschel entstanden ist. Wird die Punktreihe ohne Veränderung der gegenseitigen Lage ihrer Elemente, nämlich der Schnittpunkte, verschoben, wobei sie auch ausser die Ebene des Büschels kommen kann, so liegen beide Gebilde im allgemeinen nicht mehr perspectivisch.

Schneidet man einen Strahlenbüschel durch beliebig viele in seiner Ebene liegende Gerade, welche nicht durch den Mittelpunkt des Büschels gehen, so ergeben sich in allen schneidenden Geraden Punktreihen, deren Elemente die Schnittpunkte der Strahlen sind, und alle diese Punktreihen befinden sich gegen einander in perspectivischer Lage, oder wie man sich kürzer ausdrückt, sind perspectivisch. Jede derselben kann als die Projection der andern betrachtet werden und der Strahlenbüschel wird in Bezug auf die Punktreihen, welche er projicirt, der projicirende Büschel, sein Mittelpunkt das Projectionscentrum genannt.

Zwei Strahlenbüschel werden perspectivisch liegend, oder perspectivisch genannt, wenn sie gegen ein und dieselbe Punktreihe perspectivisch liegen. Da man jeden gegen eine Punktreihe perspectivisch liegenden Strahlenbüschel auch einen Schein der Reihe nennt, so kann man sagen: Zwei Strahlenbüschel liegen perspectivisch gegen einander, wenn sie Scheine ein und derselben Punktreihe sind. Wird der Strahlenbüschel als die Gesammtheit aller jener Sehstrahlen aufgefasst, welche von den einzelnen Punkten der Punktreihe in ein Auge gelangen, das sich im Mittelpunkte des Büschels befindet, so ist die Bezeichnung »Schein« für den letzteren gerechtfertigt. — Die Punktreihe, deren Scheine zwei perspectivisch liegende Strahlenbüschel sind, wird der perspectivische Durchschnitt dieser Büschel genannt.

Projicirt man eine Punktreihe durch einen beliebigen Strahlenbüschel auf irgend eine Gerade, projicirt ferner die erhaltene Projection durch einen zweiten Büschel, dessen Ebene von jener des ersten verschieden sein kann, abermals und setzt man dieses Verfahren beliebig oft fort, so sind alle dadurch sich ergebenden Punktreihen mit einander projectivisch verwandt, oder wie man auch kürzer sagt, projectivisch. Jede Punktreihe kann, bevor sie weiter projicirt wird, verschoben werden, wobei die gegenseitige Lage ihrer Punkte allerdings nicht geändert werden darf, ohne dass desshalb die projectivische Verwandtschaft der entstehenden Punktreihen verloren ginge. Sind demnach zwei Punktreihen gegeben und ist es möglich durch Projiciren die eine Reihe aus der andern zu erhalten, so sind es projectivische Reihen.

Zwei Strahlenbüschel, welche Scheine projectivischer Punktreihen sind, nennt man ebenfalls projectivisch. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel sind projectivisch verwandt, wenn die Punktreihe zu einer andern Reihe projectivisch ist, welche gegen den Büschel perspectivisch liegt.

Sind zwei Punktreihen, zwei Strahlenbüschel oder eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel projectivisch, ohne sich in perspectivischer Lage zu befinden, so sagt man, dass sie eine schiefe Lage gegen einander haben.

Die projectivische Verwandschaft beruht auf dem Umstande, dass gewisse Eigenschaften, welche durch das Projiciren nicht verloren gehen, allen projectivisch verwandten Gebilden gemeinsam zukommen. Einige dieser Eigenschaften wurden benützt, um die projectivische Verwandtschaft zu definiren. Demgemäss hat man auch statt des Ausdruckes „projectivisch" verschiedene andere Bezeichnungen eingeführt. *)

Je zwei Punkte, welche verschiedenen projectivischen Punktreihen angehören, werden einander entsprechende Punkte genannt, wenn durch denselben Vorgang des Projicirens, durch welchen die eine Punktreihe aus der andern erhalten werden kann, auch der eine Punkt sich aus dem anderen ergibt. Liegen die zwei Reihen perspectivisch, sind sie also Schnitte ein und desselben Strahlenbüschels, so entsprechen sich je zwei Punkte, welche demselben Strahle angehören.

Sind U und U' beziehungsweise die unendlich fernen Punkte zweier projectivischer Reihen R und R_1, so nennt man jenen Punkt in R, welcher dem Punkte U' in R_1 entspricht, den Gegenpunkt der Reihe R. Ebenso ist der dem Punkte U entsprechende Punkt von R_1 ein Gegenpunkt. Liegen R und R_1 perspectivisch, so hat man um die beiden Gegenpunkte G und G' zu erhalten, aus dem Mittelpunkte des projicirenden Büschels zu den Trägern von R und R_1 parallelle Gerade zu ziehen. Die Parallele zu R schneidet dann R_1 im Gegenpunkte G' und die Parallele zu R_1 schneidet R im Gegenpunkte G.

Je zwei Strahlen, welche verschiedenen projectivischen Strahlenbüscheln angehören, werden einander entsprechende Strahlen genannt, wenn sie durch entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen gehen, deren Scheine die beiden Strahlenbüschel sind.

Liegen die beiden Büschel perspectivisch, bilden sie also Scheine ein und derselben Punktreihe, so sind je zwei Strahlen, welche sich in einem Punkte dieser Reihe schneiden, entsprechende Strahlen.

Eine Punktreihe R und ein ihr projectivisch verwandter Strahlenbüschel S haben auch entsprechende Elemente. Ist nämlich R_1 jene mit R projectivisch

---

*) Chales gebraucht den Ausdruck „homographisch". Paulus die Bezeichnung „conform". Auch das Wort „collinear", dessen geometrische Bedeutung wir erst in einem folgenden Abschnitte erklären, wird nach Möbius statt des Ausdruckes projectivisch benützt. — Staudt führte das Zeichen $\barwedge$ für „projectivisch" ein.



verwandte und gegen S perspectivisch liegende Reihe, welche zufolge der projectivischen Verwandtschaft von R und S vorhanden sein muss, so sagt man, dass ein Punkt von R jenem Strahle entspricht, welcher durch den entsprechenden Punkt von R_1 hindurchgeht.

Liegt eine Punktreihe gegen einen Strahlenbüschel perspectivisch, so entspricht jedem Strahle jener Punkt der Reihe, welcher in ihm gelegen ist.

Schneiden sich zwei projectivische Reihen in einem Punkte, der sich selbst entspricht, wenn man ihn einmal als Punkt der ersten Reihe und dann als Punkt der zweiten betrachtet, so sagt man, die beiden Punktreihen haben diesen Punkt entsprechend gemein. Liegen zwei Punktreihen perspectivisch, so ist, wie leicht einzusehen, der Schnittpunkt beider Reihen ein Punkt, den die Reihen entsprechend gemein haben.

Fallen zwei entsprechende Strahlen von zwei projectivischen Strahlenbüscheln in einen Strahl zusammen, so sagt man, dass die beiden Büschel diesen Strahl entsprechend gemein haben. Liegen die zwei Büschel in derselben Ebene perspectivisch, so bildet die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen Strahl, der den Büscheln entsprechend gemein ist.

Strecken, die zwischen entsprechenden Punkten projectivischer Punktreihen liegen, werden einander entsprechende Strecken genannt. — Winkel, welche von entsprechenden Strahlen projectivischer Strahlenbüschel gebildet werden, heissen einander entsprechende Winkel. Endlich bezeichnet man Strecke und Winkel als einander entsprechend, wenn die Endpunkte der Strecke und die Schenkel des Winkels beziehungsweise entsprechende Elemente einer Punktreihe und eines Strahlenbüschels bilden, welche projectivisch sind.

Zwei der in Rede stehenden Grundgebilde nennt man auf einander bezogen, abgesehen davon ob sie projectivisch sind, oder nicht, wenn jedem Elemente des einen ein einziges bestimmtes Element des andern entspricht. Man kann also zwei solche Grundgebilde dadurch auf einander beziehen, dass man jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges Element des andern als entsprechendes zuweist.

Mit Benützung der vorausgegangenen Erklärungen lässt sich folgender Satz leicht nachweisen:

1. Sind zwei der in Rede stehenden Grundgebilde mit einem dritten projectivisch verwandt, so sind sie es auch unter einander.

Dieser Satz bezieht sich auf sechs mögliche Fälle. Es können projectivisch verwandt sein:

Zwei Punktreihen einer dritten oder ein und demselben Büschel.

Zwei Strahlenbüschel einem dritten oder ein und derselben Reihe.

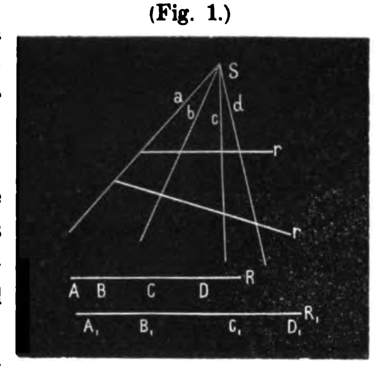
Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel ein und derselben Reihe oder ein und demselben Büschel.

Es soll nun für einige dieser Fälle der Beweis geliefert werden, dass die zwei Gebilde, welche dem dritten projectivisch verwandt sind, es auch untereinander sein müssen.

Sind zwei Punktreihen R und R_1 einer dritten Reihe R_2 projectivisch verwandt, so ist es zufolge der Erklärung, welche über die projectivische Verwandtschaft gegeben wurde, gestattet anzunehmen, dass durch allmäliges Projiciren aus R die Reihe R_2 und aus dieser die Reihe R_1 entstanden sei. Wenn nun aus R allmälig R_2 und gewissermassen durch Fortsetzen des Projicirens aus R_2 die Reihe R_1 erhalten werden kann, so bildet R_2 nur ein Mittelglied zwischen R und R_1, nämlich eine der Reihen, welche durch Projiciren aus R entstehen können, zu denen auch R_1 gehört, woraus eben folgt, dass R und R_1 projectivisch sind.

Um nachzuweisen, dass zwei Punktreihen R und R_1 (Fig. 1) unter sich projectivisch sein müssen, wenn beide ein und demselben Strahlenbüschel S projectivisch verwandt sind, erinnern wir, dass es zwei gegen S perspectivisch liegende Reihen geben muss, wovon die eine mit R, die andere mit R_1 verwandt ist. Aus der Erklärung über die projectivische Verwandtschaft zwischen Punktreihe und Strahlenbüschel geht dies unmittelbar hervor. Die mit R verwandte Reihe heisse r und jene mit R_1 verwandte r_1. Es sind nun vier Reihen vorhanden. Durch Projection von R ergibt sich r, diese Reihe wird durch S projicirt und als Projection kann r_1 betrachtet werden, endlich ist r_1 mit R_1 projectivisch verwandt. Es ergeben sich demnach r, r_1 und R_1 durch allmäliges Projiciren aus R, somit sind R und R_1 projectivisch.

(Fig. 1.)



Hat man zwei Strahlenbüschel S und S_1, welche mit einer und derselben Punktreihe R projectivisch verwandt sind, so muss es eine Reihe r geben, welche gegen S perspectivisch liegt und zu R projectivisch ist. Es muss ferner eine Reihe r_1 existiren, welche gegen S_1 perspectivisch liegt und ebenfalls mit R projectivisch verwandt ist. Die Reihen R und R_1 sind demnach zu derselben dritten Reihe R projectivisch, also müssen sie es auch unter sich sein und da S und S_1 beziehungsweise die Scheine der projectivischen Reihen r und r_1 sind, so entsprechen sie der oben gegebenen Erklärung über projectivische Strahlenbüschel.

In ähnlicher Weise kann für die noch übrigen Fälle der Beweis geführt werden.

Schneidet man einen aus vier Strahlen *abcd* (Fig. 2) bestehenden Strahlenbüschel S, dessen Mittelpunkt wir M nennen wollen, durch eine beliebige Gerade, so ergibt sich auf der letzteren eine aus den vier Schnittpunkten $ABCD$ bestehende Punktreihe R, welche gegen den Büschel perspectivisch liegt. Für die Reihe besteht das Doppelverhältniss:

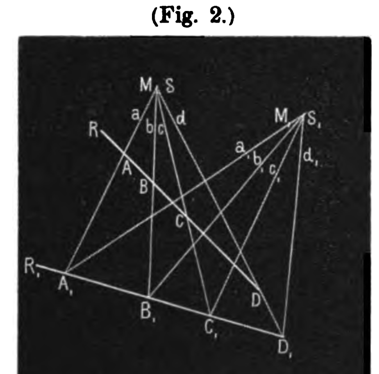
$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

für den Büschel das analoge:

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}.$$

Durch die Strahlen des Büschels und den Träger von R werden nun Dreiecke gebildet, als deren gemeinschaftliche Spitze M angenommen werden kann.

(Fig. 2.)



Diese Dreiecke haben alle dieselbe Höhe, folglich verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Grundlinien; man hat also mit Rücksicht auf die Dreiecke AMC, BMC, AMD, BMD

$$\frac{\triangle AMC}{\triangle BMC} : \frac{\triangle AMD}{\triangle BMD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Nachdem der Flächeninhalt eines Dreieckes aber auch gleich ist dem Producte zweier Seiten multiplicirt mit dem halben Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, so ergibt sich

$$\frac{\triangle AMC}{\triangle BMC} : \frac{\triangle AMD}{\triangle BMD} = \frac{\frac{1}{2} AM \,.\, CM \sin ac}{\frac{1}{2} BM \,.\, CM \sin bc} : \frac{\frac{1}{2} AM \,.\, DM \sin ad}{\frac{1}{2} BM \,.\, DM \sin bd}.$$

Aus dieser und der ersten Gleichung folgt nun

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ac}{\sin bd} : \frac{\sin ad}{\sin bd}; \qquad (\alpha)$$

wofür man auch schreiben kann,

$$(ABCD) = (abcd).$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte $ABCD$ ist also dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Strahlen $abcd$ gleich.

Schneidet man den Büschel S durch eine beliebige andere Gerade, deren Schnittpunkte $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ heissen mögen, so besteht für die durch diese Punkte gebildete Reihe R_1 die Gleichung:

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}.$$

Aus dieser und der Gleichung α folgt nun

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1},$$

woraus sich der Satz ergibt:

Wird ein aus vier Strahlen bestehender Strahlenbüschel durch beliebig viele Gerade geschnitten, wodurch in jeder schneidenden Geraden eine aus vier Punkten gebildete Punkt-

reihe entsteht, so sind die Doppelverhältnisse aller dieser Punktreihen dem Doppelverhältnisse der vier Strahlen, also auch unter sich gleich. *)

Zieht man durch die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ gerade Linien $a_1 b_1 c_1 d_1$, die sich in ein und demselben beliebigen Punkte M' des Raumes schneiden, so ergibt sich ein aus vier Strahlen bestehender Büschel S_1 mit dem Mittelpunkte M', welcher gegen den ersteren Strahlenbüschel perspectivisch liegt. Für diesen zweiten Büschel besteht die Gleichung

$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{\sin a_1 c_1}{\sin b_1 c_1} : \frac{\sin a_1 d_1}{\sin b_1 d_1},$$

welche mit der vorhergehenden und der Gleichung α verglichen zeigt, dass

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a_1 c_1}{\sin b_1 c_1} : \frac{\sin a_1 d_1}{\sin b_1 d_1}$$

sein muss, woraus wir den Satz folgern:

Sind zwei Strahlenbüschel Scheine derselben aus vier Punkten bestehenden Punktreihe, so ist das Doppelverhältniss der Strahlen des einen Büschels gleich jenem der Strahlen des anderen.

Hat man zwei aus einer beliebigen Anzahl von Punkten bestehende perspectivisch liegende Punktreihen, so muss wie aus den vorhergehenden Untersuchungen folgt, das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten der einen Reihe gleich dem Doppelverhältnisse der diesen Punkten entsprechenden vier Punkte der anderen Reihe sein. Auch die nachstehenden Sätze bedürfen nun keines besonderen Beweises mehr:

Liegen zwei Strahlenbüschel perspectivisch, so ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Strahlen des einen Büschels, gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Strahlen des anderen.

Liegen eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel perspectivisch, so ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten der Reihe gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Strahlen des Büschels.

Um für schief liegende projectivische Grundgebilde analoge Sätze zu erhalten, fassen wir zunächst die oben gegebene Definition der Projectivität zweier Punktreihen ins Auge. Dieser Definition zufolge muss es möglich sein, aus der einen Punktreihe die ihr projectivisch verwandte durch ein- oder mehrmaliges Projiciren zu erhalten. Bezeichnet man die beiden Reihen durch R und R_z, so

*) In einem Werke des griechischen Geometers Pappus, welcher im vierten Jahrh. n. Chr. lebte, findet sich schon der Lehrsatz: „Wenn vier gerade Linien von einem Punkte ausgehen, so werden diese von jeder Transversalen in vier Punkten geschnitten, deren Doppelverhältniss immer denselben Werth hat, welches auch die Transversale sein mag.“ (Siehe „Geschichte der Geometrie“ von Chasles, deutsch von Sohncke, Seite 309.)



kann man sich demnach im Allgemeinen vorstellen, aus R seien durch Projiciren nach und nach $R_1, R_2, \ldots\ldots R_n \ldots\ldots R_z$ entstanden. Jede dieser Reihen liegt gegen jene, deren unmittelbare Projection sie ist, perspectivisch, oder kann wenigstens, wenn sie verschoben worden ist, wieder in die ursprüngliche perspectivische Lage gebracht werden. Daher ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten irgend einer Reihe R_n gleich dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Punkte, sowohl der Reihe R_{n-1}, als auch der Reihe R_{n+1}, woraus folgt, dass dasselbe bezüglich der Reihen R und R_z stattfindet. Damit ist nun der Satz erwiesen:

2. Sind zwei Punktreihen projectivisch, so ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten der einen Reihe gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Punkte der anderen Reihe.

Dieser Satz gilt auch, wenn man ihn umkehrt. Er bezieht sich dann auf zwei Punktreihen, bei welchen jedem bestimmten Punkte der einen Reihe ein einziger Punkt der anderen zugewiesen ist. Je zwei solche Punkte werden, wie bereits erklärt wurde — in einer allgemeineren Auffassung — ebenfalls entsprechende Punkte genannt, abgesehen davon, ob die beiden Reihen projectivisch verwandt sind oder nicht. Der umgekehrte Satz lautet:

3. Ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten einer Punktreihe gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Punkte einer zweiten Reihe, so sind die beiden Reihen projectivisch verwandt. *)

Um dies nachzuweisen, denken wir uns die beiden Reihen in solche Lage gegen einander gebracht, dass sie irgend einen Punkt entsprechend gemein haben. Die eine Reihe heisse R (Fig. 3), die zweite R_1, vier beliebige Punkte von R nennen wir $ABCD$ und die entsprechenden vier der zweiten Reihe $A\,B_1 C_1 D_1$.

(Fig. 3.)

Der Punkt A sei jener, in welchem beide Reihen nach vorgenommener Aenderung ihrer gegenseitigen Lage sich schneiden sollen. Unserer Voraussetzung gemäss ist dann A zugleich der Punkt, welchen R und R_1 entsprechend gemein haben.

Verbindet man die Punkte B und B_1, sowie die Punkte C und C_1 durch gerade Linien, deren Schnittpunkt M heissen möge, und zieht ferner aus M Gerade gegen A und D, so bilden die vier in M sich schneidenden Linien einen Strahlenbüschel, für welchen die Gleichung besteht:

$$(ABCD) = (abcd),$$

*) Dieser Satz wird nicht selten als Definition für die projectivische Verwandtschaft zweier Punktreihen benützt.

wenn man die Strahlen MA, MB, MC und MD beziehungsweise durch $abcd$ bezeichnet. Nennt man den Punkt, in welchem der Strahl d den Träger der Reihe R_1 schneidet, Δ, so ist

$$(AB_1C_1\Delta) = (abcd),$$

also auch

$$(ABCD) = (AB_1C_1\Delta).$$

Da ferner $(ABCD) = (AB_1C_1D_1)$ ist, wie vorausgesetzt wurde, so hat man

$$(AB_1C_1D_1) = (AB_1C_1\Delta),$$

woraus folgt, dass

$$\frac{A\Delta}{B_1\Delta} = \frac{AD_1}{B_1D_1}$$

sein muss, eine Gleichung, welche nur bestehen kann, wenn die Punkte D_1 und Δ zusammenfallen. Denn der Werth des Verhältnisses $\frac{A\Delta}{B_1\Delta}$ bestimmt die Lage von Δ in der Reihe R_1 unzweideutig und da dieser Werth gleich jenem des Verhältnisses $\frac{AD_1}{B_1D_1}$ ist, so müssen Δ und D_1 identisch sein, d. h. der Strahl d geht durch den Punkt D_1, welcher dem Punkte D entspricht.

In gleicher Weise lässt sich auch zeigen, dass jede von M aus durch irgend einen Punkt N der Reihe R gezogene Gerade die Reihe R_1 in einem entsprechenden Punkte N_1 schneiden muss, woraus folgt, dass die beiden Reihen in der angenommenen Lage Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind. Jede der zwei Reihen kann somit durch Projiciren aus der anderen erhalten werden, sie sind also projectivisch.

Aus dieser Untersuchung geht auch der Satz hervor:

4. Zwei projectivische Punktreihen liegen immer perspectivisch, sobald sie irgend einen Punkt entsprechend gemein haben. Daher kann man zwei projectivische Reihen immer dadurch in perspectivische Lage bringen, dass man zwei beliebige entsprechende Punkte derselben zur Coincidenz bringt.

Der Erklärung zufolge, dass projectivische Strahlenbüschel Scheine projectivischer Punktreihen sind, muss es, wenn man zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1 voraussetzt, immer auch zwei projectivische Punktreihen R und R_1 geben, deren Scheine die Büschel beziehungsweise bilden. Nennen wir vier beliebige Strahlen des durch S bezeichneten Büschels $abcd$ und die entsprechenden vier Strahlen des zweiten Büschels $a_1b_1c_1d_1$, heissen wir ferner jene Punkte von R, welche in $abcd$ liegen, beziehungsweise $ABCD$ und die in $a_1b_1c_1d_1$ gelegenen vier Punkte der zweiten Reihe $A_1B_1C_1D_1$, so bestehen die Gleichungen:

$$(ABCD) = (abcd)$$
$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$$

Da nun zufolge der projectivischen Verwandtschaft von R und R_1

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$$

sein muss, so hat man

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

woraus wir schliessen:

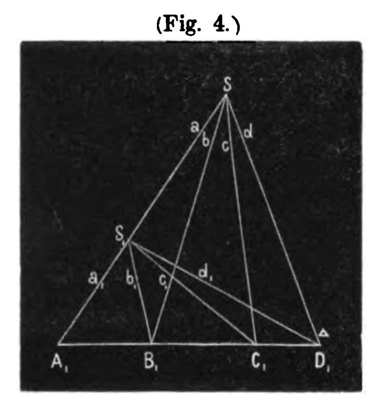
5. **Sind zwei Strahlenbüschel projectivisch, so ist das Doppelverhältniss von beliebigen vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Strahlen des anderen.**

Durch Umkehrung dieses Satzes erhält man den folgenden:

6. **Ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Strahlen eines Strahlenbüschels gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Strahlen eines zweiten Büschels, so sind die beiden Büschel projectivisch verwandt.**

Wir denken uns, um dies zu beweisen, die beiden Büschel S und S_1 (Fig. 4) in eine solche gegenseitige Lage gebracht, dass sie sich in derselben Ebene befinden, und irgend einen Strahl a entsprechend gemein haben. Die Durchschnittspunkte von zwei beliebig gewählten Paaren bb_1 und cc_1 entsprechender Strahlen seien beziehungsweise die Punkte B und C, durch welche wir uns eine Gerade gezogen denken. Diese Gerade schneidet die beiden Büschel in zwei Punktreihen. Von den Strahlen des Büschels S betrachten wir nur die Strahlen abc und einen beliebigen vierten d; von den Strahlen des anderen Büschels S_1 nur ab_1c_1 und jenen vierten Strahl d_1, welcher d entspricht. Die Schnittpunkte der Geraden BC mit $abcd$ seien beziehungsweise $ABCD$ und jene derselben Geraden mit $ab_1c_1d_1$ nennen wir beziehungsweise $ABC\varDelta$.

(Fig. 4.)



Unserer Voraussetzung gemäss besteht nun die Gleichung:

$$(abcd) = (ab_1 c_1 d_1);$$

da aber

$$(ABCD) = (abcd)$$

und

$$(ABC\varDelta) = (ab_1 c_1 d_1)$$

ist, so muss

$$(ABCD) = (ABCD)$$

sein, woraus folgt, dass

$$\frac{AD}{BD} = \frac{A\varDelta}{B\varDelta}$$

ist, was nur dann der Fall sein kann, wenn die Punkte D und Δ coincidiren. Es schneiden sich somit die Strahlen d und d_1 in einem Punkte D der Geraden BC. Nachdem dieses Strahlenpaar beliebig gewählt wurde, so lässt sich dasselbe in gleicher Weise für beliebige andere entsprechende Strahlen zeigen. Die beiden Büschel sind also Scheine ein und derselben Punktreihe, deren Träger die Gerade BC ist, und müssen daher auch projectivisch sein.

Diese Ergebnisse beweisen auch folgenden Satz:

7. Zwei in derselben Ebene befindliche projectivische Strahlenbüschel liegen immer perspectivisch, sobald sie einen Strahl entsprechend gemein haben. Daher können zwei projectivische Strahlenbüschel immer dadurch in perspectivische Lage gebracht werden, dass man sie in dieselbe Ebene bringt und zwei beliebige entsprechende Strahlen derselben coincidiren lässt.

Die Sätze 2, 3, 5, 6 beziehen sich auf zwei gleichartige Grundgebilde; es sollen nun analoge Sätze auch für zwei ungleichartige Grundgebilde, nämlich für die Punktreihe und den Strahlenbüschel aufgestellt werden:

8. Sind eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel projectivisch verwandt, so ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten der Reihe gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Strahlen des Büschels.

Zufolge der Voraussetzung, dass die Reihe mit dem Büschel projectivisch verwandt sein soll besteht eine zweite mit der ersteren projectivische Reihe, deren Schein der Büschel ist. Heisst der Büschel S, die erste Reihe R, die zweite R_1, und nennt man $abcd$ vier beliebige Strahlen von S, ferner $ABCD$ die diesen Strahlen entsprechenden Punkte von R und endlich $A_1B_1C_1D_1$ die in den genannten vier Strahlen gelegenen Punkte der Reihe R_1, so bestehen die Gleichungen:

$$(A_1B_1C_1D_1) = (abcd)$$
$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$$

also ist auch

$$(ABCD) = (abcd),$$

wodurch obiger Satz gerechtfertigt erscheint.

Durch Umkehrung dieses Satzes ergibt sich der folgende:

9. Ist das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten einer Punktreihe gleich dem Doppelverhältnisse der diesen Punkten entsprechenden vier Strahlen eines Büschels, so sind die beiden Grundgebilde projectivisch.

Schneidet man den Büschel, den wir S nennen wollen, durch eine Gerade, so bilden die entstehenden Schnittpunkte eine Punktreihe R_1, welche mit S projectivisch ist, daher muss das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten

$A_1B_1C_1D_1$ der Reihe gleich jenem der durch sie gehenden vier Strahlen *abcd* sein; man hat also

$$(A_1B_1C_1D_1) = (abcd).$$

Sind nun $ABCD$ die den Strahlen *abcd* entsprechenden Punkte der gegebenen Reihe R, so besteht der Voraussetzung zufolge die Gleichung

$$(ABCD) = (abcd)$$

daher ist

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1),$$

woraus folgt, dass die beiden Punktreihen, also auch der Büschel S und die Reihe R projectivisch sind.

10. **Haben zwei projectivische Punktreihen oder zwei projectivische Strahlenbüschel drei ihrer Elemente entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, d. h. sie sind identisch.**

Der Beweis für diesen Satz kann wie folgt gegeben werden:

Heissen die drei Punkte, welche zwei Punktreihen R und R_1 entsprechend gemein haben, ABC, ist ferner D ein beliebiger vierter Punkt der Reihe R und $\varDelta$ der dem Punkte D entsprechende der Reihe R_1, so muss

$$(ABCD) = (ABC\varDelta),$$

also

$$\frac{AD}{BD} : \frac{A\varDelta}{B\varDelta},$$

sein, was nur möglich ist, wenn D und $\varDelta$ zusammenfallen.

Nachdem D und $\varDelta$ ein beliebiges Paar entsprechender Punkte sind, so gilt dasselbe für irgend zwei andere entsprechende Punkte der beiden Reihen, es sind daher die letzteren identisch.

In ganz analoger Weise lässt sich der obige Satz auch bezüglich zweier Strahlenbüschel rechtfertigen.

11. **Will man zwei der in Rede stehenden Grundgebilde projectivisch auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben drei Elemente beliebig wählen und einander als entsprechend zuweisen; jedem vierten Elemente des einen Grundgebildes entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des anderen.**

Nehmen wir an, die zwei Grundgebilde seien Punktreihen R und R_1, in welchen beziehungsweise ABC und $A_1B_1C_1$ als entsprechende Punkte beliebig gewählt wurden, und D heisse irgend ein vierter Punkt der Reihe R. Diesem letzteren Punkte entspricht dann ein Punkt D_1, dessen Lage unzweideutig bestimmt ist, wie aus der Gleichung

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1}$$

hervorgeht, in welcher alle Verhältnisse, ausser $\frac{A_1D_1}{B_1D_1}$ bekannt sind.

Um D_1 constructiv zu erhalten bringt man R und R_1 in perspectivische Lage, indem man etwa A und A_1 coincidiren lässt, sucht den Durchschnittspunkt M der Geraden BB_1 und CC_1 und zieht MD. Letztere Gerade schneidet dann den Träger von R_1 im gesuchten Punkte D_1.

Setzt man eine Punktreihe R und einen mit ihr projectivischen Strahlenbüschel S voraus und nimmt man an, den Punkten ABC in R würden die Strahlen abc in S entsprechen, so ist jeder vierte Strahl d von S unzweideutig bestimmt, wenn der ihm entsprechende Punkt D in R gewählt ist, denn es besteht die Gleichung

$$(ABCD) = (abcd),$$

aus welcher sich der Werth des Verhältnisses $\frac{\sin ad}{\sin bd}$ unzweideutig ergibt.

Constructiv lässt sich d wie folgt bestimmen: Man schneidet S durch irgend eine Gerade, wodurch sich eine Punktreihe R_1 ergibt, deren in abc gelegene Elemente wir beziehungsweise $A_1 B_1 C_1$ nennen wollen. Die Reihen R und R_1 sind nun projectivisch und den Punkten ABC in R entsprechen die Punkte $A_1 B_1 C_1$ in R_1. Es lässt sich demnach der Punkt D_1 in R_1, welcher dem Punkte D entspricht constructiv ermitteln, wie eben erklärt wurde. Der durch D_1 gehende Strahl von S ist der gesuchte Strahl d.

In allen übrigen Fällen, welche der Satz 11 umfasst, kann der Beweis und die betreffende Construction auf ganz analoge Weise durchgeführt werden.

12. Sind eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel projectivisch verwandt und gehen drei Strahlen des Büschels durch die drei diesen Strahlen entsprechenden Punkte, so gehen alle Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte. Die beiden Grundgebilde liegen demnach perspectivisch.

Dieser Satz leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass der Träger der Punktreihe, die wir R nennen wollen, den Strahlenbüschel in einer Reihe R_1 schneidet, welche mit R drei Elmente entsprechend gemein hat, woraus nach Satz 10 folgt, dass R und R_1 indentisch sein müssen.

13. Haben zwei projectivische Punktreihen eine solche gegenseitige Lage, dass die Verbindungslinien von drei Paaren einander entsprechender Punkte sich in ein und demselben Punkte M schneiden, so gehen die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Punkte durch M, d. h. die beiden Reihen liegen perspectivisch.

Haben zwei projectivische Strahlenbüschel eine solche gegenseitige Lage, dass die Durchschnittspunkte von drei Paaren einander entsprechender Strahlen sich in ein und derselben Geraden m befinden, so schneiden sich alle Paare entsprechender Strahlen in der Geraden m, d. h. die beiden Büschel liegen perspectivisch.

(Satz links.) Sind R und R_1 die beiden Reihen und S jener Strahlenbüschel, welcher durch die Verbindungslinien aller Punkte von R mit dem Punkte M gebildet wird, so liegt nicht nur R sondern auch R_1 gegen S perspectivisch, wie aus dem Satze 12 folgt. Daher sind S und S_1 Scheine derselben Punktreihe R und liegen perspectivisch.

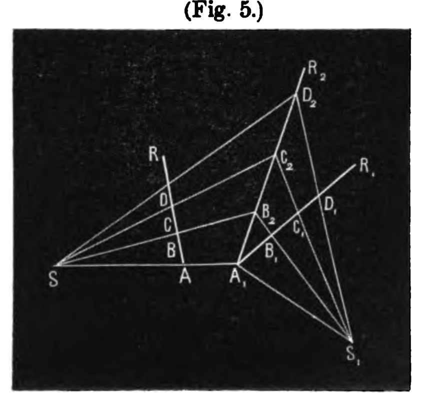
(Satz rechts.) Heissen die beiden Strahlenbüschel S und S_1 und bezeichnet R jene Punktreihe, welche durch den Schnitt der Geraden m mit dem Büschel S zu Stande kommt, so liegen nicht nur S und R, sondern auch S_1 und R perspectivisch, wie aus dem Satze 12 hervorgeht. Daher sind S und S_1 Scheine derselben Punktreihe R und liegen perspectivisch.

14. Zu zwei gegebenen projectivischen Punktreihen R und R_1 lässt sich immer eine dritte Reihe R_2 bestimmen, welche gegen R und R_1 perspectivisch liegt.

Dieser Satz gilt auch für zwei Punktreihen, durch deren Träger sich keine Ebene legen lässt. Der Beweis für denselben ergibt sich aus Folgendem.

Verbindet man irgend zwei einander entsprechende Punkte A und A_1 (Fig. 5) der beiden Reihen R und R_1, nimmt in einem von A und A_1 verschiedenen Punkte der Geraden AA_1 den Mittelpunkt eines Strahlenbüschels S an, der gegen R perspectivisch liegt und zieht durch A_1 in der Ebene des Büschels S eine beliebige Gerade, so ist die Reihe R_2 welche sich als Schnitt dieser Geraden mit S ergibt, gegen R perspectivisch gelegen. R_2 liegt aber auch gegen R_1 perspectivisch, da R_1 und R_2 projectivisch sind und den Punkt A_1 entsprechend gemein haben; demnach liegt R_2 sowohl gegen R als auch gegen R_1 perspectivisch.

(Fig. 5.)



Mit Hilfe einer solchen Mittelreihe R_2 kann man auch leicht zu irgend einem Punkte der einen Reihe R, den entsprechenden Punkt der zweiten Reihe R_1 bestimmen.

Sind S und S_1 irgend zwei Strahlenbüschel und will man zu einem Strahle x des Büschels S den entsprechenden Strahl x_1 des Büschels S_1 ermitteln, so kann dies mit Benützung einer Mittelreihe wie folgt geschehen: Man schneidet S und S_1 durch je eine beliebige Gerade, bestimmt zu den sich als Schnitte ergebenden Punktreihen R und R_1 eine Mittelreihe und sucht mit Hilfe dieser Reihe den Punkt X_1 in R_1, welcher dem Strahle x entspricht. Jener Strahl von S_1, der durch X_1 geht, ist dann der gesuchte.

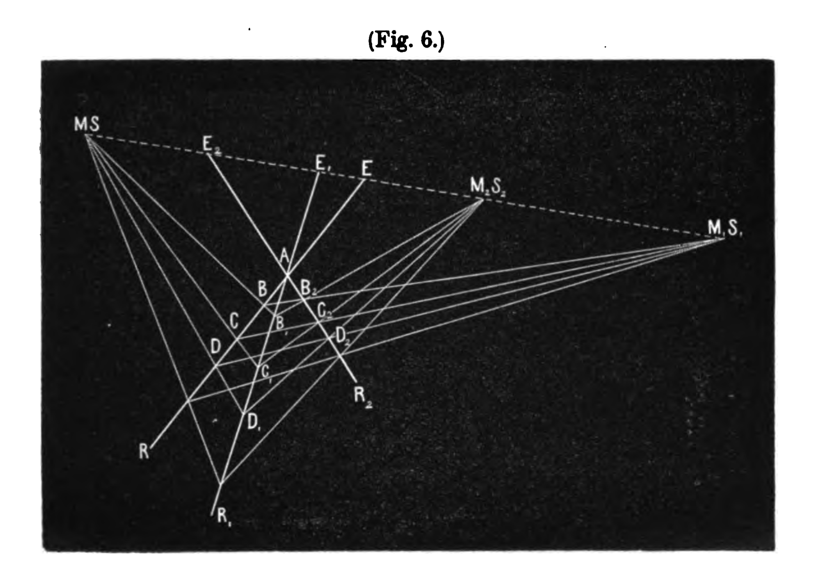
15. Haben drei projectivische Punktreihen R, R_1, R_2 (Fig 6) ein und denselben Punkt

Haben drei projectivische Strahlenbüschel S, S_1, S_2 (Fig. 6) ein und denselben Strahl ent-

entsprechend gemein, so liegen die Mittelpunkte jener drei Strahlenbüschel, welche erhalten werden, wenn man die entsprechenden Punkte von R und R_1, dann von R und R_2, endlich von R_1 und R_2 verbindet, in ein und derselben Geraden.

sprechend gemein, so schneiden sich die drei Geraden, in welchen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen von S und S_1, dann von S und S_2, endlich von S_1 und S_2 liegen in ein und demselben Punkte.

(Fig. 6.)



(Satz links). Die Strahlenbüschel S und S_2, welche beziehungsweise durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von R und R_1 und der entsprechenden Punkte von R_1 und R_2 entstehen, liegen perspectivisch, da sie Scheine derselben Punktreihe R_1 sind. Sie haben daher einen Strahl, nämlich die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte M und M_2 entsprechend gemein und die Punkte E, E_1, in welchen die Träger von R und R_1 beziehungsweise durch MM_2 geschnitten werden, sind einander entsprechende Punkte. Der in R_2 gelegene, den Punkten E und E_1 entsprechende Punkt E_2 muss im Durchschnitte von M_2E_1 mit dem Träger von R_2 gelegen sein, da R_2, als die Projection von R_1 für das Projectionscentrum M_2 betrachtet werden kann. Die drei einander entsprechenden Punkte E, E_1, E_2 liegen demnach in der Geraden MM_2. Da endlich die Verbindungslinie der Punkte E und E_2 ein Strahl des Büschels S_1 ist, so liegt M_1 in dieser Linie, oder, was dasselbe ist, in der Geraden MM_2.

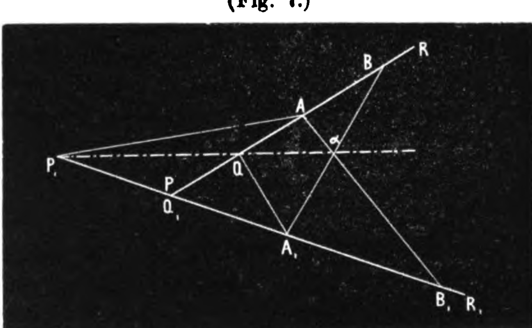
(Satz rechts). Nachdem die drei Strahlenbüschel S, S_1, S_2 unserer Voraussetzung gemäss einen Strahl entsprechend gemein haben sollen, welcher

selbstverständlich die Verbindungslinie der drei Mittelpunkte M, M_1, M_2 ist, so liegt jeder Büschel gegen einen anderen derselben perspectivisch. Der Durchschnitt von S und S_1 bildet somit eine Punktreihe R, der Durchschnitt von S und S_2 eine Reihe R_1 und endlich der Durchschnitt von S_1 und S_2 eine Reihe von R_2. Da R und R_1 perspectivisch liegen, indem sie Schnitte desselben Büschels S sind, so ist ihr Durchschnittspunkt A ein sich selbst entsprechender Punkt. Jener Punkt der Reihe R_2, welcher dem Punkte A entspricht, muss in dem Strahle M_2A gelegen sein, da man R_2 als die Projection von R_1 für das Projectionscentrum M_2 ansehen kann. Derselbe Punkt der Reihe R_2 muss aber auch im Strahle M_1A liegen, nachdem ebensowohl gestattet ist R_2 als die Projection von R für das Projectionscentrum M_1 aufzufassen. Da nun der dem Punkte A entsprechende Punkt der Reihe R_2 zugleich in M_1A und in M_2A gelegen sein soll, so kann er nur der Punkt A selbst sein, d. h. die drei Reihen R, R_1, R_2 schneiden sich in A.

16. Sind AA_1 und BB_1 (Fig. 7) zwei beliebige Paare entsprechender Punkte von zwei in derselben Ebene befindlichen projectivischen Punktreihen, so liegt der Schnitt-Punkt der Verbindungslinien AB_1 und A_1B auf einer bestimmten Geraden.

Sind aa_1 und bb_1 (Fig. 8) zwei beliebige Paare entsprechender Strahlen von zwei in derselben Ebene befindlichen projectivischen Strahlenbüscheln, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte von ab_1 und a_1b durch einen bestimmten Punkt.

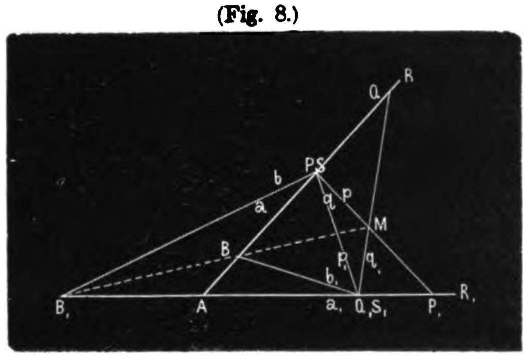
(Fig. 7.)



(Satz links.) Die beiden Reihen nennen wir R und R_1, der Punkt von R, welcher im Schnittpunkte der Träger beider Reihen liegt, sei P, der mit P coincidirende Punkt von R_1 heisse Q_1 und die den Punkten P und Q_1 entsprechenden seien beziehungsweise P_1 und Q. Verbindet man A mit den Punkten $A_1B_1P_1Q_1$ und den Punkt A_1 mit $ABPQ$, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel, mit den Mittelpunkten A und A_1, welche perspectivisch liegen, nachdem sie den Strahl AA_1 entsprechend gemein haben. Diese beiden Büschel sind daher Scheine derselben Punktreihe. Der Träger der letzteren

muss durch die Punkte P_1 und Q gehen, denn in P_1 schneiden sich die entsprechenden Strahlen AP_1, A_1P, und in Q die entsprechenden Strahlen AQ_1, A_1Q;

(Fig. 8.)



demnach enthält die Gerade P_1Q die Schnittpunkte aller Paare sich entsprechender Strahlen der beiden Büschel, wie z. B. den Durchschnitt α der Strahlen AB_1 und A_1B. Aus demUmstande, dass die Lage der Geraden P_1Q von der Wahl der Punktpaare AA_1, BB_1 unabhängig ist, folgt nun unmittelbar der obige Satz.

(Satz rechts.) S und S_1 seien die beiden Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte wir beziehungsweise P und Q_1 nennen wollen, q heisse der Strahl von S, welcher durch Q_1 geht, p_1 der Strahl von S_1, welcher mit q coincidirt und p, q_1 seien die den Strahlen p_1, q entsprechenden. Durch den Schnitt des Strahles a mit den Strahlen $a_1 b_1 p_1 q_1$ entsteht nun eine aus den Punkten $ABPQ$ gebildete Reihe R und durch den Schnitt des Strahles a_1 mit den Strahlen $abpq$ eine aus den Punkten $AB_1P_1Q_1$ bestehende Reihe R_1, welche mit R projectivisch ist. Da die Reihen R und R_1 den Punkt A entsprechend gemein haben, so liegen sie perspectivisch, es gehen demnach die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Punkte dieser Reihen, z. B. die Linien BB_1 und PP_1, durch denselben Punkt M. Die Punkte BB_1 sind aber beziehungsweise die Durchschnitte der Strahlen ab_1 und a_1b und der Punkt M ist der Durchschnitt von PP_1 und QQ_1, woraus mit Rücksicht auf den Umstand, dass aa_1 und bb_1 zwei beliebige Paare entsprechender Strahlen bilden, von deren Wahl die Lage des Punktes M unabhängig ist, der obige Satz folgt.

Eine wichtige Eigenschaft projectivischer Punktreihen ergibt sich durch die Untersuchung eines Doppelverhältnisses, in welchem die Gegenpunkte und die unendlich fernen Punkte vorkommen. Wird der unendlich ferne Punkt einer Reihe R, durch U, der ihm entsprechende Gegenpunkt der Reihe R_1 durch G' bezeichnet, nennt man ferner U' den unendlich fernen Punkt von R_1 und G den Gegenpunkt der Reihe R, so besteht, wenn AA_1, BB_1 zwei beliebige Paare entsprechender Punkte von R und R_1 sind, die Gleichung

$$(ABGU) = (A_1B_1U'G')$$

oder

$$\frac{AG}{BG} : \frac{AU}{BU} = \frac{A_1U'}{B_1U'} : \frac{A_1G'}{B_1G'}.$$

Nachdem nun $\frac{AU}{BU}$ sowohl, als auch $\frac{A_1U'}{B_1G'}$, wie bereits erklärt wurde, gleich der Einheit ist, so hat man

$$AG \,.\, A_1G' = BG \,.\, B_1G'.$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

17. **Das Product der Abstände zweier entsprechender Punkte A und A_1 von den Gegenpunkten der projectivischen Reihen, in welchen sie liegen, hat stets dieselbe Grösse, wie man auch die Punkte A, A_1 wählen mag.**

Aus diesem Satze kann man schliessen, dass, wenn ein Punkt A der Reihe R sich dem Gegenpunkte G stetig nähert, der dem Punkte A entsprechende A_1 der Reihe R_1 sich von dem Gegenpunkte G' stetig entfernt und umgekehrt. Fällt A mit G zusammen so ist der eine Abstand gleich Null, der andere im allgemeinen unendlich gross und das Product beider Abstände muss wieder die constante endliche Grösse haben.

18. **In einem jeden von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, von denen keiner ein Parallel-Strahlenbüschel ist, gibt es entweder nur ein Paar, oder unendlich viele Paare auf einander senkrecht stehender Strahlen, deren entsprechende Strahlen im anderen Büschel ebenfalls auf einander senkrecht stehen.**

Diese Strahlen nennt man die **Schenkel der entsprechenden rechten Winkel.**

Der Beweis hiefür ergibt sich aus einer einfachen Construction, welche die in Rede stehenden rechten Winkel liefert.

Man bringt die beiden Büschel in perspectivische Lage, indem man sie in dieselbe Ebene legt und ein beliebiges Paar entsprechender Strahlen coincidiren lässt. Die Mittelpunkte der Büschel seien M und M_1 und den Träger jener Reihe, in deren Punkten sich die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel schneiden, bezeichnen wir durch t. Wird nun ein Kreis construirt, der seinen Mittelpunkt in t hat und durch M und M_1 geht, so schneidet derselbe die Gerade t in zwei Punkten R und S, welche eine solche Lage haben, das die Winkel RMS und RM_1S — als Winkel im Halbkreise — rechte werden. Die Strahlen MR, MS, M_1R und M_1S nennen wir beziehungsweise r, s, r_1, s_1. Dass r und r_1, sowie s und s_1 Paare entsprechender Strahlen sind, folgt daraus, dass sie sich in Punkten jener Reihe schneiden, deren Scheine die in Rede stehenden Büschel bilden.

Nachdem es nun im allgemeinen immer möglich ist einen Kreis von der bezeichneten Lage zu construiren, so gibt es in zwei projectivischen

Strahlenbüscheln im allgemeinen auch immer zwei entsprechende rechte Winkel.

Liegt der Mittelpunkt des Kreises in unendlicher Entfernung, was dann der Fall ist, wenn die Gerade MM_1 auf t senkrecht steht, so geht der Kreis in die Gerade MM_1 über und einer der Punkte R oder S liegt in MM_1. Ein Paar entsprechender Schenkel der entsprechenden rechten Winkel fällt dann offenbar mit MM_1 zusammen. Dies findet immer statt, wenn die entsprechenden Strahlen, welche, um die beiden Büschel in perspectivischer Lage zu erhalten, zur Coincidenz gebracht wurden, zufällig Schenkel der entsprechenden rechten Winkel sind.

Der Mittelpunkt des Kreises kann auch in unendliche Entfernung kommen, wenn t unendlich ferne gelegen ist. Letzteres findet jedoch nur statt, wenn alle entsprechenden Strahlen zu einander parallel sind. Die Büschel müssen dann, vorausgesetzt dass M und M_1 in endlicher Ferne liegen, vollkommen gleich sein, daher haben in diesem Falle die beiden Büschel nicht bloss ein Paar entsprechender rechter Winkel, sondern unendlich viele. Dasselbe findet statt, wenn t auf dem Strahle MM_1 senkrecht steht und von M und M_1 gleich weit entfernt sind. Denn es sind dann unendlich viele Kreise möglich, welche durch M und M_1 gehen und ihren Mittelpunkt in t haben. Dass die beiden Büschel auch in diesem Falle vollkommen gleich sein müssen ist selbstverständlich. — Es zeigt sich also, dass nur dann, wenn beide Strahlenbüschel vollkommen gleich sind, unendlich viele Paare entsprechender rechter Winkel in denselben vorkommen können; in jedem andern Falle gibt es nur ein solches Paar, vorausgesetzt, dass keiner der Büschel ein Parallelbüschel ist.

Sind aa_1 und bb_1 zwei beliebige Paare einander entsprechender Strahlen so besteht die Gleichung

$$(abrs) = (a_1 b_1 r_1 s_1),$$

oder

$$\frac{\sin ar}{\sin br} : \frac{\sin as}{\sin bs} = \frac{\sin a_1 r_1}{\sin b_1 r_1} : \frac{\sin a_1 s_1}{\sin b_1 s_1},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\sin ar \,.\, \sin bs}{\sin as \,.\, \sin br} = \frac{\sin a_1 r_1 \,.\, \sin b_1 s_1}{\sin a_1 s_1 \,.\, \sin b_1 r_1}.$$

Da nun die Winkel ar und as, br und bs, dann $a_1 r_1$ und $a_1 s_1$, sowie $b_1 r_1$ und $b_1 s_1$ sich zu rechten Winkeln ergänzen, so hat man

$$\sin as = \cos ar, \qquad \sin a_1 r_1 = \cos a_1 s_1$$
$$\sin bs = \cos br, \qquad \sin b_1 r_1 = \cos b_1 s_1,$$

welche Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt geben:

$$\operatorname{tg} ar \,.\, \operatorname{tg} a_1 s_1 = \operatorname{tg} br \,.\, \operatorname{tg} b_1 s_1.$$

Daraus folgt, dass auch

$$\operatorname{tg} as \,.\, \operatorname{tg} a_1 r_1 = \operatorname{tg} bs \,.\, b_1 r_1$$

sein muss. Wir können somit behaupten:

19. Das Product der trigonometrischen Tangenten jener Winkel, welche zwei beliebige entsprechende Strahlen mit den nicht entsprechenden Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, ist stets dasselbe, wie man auch diese Strahlen annehmen mag.

Hieraus lässt sich schliessen, dass, wenn ein Strahl a des Büschels S sich dem Strahle s durch Drehung um den Mittelpunkt von S stetig nähert, der Strahl a_1 des Büschels S_1, welcher mit S projectivisch verwandt ist, sich von r_1 auf dieselbe Weise, nämlich durch Drehung um den Mittelpunkt von S_1 stetig entfernt.

Da zwei Punktreihen, wenn sie irgend einen Punkt entsprechend gemein haben, perspectivisch liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte solcher Reihen stets in ein und demselben Punkte, nämlich dem Mittelpunkte des projicirenden Büschels, welche Lage auch die beiden Reihen gegen einander haben mögen. Wir wollen nun untersuchen, welche Linie dieser Mittelpunkt beschreibt, wenn eine der Reihen um ihren Durchschnittspunkt mit der anderen Reihe gedreht wird, während letztere ihre Lage nicht ändert.

R und R_1 (Fig. 9) seien die beiden Reihen, welche sich im Punkte A, der ihnen entsprechend gemein ist, treffen. M sei der für die angenommene Lage von R und R_1 sich ergebende Mittelpunkt des projicirenden Büschels. Um die Gegenpunkte von R und R_1 zu erhalten, hat man nur aus M parallele Gerade zu den beiden Reihen zu ziehen. Die Parallele zu R schneidet R_1 im Gegenpunkte G' und die Parallele zu R_1 trifft R im Gegenpunkte G. Wären umgekehrt die Gegenpunkte bekannt, so hätte man, um M zu erhalten aus G und G' beziehungsweise zu R_1 und R parallele Gerade zu ziehen; im Durchschnitte dieser Parallelen würde sich dann der Mittelpunkt M ergeben. Der letztere Punkt bildet also einen Eckpunkt eines Parallelogrammes, dessen andere Ecken G, A und G' sind, daher muss

(Fig. 9.)

$$G'M = AG$$

sein. Da nun die gegenseitige Lage der Punkte von R sowohl, als auch von R_1 sich nicht ändert, wenn R um A gedreht wird, so behalten die Strecken AG und AG' bei dieser Drehung stets dieselbe Länge, und es muss, wenn R etwa in die Lage R' gekommen ist, der Mittelpunkt M des projicirenden Büschels von G' ebenfalls die Entfernung AG haben. Daraus folgt, dass der Punkt M bei der

Drehung von R einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt G' und dessen Halbmesser gleich AG ist.

Es gilt somit der Satz:

20. Liegen zwei Punktreihen perspectivisch und dreht man die eine um ihren Durchschnittspunkt mit der anderen, während letztere ihre Lage nicht ändert, so beschreibt der Mittelpunkt des projicirenden Strahlenbüschels der zwei Reihen einen Kreis, dessen Mittelpunkt sich im Gegenpunkte der nicht gedrehten Reihe befindet. Der Halbmesser dieses Kreises ist gleich dem Abstande des Gegenpunktes der anderen Reihe vom Drehungspunkte.

Wenn zwei in derselben Ebene befindliche Strahlenbüschel einen Strahl entsprechend gemein haben, so liegen sie, wie bereits erklärt wurde, perspectivisch und bilden also Scheine derselben Punktreihe. Wird daher der eine von den zwei Strahlenbüscheln derart in seiner Ebene verschoben, dass der Strahl welchen die beiden Büschel entsprechend gemein haben, ihnen stets gemein ist, so bleiben die zwei Büschel perspectivisch und schneiden sich immer in einer Punktreihe. Es frägt sich nun, welche Lagen haben alle jene Punktreihen gegen einander, in denen sich die beiden Strahlenbüschel schneiden, wenn der eine in der erklärten Weise verschoben wird?

Um diese Frage zu beantworten, berücksichtigen wir, dass während der in Rede stehenden Verschiebung jeder Strahl des verschobenen Büschels parallel zu seiner ursprünglichen Richtung bleibt und dass alle sich ergebenden Punktreihen gegen beide Büschel perspectivisch liegen.

Den Büschel, welcher seine Lage ändert, nennen wir S, den in Ruhe bleibenden S_1 und irgend eine als Schnitt von S und S_1 sich ergebende Punktreihe R.

Jene Strahlen u und u_1 der Büschel S und S_1, welche der Reihe R parallel laufen, sind entsprechende Strahlen, nachdem sie sich in einem Punkte von R, nämlich im unendlich fernen Punkte dieser Reihe schneiden. Da u und u_1 während der Verschiebung von S parallel bleiben, so treffen sie sich stets in einem unendlich fernen Punkte. Gegen diesen Punkt müssen nun alle Punktreihen, welche sich als perspectivische Durchschnitte von S und S_1 ergeben, convergiren, woraus man schliessen kann:

21. Liegen zwei in derselben Ebene befindliche Strahlenbüschel perspectivisch und verschiebt man einen von ihnen in seiner Ebene derart, dass die beiden Büschel stets denselben Strahl entsprechend gemein haben, so sind alle Punktreihen, die sich als Schnitte dieser Büsche ergeben, zu einander parallel.

b) Specielle projectivische Verwandtschaft zwischen Punktreihen und Strahlenbüscheln.

Einen wichtigen besonderen Fall projectivischer Verwandtschaft zweier Punktreihen bildet jener, in welchem die unendlich fernen Punkte der beiden Reihen einander entsprechen. Bringt man diese Punkte, die wir U und U_1 nennen wollen, mit beliebigen drei anderen Paaren entsprechender Punkte in ein Doppelverhältniss, so erhält man die Gleichung

$$(ACBU) = (A_1 C_1 B_1 U_1)$$

oder, was dasselbe ist.

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AU}{CU} = \frac{A_1 B_1}{C_1 B_1} : \frac{A_1 U_1}{C_1 U_1}.$$

Nachdem nun, wie bekannt, die Verhältnisse $\frac{AU}{CU}$ und $\frac{A_1 U_1}{C_1 U_1}$ gleich der Einheit sind, so ist

$$\frac{AB}{CB} = \frac{A_1 B_1}{C_1 B_1}.$$

Hätte man statt der Punkte ACB die Punkte BCD gewählt, so würde man erhalten haben

$$\frac{CB}{CD} = \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit der vorhergehenden ergibt sich

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1 B_1}{C_1 D_1}$$

oder

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{CD}{C_1 D_1}.$$

Da man zwei Punktreihen, bei welchen die unendlich fernen Punkte einander entsprechen, ähnliche Punktreihen nennt, so folgt aus letzterer Gleichung der Satz:

22. In zwei ähnlichen Punktreihen ist das Verhältniss von irgend zwei einander entsprechenden Strecken gleich ein und derselben Grösse.

Man nennt desshalb ähnliche Punktreihen auch proportionale Reihen.

23. In zwei ähnlichen Punktreihen liegen die Gegenpunkte in unendlicher Entfernung.

Der Beweis für diese Behauptung folgt schon aus der Definition des Gegenpunktes. Da nämlich der Gegenpunkt G einer Reihe R dem unendlich fernen Punkte U' einer zweiten Reihe R_1 entspricht, so muss, wenn R und R_1 ähnlich sein sollen, U' sowohl dem Punkte G, als auch dem unendlich fernen

Punkt U der Reihe R entsprechen, was nur möglich ist, wenn G und U zusammenfallen. In ähnlicher Weise lässt sich auch zeigen, dass der in R_1 gelegene Gegenpunkt G' mit U' coincidiren muss, es erscheint daher obiger Satz gerechtfertigt.

24. Schneidet man einen Strahlenbüschel durch parallele Gerade, so sind die entstehenden Schnitte ähnliche Punktreihen.

Denn nachdem die Reihen, welche sich als Schnitte ergeben, perspectivisch liegen, so schneidet jeder Strahl des Büschels dieselben in einem Paare entsprechender Punkte, also auch jener Strahl, der zu ihnen parallel gezogen werden kann. Da nun dieser Parallelstrahl die Reihen in ihren unendlich fernen Punkten schneidet, so müssen letztere Punkte einander entsprechen, woraus folgt, dass die in Rede stehenden Punktreihen ähnlich sind.

25. Schneidet man einen Parallel-Strahlenbüschel nach beliebigen Richtungen durch gerade Linien, so sind die entstehenden Schnitte ähnliche Punktreihen.

Da jeder Strahl des Büschels die Reihen in einander entsprechenden Punkten schneidet, so entsprechen sich auch die Schnittpunkte eines in unendlicher Entfernung gelegenen Strahles. Diese Schnittpunkte liegen aber selbst in unendlicher Entfernung, folglich müssen die Reihen ähnlich sein.

Daraus und mit Rücksicht auf den Satz 13 folgt auch:

26. Sind die Verbindungslinien von drei Paaren entsprechender Punkte zweier projectivischer Reihen zu einander parallel, so müssen die beiden Reihen ähnlich sein.

27. Haben zwei ähnliche Punktreihen zwei Paare ihrer Punkte entsprechend gemein, so coincidiren alle ihre entsprechenden Punkte, d. h. die beiden Reihen sind identisch.

Aus der oben für ähnliche Reihen aufgestellten Gleichung

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

geht dies unmittelbar hervor. Denn wären AA_1 und BB_1 die zwei Paare entsprechender Punkte, so folgt aus dieser Gleichung $CD = C_1D_1$; es sind somit alle entsprechenden Strecken einander gleich.

Dass man bei der Construction ähnlicher Punktreihen nur zwei und nicht mehr Paare entsprechender Punkte beliebig wählen darf, ergibt sich schon aus dem für projectivische Reihen im allgemeinen aufgestellten Satze 11. Als drittes Paar entsprechender Punkte sind nämlich die unendlich fernen zu betrachten, somit können nur noch zwei Paare willkührlich angenommen werden.

Haben zwei ähnliche Punktreihen einen Punkt entsprechend gemein, so liegen sie, wie in diesem Falle projectivische Punktreihen überhaupt, perspectivisch. Bemerkenswerth ist jedoch, dass wenn der Punkt, welcher beiden Reihen

entsprechend gemein ist, in endlicher Entfernung liegt, der projicirende Strahlenbüschel ein Parallelbüschel sein muss. Sind hingegen die Reihen parallel, in welchem Falle sie die unendlich fernen Punkte entsprechend gemein haben, so liegt der Mittelpunkt des projicirenden Büschels im allgemeinen in endlicher Entfernung.

Der speciellste Fall projectivischer Verwandtschaft zwischen Punktreihen ist der, wenn alle entsprechenden Strecken der letzteren gleich sind. Man nennt solche Reihen gleiche oder congruente Reihen. Dass dieselben auch ähnlich sind, ist selbstverständlich.

Schneidet man einen Parallel-Strahlenbüschel durch parallele Gerade, so ergeben sich congruente Punktreihen. Ausserdem können im allgemeinen noch congruente Reihen entstehen, wenn ein Parallel-Strahlenbüschel durch Gerade geschnitten wird, welche zwar nicht parallel sind, aber gegen die Strahlen des Büschels gleiche Winkel einschliessen, oder wenn man einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in endlicher Entfernung gelegen ist, durch parallele Gerade schneidet, welche sich in gleichen Abständen zu verschiedenen Seiten des Mittelpunktes befinden.

28. Kommen in zwei projectivischen Punktreihen drei Paare entsprechender Punkte AA_1, BB_1 und CC_1 vor, welche so gelegen sind, dass $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ und $BC = B_1C_1$ ist, so müssen die beiden Reihen congruent sein.

Denkt man sich nämlich die beiden Punktreihen in solche gegenseitige Lage gebracht, dass die drei Paare gleicher Strecken mit ihren einander entsprechenden Endpunkten coincidiren, so haben die zwei Reihen drei Punkte entsprechend gemein. Sie müssen daher in dieser Lage alle ihre Punkte entsprechend gemein haben (Satz 10), was nur möglich ist, wenn die Reihen congruent sind.

29. Kommt in zwei ähnlichen Punktreihen ein Paar gleicher endlicher Strecken vor, welche sich entsprechen, so sind die beiden Reihen congruent.

Dieser Satz kann in derselben Weise wie der Satz 27 bewiesen werden. Aus der für ähnliche Reihen geltenden Gleichung

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

folgt nämlich, dass wenn $AB = A_1B_1$ ist, auch $CD = C_1D_1$ sein muss. Nachdem nun CD und C_1D_1 beliebige einander entsprechende Strecken sind, so müssen alle entsprechenden Strecken einander gleich sein.

Mit Hilfe der Resultate, zu welchen wir durch die Untersuchung ähnlicher Punktreihen gelangt sind, lässt sich auch folgender, für projectivische Reihen im allgemeinen geltender Satz nachweisen:

30. Ist eine Punktreihe mit einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in endlicher Entfernung liegt, projectivisch verwandt, so lassen sich diese beiden Grundgebilde stets in perspectivische Lage gegen einander bringen.

Die Punktreihe heisse R (Fig. 10), der Strahlenbüschel S, der Mittelpunkt des letzteren M, ferner seien drei beliebige Punkte der Reihe ABC und die diesen Punkten entsprechenden Strahlen des Büschels abc. — Wir betrachten nur drei Elemente der zwei in Rede stehenden Grundgebilde, da, wenn R in eine solche Lage gebracht werden kann, dass ABC beziehungsweise in die Strahlen abc fallen, nach Satz 12 folgt, dass für diese Lage alle Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Reihe gehen. —

(Fig. 10.)

Aus folgender Construction ergibt sich der Beweis für obigen Satz.

Man trägt von M aus auf dem Strahle b, der jenem Punkte B entspricht, welcher durch die beiden anderen Punkte A und C vom unendlich fernen Punkte getrennt ist, die Strecken $AB = \alpha\beta$ und $AC = \alpha\gamma$ auf, zieht aus γ eine Parallele zum Strahle a, welche den Strahl c im Punkte C_1 schneidet, und verbindet C_1 mit β. Die Durchschnittspunkte von $C_1\beta$ mit a und b nennen wir A_1 und B_1. Macht man nun die Strecke A_1m der Geraden A_1C_1 gleich AB, zieht aus m eine Parallele zu a, welche b im Punkte B trifft und schneidet endlich den Büschel S durch eine Gerade, welche durch B geht und parallel zu A_1C_1 ist, so muss der Schnitt eine der Reihe R congruente Punktreihe bilden.

Denkt man sich nämlich durch β eine Parallele zu a gezogen, so bildet dieselbe mit den Geraden a und γC_1 einen Parallel-Strahlenbüschel, welcher durch die beiden Geraden b und A_1C_1 geschnitten erscheint; es sind somit die Punktreihen $A_1B_1C_1$ und $\alpha\beta\gamma$ ähnlich. Da aber letztere Reihe der gegebenen Reihe R congruent ist, so muss $A_1B_1C_1$ auch dieser letzteren ähnlich sein. Würde demnach der Büschel S durch irgend eine zu A_1C_1 parallele Gerade geschnitten, so wäre die entstehende Punktreihe der Reihe R ähnlich; es handelt sich also nur mehr darum, jene zu A_1C_1 parallele Gerade aufzufinden, deren Schnitt mit S nicht bloss eine zur Reihe R ähnliche, sondern mit ihr congruente Reihe liefert. Der letzteren Bedingung entspricht nun offenbar die Gerade AC, denn die Reihe, in welcher AC den Büschel schneidet, muss nach Satz 28 mit R congruent sein. — Würde man abc über M hinaus verlängern und auf den Verlängerungen dieselbe Construction durchführen, welche eben erklärt worden ist, so bekäme man eine zweite mit R congruente Reihe als Schnitt des Büschels S, wir können also behaupten, dass die Reihe R sich auf zwei verschiedene

Arten gegen S in perspectivische Lage bringen lässt. Wie leicht einzusehen, müssen die in beiden Fällen sich ergebenden Reihen zu einander parallel sein.

Dass die Reihe R und der Büschel S im allgemeinen nur auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden können, geht aus folgenden Betrachtungen hervor.

Nennen wir die Reihe R, wenn sie mit S in der erklärten Weise auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht wurde, R_1 und R_2 und ist R_3 noch eine dritte mit R congruente Reihe, welche gegen S perspectivisch liegt, so müssen die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten der Reihen R_1 und R_3 oder R_2 und R_3 den Strahlenbüschel S bilden. Wäre R_1 jene Reihe deren Punkte auf denselben Halbstrahlen liegen, wie die Punkte der Reihe R_3, so lässt sich leicht zeigen, dass die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten dieser Reihen zufolge ihrer perspectivischen Lage und da sie congruent sein sollen, zu einander parallel würden, was der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt von S in endlicher Entfernung gelegen sei, widerspräche. Nimmt man an R_2 soll ein Schnitt derselben Halbstrahlen sein, welche R schneidet, so gelangt man zu einem analogen Resultate. Da nun weder die Halbstrahlen in denen R_1 liegt, noch jene, welche R_2 enthalten, durch ausserhalb R_1 oder R_2 gelegene Gerade nach Reihen geschnitten werden können, welche mit R congruent sind, so gibt es überhaupt nur zwei mit R congruente Schnitte des Büschels S.

Ist S ein Parallel-Strahlenbüschel, so kann R mit S, wie leicht einzusehen, nicht immer in perspectivische Lage gebracht werden. Nur wenn die geradlinigen Schnitte von S Reihen bilden, welche der Reihe R ähnlich sind, ist dies möglich. Es gibt dann zwei verschiedene Richtungen, nach welchen S in Reihen geschnitten werden kann, die mit R congruent sind. Letztere Reihe lässt sich daher in diesem Falle auf unendlich viele verschiedene Arten gegen S in perspectivische Lage bringen. Dass die beiden erwähnten Richtungen mit den Strahlen des Büschels gleiche Winkel bilden, bedarf wohl keines Beweises. —

Aehnliche Strahlenbüschel kann man solche projectivische Büschel nennen, deren unendlich entfernt liegende Elemente einander entsprechen. Da in einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in endlicher Entfernung gelegen ist, kein unendlich ferner Strahl vorkommt, so können ähnliche Strahlenbüschel nur Parallelbüschel sein.

31. Schneidet man zwei ähnliche Parallel-Strahlenbüschel durch je eine beliebige Gerade, so sind die dadurch entstehenden Punktreihen ähnlich.

Dieser Satz findet seine Begründung darin, dass nachdem die unendlich fernen Strahlen der beiden Büschel sich entsprechen, auch die in ihnen gelegenen Schnittpunkte entsprecheude Punkte sein müssen, wodurch eben die Aehnlichkeit der zwei Punktreihen bedingt ist.

Zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte in endlicher Entfernung liegen, werden **gleiche** oder **congruente** Büschel genannt, wenn je zwei einander entsprechende Winkel derselben gleich sind. Zwei Parallelstrahlenbüschel nennt man congruent, wenn der Abstand von je zwei Strahlen des einen Büschels dem Abstande der entsprechenden Strahlen des andern Büschels gleich ist. Dass zwei congruente Büschel immer auch projectivisch verwandt sein müssen, ist selbstverständlich.

Liegen zwei congruente Strahlenbüschel, welche keine Parallelbüschel sind, perspectivisch, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Entweder sind je zwei entsprechende Strahlen zu einander parallel, oder sie schneiden sich in eigentlichen Punkten. Im ersteren Falle liegt der Durchschnitt, beider Reihen in unendlicher Entfernung, im letzteren ist er eine Punktreihe, deren Träger auf dem gemeinsamen Strahle beider Büschel senkrecht steht und von den Mittelpunkten gleiche Abstände besitzt. (Fig. 11). Diese beiden Fälle sind wesentlich dadurch von einander verschieden, dass in jenem, wo der Schnitt sich in unendlicher Entfernung ergibt, die Strahlen des einen Büschels in demselben Sinne aufeinander folgen, wie die entsprechenden Strahlen des anderen, während in dem Falle, wo der Schnitt eine in endlicher Entfernung gelegene Reihe ist, diese Aufeinanderfolge im entgegengesetzten Sinne stattfindet.

(Fig. 11.)

32. **Kommen in zwei projectivischen Strahlenbüscheln drei Paare entsprechender Strahlen** aa_1, bb_1 **und** cc_1 **vor, welche so gelegen sind, dass** $\measuredangle\, ab = a_1b_1$, $\measuredangle\, ac = a_1c_1$ **und** $\measuredangle\, bc = b_1c_1$ **ist, so müssen die beiden Büschel congruent sein.**

Denn sind S und S_1 die beiden Büschel und bringt man den Büschel S_1 in solche Lage, dass $a_1b_1c_1$ mit abc zusammenfallen, so haben S und S_1 drei entsprechende Elemente, folglich nach Satz 10 alle ihre entsprechenden Elemente gemein. Nachdem es nun möglich ist, die Büschel S und S_1 in solche Lage zu bringen, dass alle entsprechenden Strahlen derselben coincidiren, so müssen sie congruent sein.

c) Harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Eine aus vier Punkten bestehende Punktreihe, bei welcher das Doppelverhältniss dieser vier Punkte gleich der negativen Einheit ist, wird eine **harmo-**

nische Punktreihe genannt. Sind also $ABCD$ die Punkte einer solchen Reihe, so besteht die Gleichung

$$(ABCD) = -1$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1,$$

welches Doppelverhältniss auch ein harmonisches genannt wird. *)

Denkt man sich A und B als Fixpunkte, durch deren Abstände von C und D diese letzteren Punkte auf der Geraden AB bestimmt erscheinen, so ist leicht einzusehen, dass C und D weder zugleich innerhalb, noch zugleich ausserhalb der Strecke AB liegen können, denn in beiden Fällen wären die Verhältnisse $\frac{AC}{BC}$ und $\frac{AD}{BD}$ gleich bezeichnet, und das Doppelverhältniss müsste daher positiv sein. Daraus folgt, dass wenn C zwischen A und B gelegen ist, D sich ausserhalb dieser zwei Punkte befindet und wenn C ausserhalb liegt, D zwischen A und B gelegen sein muss. Es werden demnach die Punkte A und B in jedem Falle durch C und D getrennt. Aus diesem Grunde und mit Rücksicht auf das harmonische Doppelverhältniss sagt man A und B seien durch C und D harmonisch getrennt.

Die Punkte A und B, sowie C und D werden einander harmonisch zugeordnete oder harmonisch conjugirte Punkte genannt.

Obige Gleichung lässt sich auch schreiben

$$AC : CB = AD : BD,$$

aus welcher Proportion zu ersehen ist, dass der Punkt C die Strecke AB in demselben Verhältnisse theilt, wie sie vom Punkte D getheilt wird. Wenn auch C oder D ausserhalb der Strecke AB liegt, so kann man doch von einer Theilung dieser Strecke durch den ausserhalb befindlichen Punkt sprechen, wenn man Theile einer Strecke im allgemeinen die Abstände des theilenden Punktes von den Endpunkten der getheilten Strecke nennt. Man sagt daher auch bezüglich einer aus den Punkten $ACBD$ bestehenden harmonischen Reihe, bei welcher diese Punkte in derselben Ordnung aufeinanderfolgen, wie sie eben angeführt worden sind, dass die Strecke AB durch die Punkte C und D harmonisch getheilt ist. Da sich aus obiger Proportion folgende ergibt:

$$AC : AD = CB : BD,$$

welche zeigt, dass die Strecke CD durch die Punkte A und B ebenfalls in gleichem Verhältnisse getheilt wird, so kann man sagen: Die Strecke AB

*) Würde das Doppelverhältniss $(ABCD) = 1$ angenommen, so wäre $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, woraus folgen würde, dass die Punkte C und D zusammenfallen; man hätte also eigentlich nur drei Punkte, welche Anzahl im allgemeinen nur zur Bildung eines einfachen Verhältnisses hinreicht.



wird durch die Punkte C, D und die Strecke CD durch die Punkte A, B harmonisch getheilt.

Werden die Punkte $ABCD$ einer harmonischen Reihe mit irgend einem ausserhalb des Trägers der letzteren befindlichen Punkte verbunden, so bilden diese vier Verbindungslinien $abcd$ einen harmonischen Strahlenbüschel, für welchen, da

$$(ABCD) = (abcd)$$

ist, das Doppelverhältniss besteht:

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = -1.$$

Demzufolge ist jeder projicirende Büschel einer harmonischen Punktreihe ebenfalls harmonisch.

Wie leicht einzusehen, sind die Strahlen ab durch die Strahlen cd getrennt und umgekehrt, nachdem auch, wie bereits gezeigt wurde, die Punkte AB durch CD sowie CD durch AB getrennt werden; man sagt daher mit Rücksicht auf das harmonische Doppelverhältniss: die Strahlen a, b sind durch die Strahlen c, d, sowie auch die Strahlen c, d durch a, b harmonisch getrennt.

Die Strahlen a und b, sowie c und d werden einander harmonisch zugeordnete oder harmonisch conjugirte Strahlen genannt.

Zwei gleichartige oder ungleichartige der in Rede stehenden beiden Grundgebilde sind immer projectivisch verwandt, wenn sie harmonisch sind, nachdem die Doppelverhältnisse der Elemente, aus welchen solche Gebilde bestehen, alle gleich der negativen Einheit, also auch unter sich gleich sein müssen. Es gelten somit für harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel alle jene Sätze, welche für projectivische Grundgebilde im allgemeinen bisher aufgestellt wurden.*)

Wir wollen nun untersuchen, welche Lagen der Punkt D erhalten kann, wenn man A und B als unveränderlich annimmt, während C sich vom Punkte A gegen B hin bewegt. Die Gleichung

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \quad \ldots\ldots \alpha$$

gibt hierüber Aufschluss.

Der Punkt D ist seiner Lage nach durch die Punkte ABC vollkommen bestimmt. Denn der Werth des Verhältnisses $\frac{AC}{CB}$ erscheint gegeben, sobald die Punkte ABC ihrer Lage nach fixirt sind, es ist somit auch der Werth des den

*) Hat der Werth eines Doppelverhältnisses irgend eine beliebige Grösse, so nennt man dieses Verhältniss im allgemeinen (nach Chasles) auch ein anharmonisches. Die Ausdrücke „Doppelverhältniss“ und „anharmonisches Verhältniss“ sind demnach im allgemeinen gleichbedeutend.

Punkt D unzweideutig bestimmenden Verhältnisses $\frac{AD}{BD}$ bekannt, nachdem letzteres dem Verhältnisse $\frac{AC}{CB}$ gleich sein muss

Fällt C mit dem Punkte A zusammen, so wird AC, also auch AD gleich Null; der Punkt D coincidirt daher mit den Punkten A und C.

33. Befindet sich C im Halbirungspunkte der Strecke AB, so liegt der dem Punkte C harmonisch zugeordnete Punkt D in unendlicher Entfernung und umgekehrt, wenn D unendlich ferne liegt, so halbirt C die Strecke AB. Es ist nämlich dann $AC = CB$ also auch $AD = BD$, welch letztere Gleichung nur erfüllt werden kann, wenn D mit dem unendlich fernen Punkte zusammenfällt; denn für jeden in endlicher Entfernung gelegenen Punkt D würde AD grösser oder kleiner als BD.

Der Punkt D rückt also von A auf der über letzteren Punkt hinausreichenden Verlängerung der Strecke AB gegen den unendlich fernen Punkt hin, während sich C vom Punkte A gegen den Halbirungspunkt von AB bewegt.

Hat C den genannten Halbirungspunkt überschritten, so wird AC grösser als CB; es muss also auch AD immer grösser als BD werden, d. h. der Punkt D befindet sich dann stets auf der über B hinausreichenden Verlängerung der Strecke AB.

Je näher C an B gelegen ist, desto kleiner wird auch der Abstand des Punktes D von B, bis endlich, wenn C mit B coincidirt, auch D mit B zusammenfällt.

Bezeichnet man den Halbirungspunkt der Strecke AB durch M, so folgt aus der Gleichung α, da $AC = AM + MC$, $CB = MB - MC$, $AD = AM + MD$ und $BD = MD - MB$ ist:

$$\frac{AM + MC}{MB - MC} = \frac{AM + MD}{MD - MB}.$$

Durch Reduction dieser Gleichung und wenn man statt MB den gleichen Werth AM setzt, ergibt sich

$$AM^2 = MC \,.\, MD \ldots\ldots \beta.$$

Es ist somit AM die mittlere geometrische Proportionale zwischen MC und MD.

Eine andere bemerkenswerthe Beziehung zwischen den auf harmonischen Punktreihen sich ergebenden Strecken kann aus der Gleichung α nachgewiesen werden, wenn man $CB = AB - AC$ und $BD = AD - AB$ setzt. Es ist dann

$$\frac{AB - AC}{AC} = \frac{AD - AB}{AD}$$

oder

$$-1+\frac{AB}{AC}=1-\frac{AB}{AD}$$

woraus folgt:

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD} \; \ldots \; \gamma$$

AB heisst dieser besondern Beziehung wegen das harmonische Mittel der Strecken AC und AD.

Bezüglich harmonischer Strahlenbüschel lassen sich Gleichungen ableiten, welche den für harmonische Punktreihen aufgestellten α, β, γ analog sind.

Dass für jeden harmonischen Büschel

$$\frac{\sin ac}{\sin cb}=\frac{\sin ad}{\sin bd} \; \ldots \; \alpha_1$$

ist, wenn durch $abcd$ dessen Strahlen bezeichnet werden, folgt unmittelbar aus der Definition solcher Büschel. Die genannten Strahlen folgen in der Ordnung $acbd$ aufeinander.

Ist m jener Strahl, welcher den Winkel ab halbirt, so hat man $ac=am+$ $+mc$, $cb=mb-mc$, $ad=am+md$, $bd=md-mb$. Werden diese Werthe in die Gleichung α_1 gesetzt, so ergibt sich nach einigen Reductionen:

$$\text{tg. } am^2=\text{tg. } mc \,.\, \text{tg. } md \; \ldots \; \beta_1$$

Da ferner $cb=-(ab-ac)$ und $bd=ad-ab$ ist, so erhält man aus α:

$$-\frac{\sin(ab-ac)}{\sin ac}=\frac{\sin(ad-ab)}{\sin ad}$$

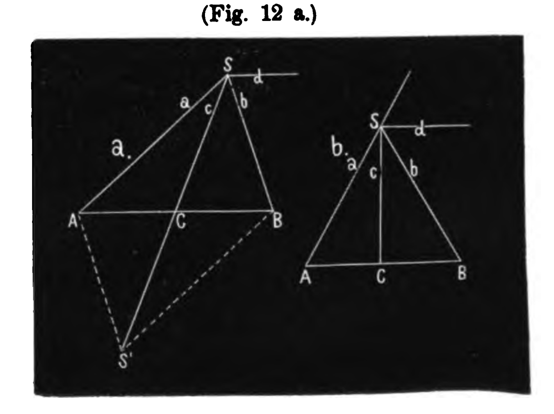
und durch Reduction dieser Gleichung:

$$\frac{2}{\text{tg } ab}=\frac{1}{\text{tg } ac}+\frac{1}{\text{tg } ad} \; \ldots \; \gamma_1.$$

Mit Hilfe des Satzes 33 lässt sich der folgende leicht begründen:

34. Halbirt man in einem beliebigen Dreiecke ABS (Fig. 12 a.) eine Seite AB im Punkte C, verbindet S mit C und zieht aus S eine Parallele zur Seite AB, so bilden die vier im Punkte S sich schneidenden Geraden, welche durch diese Construction erhalten werden, einen harmonischen Strahlenbüschel.

(Fig. 12 a.)



Die Punkte ACB und der unendlich entfernte Punkt der Geraden AB bilden nämlich eine harmonische Punktreihe.

Nachdem nun die vier in S sich schneidenden Geraden AS, CS, BS und die zu AB gezogene Parallele durch die genannten vier Punkte gehen, so müssen diese vier Geraden, welche wir beziehungsweise a, c, b, d nennen wollen, einen ebenfalls harmonischen Strahlenbüschel bilden.

Ist das Dreieck ein gleichschenkeliges, bei welchem die Seiten AS und BS gleich sind (Fig, 12 b.), so steht die Gerade CS auf der Grundlinie AB des Dreieckes senkrecht und halbirt den Winkel ASB. Die Strahlen c und d bilden somit in diesem Falle einen rechten Winkel und wie leicht einzusehen, halbirt jeder derselben den Winkel jener Strahlen (a und b), durch welche er vom andern getrennt ist. Wir schliessen daraus, nachdem die Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreieckes jede beliebige Grösse haben kann:

35. Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel werden durch die Schenkel dieser Winkel harmonisch getrennt.

Dass die Halbirungslinien auf einander senkrecht stehen, ist bekannt.

Zieht man in Figur 12 a. durch den Punkt A eine Parallele zu BS und durch B eine Parallele zu AS, und nennt man den Durchschnittspunkt dieser beiden Parallelen S', so ist die Figur $ASBS'$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen AB und SS' sich im Punkte C halbiren. Der Strahlenbüschel $acbd$ steht nun in folgender Beziehung zu diesem Parallelogramme. Zwei Strahlen a und b des Büschels werden durch die in S sich schneidenden Seiten gebildet, ein dritter Strahl c ist die von S ausgehende Diagonale und der vierte Strahl d ist parallel zur zweiten Diagonale AB. Da nun die Massverhältnisse des Parallelogrammes ganz beliebige sind, insoferne als auch das Dreieck ASB willkürlich gewählt werden konnte, so folgt, dass wenn man von einem Eckpunkte S eines beliebigen Parallelogrammes zu jener Diagonale, welche nicht durch S geht, eine Parallele zieht, diese Parallele, die in S sich schneidenden Seiten des Parallelogrammes und die durch S gehende Diagonale einen harmonischen Strahlenbüschel bilden.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen ergibt sich nun auch folgender Satz:

36. Wird ein harmonischer Strahlenbüschel durch eine Gerade geschnitten, welche parallel zu einem der Strahlen dieses Büschels ist, so sind die in den drei übrigen Strahlen befindlichen Schnittpunkte von einander gleich weit entfernt.

Um zu drei gegebenen Punkten einen vierten zu finden, welcher mit den drei ersteren eine harmonische Punktreihe bildet, können verschiedene mehr oder weniger einfache Constructionen angewendet werden.

Sind bloss drei Punkte ohne weitere Angabe gegeben, so entsprechen drei Punkte der gestellten Anforderung, denn der gesuchte Punkt kann einem jeden der drei Punkte harmonisch zugeordnet sein.

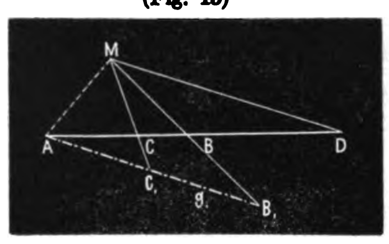
Um jeder Unbestimmtheit vorzubeugen nehmen wir an, die Aufeinanderfolge aller vier Punkte der zu construirenden Reihe sei stets $ACBD$.

Sind ACB (Fig. 13.) gegeben und wäre D constructiv zu bestimmen, so kann man in folgender Weise verfahren. Man zieht durch A eine beliebige Gerade g, wählt in derselben zwei Punkte C_1 und B_1, welche so liegen, dass

$$AC_1 = C_1 B_1$$

wird, verbindet C mit C_1, B mit B_1 und zieht aus dem Schnittpunkte M der Verbindungslinien CC_1, BB_1 eine parallele Gerade zu g. Der Durchschnittspunkt dieser Parallelen mit AB ist dann der gesuchte Punkt D. — Die Geraden MA, MC, MB, MD bilden nämlich einen harmonischen Strahlenbüschel, denn dieser Büschel ist der Schein jener harmonischen Punktreihe, welche aus den Punkten AC_1B_1 und dem unendlich fernen Punkte von g besteht (Satz 33); daher schneidet die Gerade AB den genannten Büschel in einer harmonischen Reihe $ACBD$.

(Fig. 13)



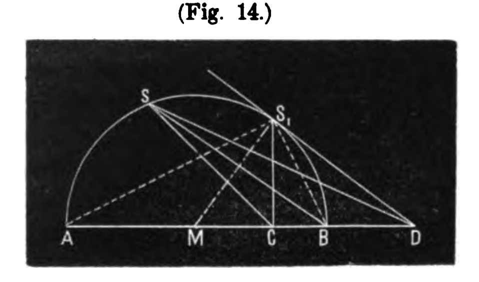
Soll etwa B ermittelt werden, vorausgesetzt, dass ACD gegeben sind, so zieht man durch D eine Parallele zu g, nimmt in g zwei Punkte C_1 und B_1 an, welche so liegen, dass $AC_1 = C_1B_1$ wird und verbindet den Schnittpunkt M der Geraden CC_1 und der aus D gezogenen Parallelen mit dem Punkte B_1. Der Durchschnittspunkt von MB_1 mit AD ist dann, wie leicht einzusehen, der gesuchte Punkt B.

Sind andere drei Punkte gegeben, so kann der vierte Punkt auf analoge Weise gefunden werden. Es dürfte daher nicht nothwendig erscheinen weiteres darüber zu bemerken.

Eine andere, sehr einfache Lösung der Aufgabe, zu drei gegebenen Punkten etwa ABD einer harmonischen Reihe den vierten Punkt zu finden, ist folgende:

Man beschreibt über die Punkte AB (Fig. 14.) einen Halbkreis, verbindet B und D mit einem beliebigen Punkte S der Peripherie dieses Halbkreises und construirt eine durch S gehende Gerade CS, welche mit BS den gleichen Winkel einschliesst, den DS mit BS bildet. Der Durchschnittspunkt von CS mit AD ist dann der gesuchte Punkt.

(Fig. 14.)



Um dies nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, dass die vier in S sich schneidenden Geraden AS, CS, BS und DS einen harmonischen Strahlenbüschel bilden. Nach Satz 35 muss letzteres der Fall sein, den BS halbirt den Winkel CSD und die auf BS senkrecht stehende Gerade AS halbirt den Nebenwinkel von CSD. Da nun die Reihe

$ACBD$ ein Schnitt des harmonischen Büschels ist, so muss sie selbst harmonisch sein.

Wären die Punkte ACB gegeben, so kann man zur Bestimmung des vierten Punktes D fast ganz dieselbe Construction anwenden. Man beschreibt nämlich wieder über AB (Fig. 14) einen Halbkreis, verbindet B und C mit einem beliebigen Punkte S der Peripherie dieses Halbkreises und construirt eine Gerade DS, welche den gleichen Winkel mit BS einschliesst, den die Geraden CS und BS bilden. Der Durchschnittspunkt von DS mit der verlängerten AB ist dann der gesuchte Punkt, wie sich mit Hilfe des Satzes 35 leicht beweisen lässt.

Sind etwa die Punkte ACD gegeben, so kann B durch dieselbe Construction ermittelt werden, welche in dem Falle, wenn ABD gegeben waren, zum Ziele führte. Der Halbkreis ist dann selbstverständlich über BD zu beschreiben. —

Wird in dem Falle wenn ACB gegeben sind, im Punkte C eine Senkrechte auf AB errichtet und im Durchschnittspunkte S_1 dieser Senkrechten mit dem Halbkreise eine Tangente DS_1 an den letzteren gezogen, so schneidet DS_1 die Verlängerung von AB im gesuchten Punkte D. Es lässt sich nämlich zeigen, dass der Winkel, den die Tangente mit der Geraden BS_1 bildet, gleich jenem sein muss, welcher von BS und der Senkrechten CS eingeschlossen wird. Daraus folgt dann, dass $ACBD$ eine harmonische Punktreihe ist. Der Beweis für die Gleichheit der genannten zwei Winkel kann in nachstehender Weise gegeben werden. Den Mittelpunkt des Halbkreises nennen wir M und denken uns denselben mit S_1 verbunden. Die Winkel AS_1B und MS_1D sind einander gleich, weil sie beide rechte sind; zieht man von jedem derselben den Winkel MS_1B ab, so bleibt $AS_1M = BS_1D$. Nachdem nun $AS_1M = MAS_1 = BS_1C$ ist, so hat man $BS_1C = BS_1D$.

Aus dieser Construction des Punktes D ergibt sich auch, dass wenn AB und D gegeben sind, der Punkt C erhalten werden kann, indem man aus D an den über AB beschriebenen Halbkreis eine Tangente zieht und vom Berührungspunkte der letzteren eine Senkrechte auf AD fällt. Der Fusspunkt dieser Senkrechten ist dann der gesuchte Punkt C.

Ein Vergleich der Formel β mit Figur 14 zeigt, dass erstere auch mit Zuhilfenahme dieser Figur hätte abgeleitet werden können.

Der vierte Punkt einer harmonischen Reihe lässt sich auch auf folgende Weise durch alleinige Benützung des Lineales bestimmen.

Sind ACB (Fig. 15) gegeben, so zieht man aus A zwei beliebige von AB verschiedene Gerade, schneidet dieselben durch eine aus C willkürlich gezogene dritte Gerade und verbindet die erhaltenen Schnittpunkte E und G mit B. Der Schnittpunkt F der Linie BE mit AG und jener H der Linie BG mit AE werden endlich durch eine Gerade verbunden. Letztere Gerade schneidet dann AB in dem gesuchten Punkte D. Die Punktreihen $ACBD$ und $HJFD$, wenn J den Schnittpunkt von EG und HF bezeichnet, können nämlich als Schnitte des Strahlenbüschels betrachtet werden, dessen Mittelpunkt E ist,

daher hat man

$$(ACBD) = (HJFD).$$

Dieselben Punktreihen kann man aber auch als Schnitte jenes Büschels ansehen, der seinen Mittelpunkt in G hat, folglich ist

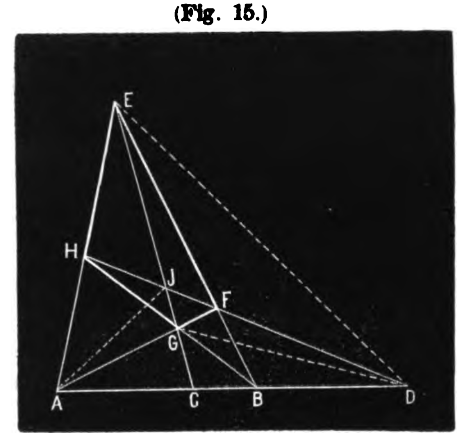
$$(HJFD) = (BCAD).$$

woraus sich mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung ergibt;

$$(ACBD) = (BCAD)$$

oder $\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD}.$

(Fig. 15.)



Setzt man $BA = -AB$ und reducirt letzteren Ausdruck, so wird

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1,$$

somit ist die Reihe $ACBD$ eine harmonische.

Wie man den vierten Punkt nach der letzteren Methode bestimmt, wenn etwa A, B, D gegeben wären, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung. Dieselbe Anordnung von Linien, welche benützt wurden, um D zu ermitteln, führt in diesem Falle auch zum Ziele.

Aus der zuletzt erklärten Construction lässt sich nun ein wichtiger Satz folgern.

Die Figur $EFGH$ ist ein Viereck, welches wir uns ganz beliebig gewählt denken können. In demselben sind die Diagonalen EG und FH gezogen und die Durchschnittspunkte A und B von je zwei gegenüberliegenden Seiten erscheinen durch eine Gerade verbunden. Die Durchschnittspunkte C und D der genannten Diagonalen mit letzterer Verbindungslinie bilden mit A und B eine harmonische Punktreihe und der Schnittpunkt J der beiden Diagonalen ist so gelegen, dass die Reihen $HJFD$ und $EJGC$ harmonisch sind. Dass auch letztere Reihe eine harmonische sein muss, folgt daraus, weil sie ein Schnitt des harmonischen Strahlenbüschels AH, AJ, AF, AD ist.

Bevor wir den hierauf bezüglichen Satz aufstellen, ist es nothwendig einige Erklärungen vorauszuschicken.

Vier in derselben Ebene liegende Gerade, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, bilden der Auffassung der neueren Geometrie gemäss Seiten eines vollständigen Vierseits, wenn alle sechs Durchschnittspunkte dieser vier Seiten als Ecken des Vierseits betrachtet werden. Drei Paare von Ecken heissen gegenüberliegende Ecken, nämlich je zwei, welche nicht in ein und derselben Seite liegen, und jede Verbindungslinie zweier gegenüberliegender Ecken heisst eine Diagonale. Ein vollständiges Vierseit hat

also drei Diagonalen. — In Fig. 15 sind *EG*, *HF*, und *AB* die drei Paare gegenüberliegender Ecken des vollständigen Vierseits, dessen Ecken die Punkte *EFGHAB* bilden, und *EG*, *HF*, *AB* sind die drei Diagonalen. — Jedes vollständige Vierseit umfasst drei einfache Vierseite. Ein einfaches Vierseit hat nämlich nur vier Eckpunkte und ist gleichbedeutend mit einem einfachen Vierecke. Das vollständige Vierseit der Fig. 15 enthält z. B. die einfachen Vierecke *EFGH*, *AEBG*, und *AHBF*.

Vier in derselben Ebene liegende Punkte, von denen keine drei derselben Geraden angehören, bilden die Ecken eines vollständigen Viereckes, wenn alle sechs Verbindungslinien dieser vier Punkte als Seiten des Viereckes betrachtet werden. Drei Paare von Seiten heissen gegenüberliegende Seiten, nämlich je zwei, welche nicht durch ein und denselben Eckpunkt gehen, und jeder Durchschnittspunkt zweier gegenüberliegender Seiten heisst ein Diagonalpunkt. Ein vollständiges Viereck hat also drei Diaganalpunkte. — In Fig. 15 sind *A*, *B* und *J* die drei Diagonalpunkte des vollständigen Viereckes *EFGH*. — Jedes vollständige Viereck umfasst drei einfache Vierecke; so z. B. enthält das vollständige Viereck *EFGH* der Fig. 15 die ein achen Vierecke *EFGH*, *AEBG* und *AHBF*.

Mit Rücksicht auf diese Erklärungen können wir nun behaupten:

37. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen Diagonalen harmonisch getheilt.

Die Diagonale *AB* wird nämlich durch die Punkte *C* und *D*, die Diagonale *FH* durch *J* und *D* und endlich die Diagonale *EG* durch *C* und *J* harmonisch getheilt.

Um zu drei gegebenen Strahlen *acb* eines harmonischen Büschels den vierten zu finden, könnte man irgend eine Gerade ziehen, welche *acb* in den Punkten *ACB* schneidet; zu diesen Punkten wäre dann der Punkt *D* zu bestimmen, welcher mit *ACB* eine harmonische Punktreihe bildet, und endlich hätte man *D* mit dem Mittelpunkte des zu construirenden Büschels zu verbinden. Letztere Verbindungslinie wäre offenbar der gesuchte Strahl. Indess kann *d* auf einfachere Weise mit Hilfe eines Parallelogrammes wie folgt ermittelt werden.

Man wählt im Strahle *c*, welcher dem zu suchenden Strahle harmonisch zugeordnet ist, einen beliebigen Punkt *S'* (Fig. 12. *a*), zieht aus *S'* eine Parallele zu *a* und eine Parallele zu *b*, welche beziehungsweise *b* und *a* in den Punkten *B* und *A* schneiden und zieht endlich aus dem Mittelpunkte *S* des Büschels eine Parallele *d* zur Verbindungslinie der Punkte *A* und *B*.

Der Beweis für diese Construction folgt aus dem Umstande, dass die Gerade *AB* vom Strahle *c* im Punkte *C* halbirt wird. Die Punkte *ACB* und der unendlich ferne Punkt in *AB* bilden aus diesem Grunde eine harmonische Reihe, gegen welche der gewünschte Strahlenbüschel perspectivisch liegt.

Wären die Strahlen *abd* gegeben, so müsste *S'* in *d*, also wieder in jenem Strahle angenommen werden, der dem zu bestimmenden harmonisch zugeordnet

ist. — Die weitere Construction für diesen Fall ist derjenigen des vorhergehenden Falles vollkommen analog.

d) Conjectivische Punktreihen und concentrische Strahlenbüschel.

Liegen zwei projectivische Punktreihen auf ein und derselben Geraden, so nennt man sie conjectivisch liegende oder kurz conjectivische Punktreihen. Die conjectivische Lage ist demnach ein specieller Fall der schiefen. Solche Reihen können z. B. dadurch erhalten werden, dass man zwei projectivische Strahlenbüschel, welche sich in derselben Ebene befinden, durch ein und dieselbe beliebige Gerade schneidet. Denn die zwei sich als Schnitte ergebenden Punktreihen sind, der projectivischen Verwandtschaft der Büschel wegen, selbst projectivisch und da sie sich auf derselben Geraden befinden, so liegen sie conjectivisch.

Sind R und R_1 zwei beliebige projectivische Punktreihen und bewegt sich ein Punkt A stetig so fort, dass er allmälig mit allen Punkten von R zusammenfällt, so kann man sich vorstellen, dass jene Punkte in R_1, welche dem Punkte A bei seinen verschiedenen Lagen entsprechen, einzelne Lagen eines sich ebenfalls stetig fortbewegenden Punktes A_1 bilden. Wir haben dies bereits aus dem Satze 17 gefolgert. Um sich noch in anderer Weise zu überzeugen, dass die Bewegung von A_1 auch eine stetige ist, braucht man nur daran zu denken, dass R und R_1 sich immer in perspectivische Lage bringen lassen und dass für diese Lage beide Reihen Schnitte desselben Strahlenbüschels sind. Wird ein Strahl a dieses Büschels um den Mittelpunkt des letzteren gedreht, so schneidet er in jeder seiner Lagen die Träger von R und R_1 in einem Paare entsprechender Punkte. Die in R gelegenen Schnittpunkte können als einzelne Lagen des Punktes A, die in R_1 befindlichen als einzelne Lagen des Punktes A_1 angesehen werden. Ist die Bewegung des Strahles a eine stetige, so ist auch die Bewegung des Punktes A, und, wie nun leicht einzusehen, jene von A_1 ebenfalls stetig. —

Liegen R und R_1 conjectivisch, so gilt offenbar dasselbe.

Für conjectivische Reihen kann man bezüglich der Bewegung der beiden sich entsprechenden Punkte A und A_1 zwei Fälle unterscheiden. Entweder bewegen sich beide Punkte in demselben Sinne (etwa von rechts nach links) oder sie bewegen sich in entgegengesetztem Sinne (der eine nach rechts, der andere nach links).

Im ersteren Falle werden die beiden Reihen einstimmig verlaufende im zweiten entgegengesetzt verlaufende conjectivische Reihen genannt. *)

Wenn ein Punkt der Geraden, auf welcher sich zwei conjectivische Reihen befinden, zwei einander entsprechende Punkte in sich vereinigt, so heisst er ein

*) Steiner und A. gebrauchen die Ausdrücke „gleichliegend" und „ungleichliegend."

Doppelpunkt oder **Hauptpunkt** oder auch **Ordnungspunkt.** Solche Punkte liegen demnach so, dass die zwei conjectivischen Reihen dieselben entsprechend gemein haben. Stellt man sich die Punkte beider Reihen als einzelne Positionen sich bewegender entsprechender Punkte A und A_1 vor, so kann man auch sagen: Doppelpunkte sind jene, in welchem A und A_1 zusammentreffen. Ob es überhaupt solche Punkte gibt, wie viele unter gewissen Voraussetzungen in zwei conjectivischen Reihen enthalten sind und wie dieselben bestimmt werden können, wollen wir nun untersuchen.

Dass im allgemeinen nicht mehr als zwei Doppelpunkte vorhanden sein können, es mögen die conjectivischen Reihen einstimmig oder entgegengesetzt verlaufen, ist klar. Denn würden solche Reihen drei Paare von Punkten entsprechend gemein haben, was dann der Fall wäre, wenn in ihnen drei Doppelpunkte vorkämen, so müssten sie alle ihre Punkte entsprechend gemein haben (Satz 10). Man hätte also unter der gemachten Voraussetzung nicht nur drei, sondern unendlich viele Doppelpunkte; die beiden Reihen wären congruent und alle einander entsprechenden Punkte derselben würden coincidiren.

Wir wollen nun zuerst entgegengesetzt verlaufende conjectivische Reihen bezüglich des Vorhandenseins von Doppelpunkten in Betracht ziehen.

Zwei conjectivische Reihen R und R_1 werden im allgemeinen durch folgendes Schema repräsentirt:

U .... G .... G' .... U'

In demselben bedeuten U und U' den unendlich entfernten Punkt des Trägers beider Reihen und G, G' die beziehungsweise in R und R_1 gelegenen Gegenpunkte. Stellen wir uns nun vor, ein Punkt A bewege sich auf der Reihe R stetig fort, während der ihm entsprechende A_1, in entgegengesetztem Sinne sich bewegend auf der Reihe R_1 fortschreitet. Nimmt man an, der Punkt A befinde sich in G, so fällt, der Definition des Gegenpunktes zufolge, A_1 mit U oder U' zusammen. Bewegt sich nun A von G aus gegen U hin, so kommt der Punkt A_1 demselben von U aus entgegen. Die beiden Punkte müssen sich also irgendwo zwischen U und G, etwa im Punkt D begegnen. Es liegt demnach jedenfalls auf der Strecke GU ein Doppelpunkt D. — Durch folgendes Schema mögen diese und die noch zu erklärenden Beziehungen veranschaulicht werden:

A_1 D A
U .... G .... G' .... U'
A_1 D' A.

Ist A in U, oder was dasselbe ist, in U' angelangt, so befindet sich A_1 im Gegenpunkte G', da G' dem Punkte U' entspricht. Bei fortgesetzter Bewegung der beiden Punkte in entgegengesetztem Sinne müssen sich nun dieselben nochmals, und zwar zwischen G' und U' begegnen. Es zeigt sich also, dass auch auf der Strecke $G'U'$ ein Doppelpunkt D' vorhanden sein muss.

Würde man sich A in anderem Sinne bewegt denken, so käme man zu demselben Resultate. Schreitet nämlich A gegen U' hin fort, so bewegt sich A_1

von U' aus dem Punkte A entgegen und muss denselben irgendwo zwischen G' und U' treffen.

Innerhalb der endlichen Strecke GG' kann dieses Zusammentreffen nicht stattfinden, denn sobald A_1 in G' angelangt ist, befindet sich A schon im unendlich fernen Punkte U' und schreitet während A_1 gegen G hin rückt, von U gegen G hin fort. Ist A in G angelangt, so hat A_1 bereits den Punkt U erreicht; es ist also nicht möglich, dass A und A_1 auf der endlichen Strecke GG' sich begegnen.

Wir schliessen aus dieser Betrachtung, dass in zwei entgegengesetzt verlaufenden conjectivischen Punktreihen stets zwei ausserhalb der endlichen Strecke GG' befindliche Doppelpunkte vorhanden sein müssen.

Da bekanntlich das Product der Abstände zweier sich entsprechender Punkte von den Gegenpunkten der Reihe, in welcher sie liegen für alle einander entsprechenden Punkte constant ist (Satz 17), so hat man:

$$DG \,.\, DG' = D'G \,.\, D'G'.$$

Aus dieser Gleichung kann man schliessen, dass D' von G' eben so weit entfernt ist, als D von G. Denn wäre $D'G'$ grösser als DG, so müsste, weil D' ausserhalb der Strecke GG' liegt, auch $D'G$ grösser als DG' sein, was der obigen Gleichung widerspricht. Eben so wenig könnte angenommen werden, $D'G'$ sei kleiner als DG. Wir können also folgenden Satz aufstellen:

38. In zwei entgegengesetzt verlaufenden, conjectivischen Punktreihen gibt es immer zwei Doppelpunkte. Dieselben liegen ausserhalb der von den Gegenpunkten begrenzten endlichen Strecke und sind vom Halbirungspunkte dieser Strecke gleich weit entfernt.

Der specielle Fall, in welchem die beiden Gegenpunkte coincidiren, wird weiter unten besonders behandelt werden.

Wir gehen nun zur Betrachtung der einstimmig verlaufenden Reihen über. Zur Unterstützung der Vorstellung diene folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & & A & D & & & & & \\ U & \ldots\ldots & G & \ldots\ldots & O & \ldots\ldots & G' & \ldots\ldots & U' \\ & & & & & D' & A_1 & & A. \end{array}$$

Fällt A mit dem Punkte G zusammen, so befindet sich A_1 in unendlicher Entfernung — wir wollen voraussetzen in U. Bewegen sich nun sowohl A als A_1 gegen U' hin, so können sie nur zwischen G und G', etwa im Punkte D zusammentreffen. Denn sobald A_1 mit G' coincidirt, liegt A schon in unendlicher Entfernung und während A_1 über G' hinaus weiter fortschreitet, bewegt sich A von U ausgehend gegen G hin. — Nimmt man an, der Punkt A bewege sich von G aus gegen U hin, für welche Annahme A_1 von U' ausgehend gedacht werden muss, so können A und A_1 ebenfalls nur zwischen G und G' zusammentreffen; denn sobald A_1 in G' angelangt ist, fällt A bereits mit dem Punkte U zusammen

und erst nachdem A_1 den Punkt G' überschritten hat, rückt A von U' ausgehend gegen G fort, während welcher Periode der Bewegung beider Punkte ein Zusammentreffen möglich ist, doch nur so lange, als A den Punkt G noch nicht erreicht hat. Ist letzteres eingetreten, so befindet sich A_1 schon in U und wir haben dann wieder jene Stellung beider Punkte, von welcher wir ausgegangen sind. Aus diesen Betrachtungen folgt also, dass wenn in zwei einstimmig verlaufenden, conjectivischen Reihen Doppelpunkte vorkommen, dieselben nur innerhalb der von den Gegenpunkten begrenzten endlichen Strecke liegen können.

Wird der Halbirungspunkt der endlichen Strecke GG' durch O bezeichnet und ist ein Doppelpunkt D auf der endlichen Strecke OG vorhanden, so muss auch auf der endlichen Strecke OG' ein Doppelpunkt D' liegen, welcher von O ebenso weit entfernt ist als der Punkt D. Denn für einen Punkt D', der die bezeichnete Lage hat, besteht die Gleichung

$$DG \,.\, DG' = D'G \,.\, D'G'.$$

woraus folgt, dass D' ebenfalls ein Doppelpunkt sein muss. Wäre nämlich D' kein Doppelpunkt, würde also demselben irgend ein von D' verschiedener Punkt D_1' entsprechen, so hätte man nach Satz 17

$$DG \,.\, DG' = D'G \,.\, D_1'G'$$

welche Gleichung in Verbindung mit der vorhergehenden zeigt, dass

$$D'G' = D_1'G'$$

ist, was mit Rücksicht auf das gleiche Vorzeichen dieser zwei Strecken nur dann möglich sein kann, wenn D' mit D_1' zusammenfällt.

In dem speciellen Falle, wenn der eine Doppelpunkt mit O coincidirt, muss auch der andere in O liegen, es gibt also dann nur einen Doppelpunkt, oder es coincidiren vielmehr die beiden Doppelpunkte in diesem Falle mit O.

Dass bei einstimmig verlaufenden, conjectivischen Punktreihen nicht immer Doppelpunkte vorhanden sein müssen, geht aus folgenden Betrachtungen hervor:

Denken wir uns wieder, der Punkt A bewege sich von G aus gegen U' hin, während A_1 von U gegen G' fortrückt. Ein Zusammentreffen von A mit A_1 kann, wie bereits erklärt wurde, unter diesen Voraussetzungen nur innerhalb der endlichen Strecke GG' erfolgen; hat jedoch A bereits den Punkt G' überschritten, bevor noch A_1 in G angelangt ist, so können die beiden Punkte an keiner Stelle zusammentreffen und es gibt dann auch keine Doppelpunkte. Zu demselben Resultate würde man gelangen, wenn A (also auch A_1) im entgegengesetzten Sinne sich bewegend gedacht wird und wenn man annimmt, dass A_1 den Punkt G bereits überschritten habe, sobald A mit G' zusammenfällt. Es lässt sich somit behaupten:

39. **In zwei einstimmig verlaufenden conjectivischen Punktreihen gibt es entweder zwei Doppelpunkte, welche stets auf der von den Gegenpunkten begrenzten endlichen Strecke in gleichem Abstande vom Halbirungspunkte dieser Strecke gelegen sind,**

oder es ist nur ein Doppelpunkt vorhanden, welcher dann immer mit dem genannten Halbirungspunkte zusammenfällt, oder es kommen gar keine (reellen) Doppelpunkte vor.

Der Fall, in welchem die beiden conjectivischen Punktreihen ähnlich oder congruent sind, verdient besonders betrachtet zu werden. Aehnliche Reihen kann man sich immer dadurch entstanden denken, dass man ein und denselben Strahlenbüschel durch zwei parallele Gerade schneidet. Liegen je zwei einander entsprechende Punkte der so entstandenen Reihen in demselben Halbstrahle, so verlaufen die beiden Reihen offenbar einstimmig, liegen aber je zwei entsprechende Punkte auf verschiedenen Halbstrahlen, also auf verschiedenen Seiten vom Mittelpunkte des Büschels aus betrachtet, so verlaufen die Reihen in entgegengesetzter Richtung. — Man kann hier eine gleiche und entgegengesetzte Richtung des Verlaufens unterscheiden, wenn auch die beiden Reihen nicht conjectivisch liegen, da ihre Träger parallel sind. — Denkt man sich nun eine der Reihen nach irgend einer Richtung parallel zu sich selbst verschoben, bis ihr Träger mit jenem der andern zusammenfällt, so ergeben sich schliesslich zwei conjectivische, ähnliche Punktreihen. Nehmen wir an, die Richtung, in welcher diese Verschiebung erfolgt, sei parallel zum Strahle d, so müssen die in d gelegenen, einander entsprechenden Punkte DD_1 nach vollendeter Verschiebung zusammenfallen und einen Doppelpunkt bilden. Der Strahl d kann nicht parallel zu den Trägern der beiden Reihen sein, sonst wäre es nicht möglich, die letzteren durch Verschiebung in conjectivische Lage zu bringen, es schneidet also d die beiden Reihen in zwei eigentlichen Punkten, woraus folgt, dass der Doppelpunkt, welcher durch die Vereinigung dieser Schnittpunkte entsteht, ebenfalls ein eigentlicher Punkt sein muss. Wie man also auch die eine Reihe verschieben mag, um sie mit der andern in conjectivische Lage zu bringen, stets ergibt sich ein eigentlicher Doppelpunkt, da der Strahl d jede beliebige Richtung haben kann, mit Ausnahme derjenigen, welche die Träger der beiden Reihen haben.

Der unendlich ferne Punkt muss auch ein Doppelpunkt sein. Es fallen nämlich, wie bereits bekannt, bei ähnlichen Punktreihen die Gegenpunkte in unendliche Entfernung; ist also U der unendlich ferne Punkt der einen Reihe R und G' der in R_1 gelegene Gegenpunkt, so fällt G' ebenfalls in unendliche Entfernung und coincidirt daher mit U.

Diese Betrachtungen über die Doppelpunkte von ähnlichen conjectivischen Reihen gelten sowohl für einstimmig, als auch für entgegengesetzt verlaufende. Wir können daher folgenden Satz aufstellen:

40. Zwei ähnliche conjectivische Punktreihen, ob sie nun einstimmig oder entgegengesetzt verlaufen, haben stets zwei Doppelpunkte, wovon einer der unendlich entfernte Punkt ist.

Befinden sich zwei congruente Reihen in conjectivischer Lage und verlaufen sie entgegengesetzt, so kann man sich immer vorstellen, dieselben seien entstanden, indem ein Strahlenbüschel durch zwei von seinem Mittelpunkte gleich weit

entfernte Gerade geschnitten und eine so erhaltene Reihe durch paralleles Verschieben mit der andern in conjectivische Lage gebracht wurde. Nachdem die Verschiebung nach allen Richtungen, nur nicht parallel zur Richtung der Träger vorgenommen werden kann, wenn schliesslich ein Zusammenfallen der Träger beider Reihen erfolgen soll, so muss es in den conjectivisch gelegenen Reihen immer einen in endlicher Entfernung gelegenen Doppelpunkt geben. Derselbe kommt durch die Coincidenz zweier entsprechender Punkte zu Stande, welche sich in jenem Strahle befinden, der zur Richtung der Verschiebung parallel ist.

Sind zwei congruente, conjectivische Punktreihen einstimmig verlaufend, so kann man sich dieselben immer dadurch entstanden denken, dass ein Parallel-Strahlenbüschel durch zwei parallele Gerade geschnitten und die eine der beiden so erhaltenen Reihen parallel zu sich selbst verschoben wurde, bis sie mit der andern zusammenfiel. Diese Verschiebung kann nun entweder in der Richtung der Strahlen des Parallelbüschels erfolgen, dann fallen alle entsprechenden Punkte der conjectivischen Reihen zusammen, oder die Richtung der Verschiebung weicht von jener der Strahlen ab, in welchem Falle selbsverständlich kein Paar sich entsprechender eigentlicher Punkte der conjectivischen Reihen coincidiren können. Nachdem die unendlich fernen Punkte aus demselben Grunde, welcher für die entgegengesetzt verlaufenden congruenten Reihen angeführt wurde, immer zusammenfallen müssen, so folgt, dass die in Rede stehenden Reihen nur einen in unendlicher Entfernung gelegenen Doppelpunkt haben, wenn nicht alle ihre entsprechenden Elemente coincidiren. Aus diesen Untersuchungen schliessen wir:

41. Sind zwei congruente conjectivische Punktreihen entgegengesetzt verlaufend, so haben sie immer zwei Doppelpunkte, wovon einer in unendlicher Entfernung liegt; sind sie aber einstimmig verlaufend, so ist entweder nur ein in unendlicher Entfernung gelegener Doppelpunkt vorhanden, oder die beiden Reihen haben alle ihre Punkte entsprechend gemein.

Wie aus dem Satze 17 folgt, nähert sich ein Punkt A dem Gegenpunkte G der Reihe R, welcher er angehört, wenn der ihm entsprechende A_1 einer zweiten mit R projectivisch verwandten Reihe R_1 sich von dem in R_1 gelegenen Gegenpunkte entfernt. — Das Schema der beiden Reihen

1. $U \ldots\ldots M \ldots\ldots G \ldots\ldots N \ldots\ldots U'$
$U \ldots\ldots M_1 \ldots\ldots G' \ldots\ldots N_1 \ldots\ldots U'$

diene den folgenden Erklärungen zur Unterstützung. — Nehmen wir an, der Punkt A bewege sich vom unendlich entfernten Punkte U gegen G hin, so kann A_1 von G' ausgehend nach der einen oder anderen Seite fortschreiten. Bewegt sich A_1 gegen U hin, so muss es offenbar einen Moment geben, in welchem die Entfernung des Punktes A von G ebenso gross ist, als die Entfernung der Punkte A_1 und G'. Befindet sich A in diesem Momente in M und A_1 in M_1, so wird demnach

$$MG = M_1 G'.$$

Bei fortgesetzter Bewegung von A über G hinaus gegen U' hin nähert sich A_1 von U' ausgehend dem Gegenpunkte G'; es muss daher nochmals ein Moment eintreten, in welchem die Entfernungen der Punkte A und A_1 von den betreffenden Gegenpunkten gleich gross werden. Man hat also

$$NG = N_1 G',$$

wenn N und N_1 jene Punkte sind, mit welchen A und A_1 in diesem Momente beziehungsweise coincidiren.

Wäre angenommen worden, dass A_1 sich gegen U' hin bewege, wenn A von U aus gegen G fortrückt, so würde man gefunden haben, dass es ebenfalls zwei Paare gleichweit von den Gegenpunkten entfernter, sich entsprechender Punkte geben müsse. Ein Unterschied bezüglich der Lage dieser Punkte zeigt sich nur darin, dass M_1 und N_1 bezüglich des Punktes G' eine andere Lage haben als im früheren Falle, wie das folgende Schema zeigt:

2. $U \ldots\ldots M \ldots\ldots G \ldots\ldots N \ldots\ldots U'$
   $U \ldots N_1 \ldots\ldots G' \ldots\ldots M_1 \ldots\ldots U'$

Zwei solche Punktpaare MM_1 und NN_1 sind in zwei projectivischen Reihen stets vorhanden, aber auch nicht mehr. Denn wie aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, befindet sich auf der Strecke GU nur ein Punkt M, für welchen $MG = M_1 G'$ sein kann und auf der Strecke GU' ebenfalls nur ein Punkt N, der so gelegen ist, dass $NG = N_1 G'$ wird.

Die endlichen Strecken MN und $M_1 N_1$ werden immer beziehungsweise von den Gegenpunkten G und G' halbirt.

Denn nach Satz 17 ist

$$MG \,.\, M_1 G' = NG \,.\, N_1 G'.$$

Da nun $MG = M_1 G'$ und $NG = N_1 G'$ sein soll, so ist $MG = NG$ und $M_1 G' = N_1 G'$, wodurch obige Behauptung gerechtfertigt erscheint. Es ist somit auch $MN = M_1 N_1$.

Wir wollen nun annehmen, durch das Schema 1 seien zwei entgegengesetzt verlaufende, durch das Schema 2 ein Paar einstimmig verlaufende conjectivische Reihen repräsentirt. Diese Annahme ist offenbar gestattet; man braucht sich ja nur vorzustellen, die zwei Reihen wären ursprünglich parallel gewesen und seien parallel zu sich selbst bis in die conjectivische Lage verschoben worden. Es stimmt dann auch die Lage der Punkte MM_1 und NN_1 mit der Annahme überein, dass die Reihen in 1 entgegengesetzt und in 2 einstimmig verlaufen, nachdem wir ja, um die Lage dieser Punkte angeben zu können für das Schema 1 vorausgesetzt haben, dass die Punkte AA_1 sich in entgegengesetztem Sinne, für das Schema 2, dass sie sich in demselben Sinne bewegen würden.

Aus dem Schema 1 ist nun ersichtlich, dass in entgegengesetzt verlaufenden conjectivischen Reihen die Punkte M und M_1 auf derselben Seite der Gegenpunkte, also beide entweder rechts oder links von G und G' liegen. Dasselbe gilt

auch bezüglich der Punkte N und N_1. Bei einstimmig verlaufenden conjectivischen Reihen ist, wie das Schema 2 zeigt, das umgekehrte der Fall; hier befinden sich die Punkte M und M_1, sowie die Punkte N und N_1 zu verschiedenen Seiten der Gegenpunkte. Für entgegengesetzt verlaufende Reihen sind demnach die Abstände MG und $M_1\,G'$, sowie NG und $N_1\,G'$ immer gleichbezeichnet, während bei einstimmig verlaufenden diese Abstände verschieden bezeichnet werden müssen.

Ist D ein Doppelpunkt zweier conjectivischer Reihen, so muss

$$DG\,.\,DG' = MG\,.\,M_1G'$$

sein. Verlaufen die beiden Reihen entgegengesetzt, so ist $MG = M_1G'$ daher

$$DG\,.\,DG' = MG^2.$$

Für einstimmig verlaufende Reihen aber muss, obigen Erklärungen zufolge $MG = - M_1G'$ gesetzt werden und dann hat man

$$DG\,.\,DG' = - MG^2.$$

Für conjectivische Reihen im allgemeinen besteht somit die Gleichung

$$DG\,.\,DG' = \pm MG^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \alpha$$

Setzt man

$$DG' = GG' + DG\,,$$

welche Gleichung sowohl für entgegengesetzt, als auch für einstimmig verlaufende Reihen gilt, wenn man berücksichtigt, dass $DG = - GD$ ist, so ergibt sich:

$$DG = \frac{-GG' \pm \sqrt{GG'^2 \pm (2MG)^2}}{2},$$

oder

$$DG = \frac{-GG' \pm \sqrt{GG'^2 \pm MN^2}}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \beta$$

nachdem $2MG$ immer gleich MN sein muss.

Aus der Gleichung β, in welcher das obere Zeichen von MN^2 für entgegengesetzt, das untere für einstimmig verlaufende Reihen gilt, kann ersehen werden, dass es in entgegengesetzt verlaufenden Reihen immer zwei reelle Doppelpunkte gibt, während in einstimmig verlaufenden nur dann reelle Doppelpunkte vorhanden sein können, wenn GG' grösser als MN ist. Es lässt sich nun folgender Satz aufstellen:

42. In zwei einstimmig verlaufenden conjectivischen Punktreihen sind entweder zwei reelle gesonderte, oder zwei reelle coincidirende oder zwei imaginäre Doppelpunkte vorhanden, je nachdem der Abstand der Gegenpunkte grösser, gleich oder kleiner als MN ist.

Wie leicht einzusehen vereinigen sich im zweiten Falle ein Paar gleich weit von den Gegenpunkten abstehender Punkte mit dem Doppelpunkte.

Nachdem die endlichen Strecken MN und M_1N_1 gleich gross sind und beziehungsweise durch G und G' halbirt werden, so muss offenbar wenn

$GG' > MN$ ist, jede der beiden Strecken MN und M_1N_1 ganz ausserhalb der anderen liegen. Ist jedoch $GG' < MN$, so übergreifen sich diese zwei Strecken.

Berücksichtigt man auch imaginäre Punkte, so kann man dem vorhergehenden und dem Satze 38 zufolge behaupten, dass in zwei conjectivischen Reihen stets zwei Doppelpunkte vorhanden sind.

Die constructive Bestimmung der Doppelpunkte, selbstverständlich nur der reellen, von zwei einstimmig verlaufenden conjectivischen Reihen R und R_1 kann in folgender Weise geschehen.

Sind ABC Punkte der Reihe R und $A_1B_1C_1$ die entsprechenden der Reihe R_1, so bestimmt man zuerst die Gegenpunkte GG', indem man R und R_1 in perspectivische Lage bringt und die zu R und R_1 parallelen Strahlen des für die beiden Reihen projicirenden Büschels zieht. Die Durchschnitte dieser parallelen Strahlen mit den zwei Reihen sind dann die Gegenpunkte. Nachdem $AG \quad A_1G' = DG \, . \, DG' = \pm MG^2$ ist, so hat man nur die Länge MG der Seite eines Quadrates zu construiren, welches denselben Flächeninhalt hat, wie das Rechteck, dessen Seiten AG und A_1G' sind, um den Punkt M, also auch die Punkte M_1, N und N_1 angeben zu können. Beschreibt man ferner über die Gegenpunkte einen Halbkreis, zieht im Abstande MG von der Geraden GG' eine parallele p zu GG', welche, wie wir voraussetzen wollen, den Halbkreis in Q schneidet, und fällt aus Q eine Senkrechte auf GG', so hat der Fusspunkt D dieser Senkrechten eine solche Lage, dass

$$DG \, . \, DG' = DQ^2 = MG^2$$

ist, woraus folgt, dass D ein Doppelpunkt sein muss.

Auch diese Construction zeigt, dass keine reellen Doppelpunkte vorhanden sind, sobald $2MG$ grösser als GG' ist, denn für diesen Fall würde die Parallele p den Halbkreis nicht schneiden. Wäre $2MG = GG'$, so müsste p den Halbkreis berühren und dann würde sich D im Halbirungspunkte der Strecke GG' ergeben, ein Resultat, welches ebenfalls mit obigen Untersuchungen übereinstimmt.

Um die Doppelpunkte entgegengesetzt verlaufender Reihen zu bestimmen, kann man die Länge der Strecke DG mit Benützung der obigen Formel β constructiv ermitteln. Der Werth des Ausdruckes $\sqrt{GG'^2 + MN^2}$ entspricht der Länge der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes, in welchem GG' und $2MG$ Katheten sind. Dieser Werth lässt sich daher sehr leicht construiren, sowie auch die Grösse der Strecke DG.

Wenn ein Strahlenbüschel S und eine mit ihm projectivisch verwandte Punktreihe R in derselben Ebene gelegen sind, so können diese beiden Grundgebilde entweder entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen. Ersteres ist dann der Fall, wenn die Punktreihe R und jene R_1, welche als Schnitt des Trägers der Reihe R mit dem Büschel S zu Stande kommt, entgegengesetzt verlaufen, letzteres findet statt, wenn R und R_1 einstimmig verlaufende Reihen sind. —



Dass eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel, welche perspectivisch liegen stets einstimmig verlaufen, ist selbstverständlich. — Setzt man nun einen Strahlenbüschel S und eine in der Ebene desselben befindliche projectivische Punktreihe R als gegeben voraus, so kann die Frage gestellt werden: Wie viele Strahlen des Büschels gehen durch die ihnen entsprechenden Punkte der Reihe, wenn letztere gegen den Büschel schief gelegen ist?

Mit Rücksicht auf obige, die Doppelpunkte betreffende Sätze lässt sich diese Frage sehr einfach entscheiden. Nennt man die Reihe, welche durch den Schnitt des Trägers der Reihe R mit dem Strahlenbüschel entsteht, R_1 und DD' die in R und R_1 vorhandenen Doppelpunkte, so müssen jene Strahlen dd', welche durch die genannten zwei Doppelpunkte gehen, offenbar Strahlen sein, die der aufgestellten Bedingung entsprechen. Solche Strahlen können höchstens zwei, nämlich ebenso viele als es in R und R_1 Doppelpunkte gibt, vorhanden sein; die Möglichkeit ihres Vorkommens ist also davon abhängig, ob in den genannten zwei Reihen Doppelpunkte existiren oder nicht.

Diese Betrachtungen dürften folgenden Satz genügend rechtfertigen:

43. Wenn ein Strahlenbüschel S und eine mit ihm projectivisch verwandte Punktreihe R sich in derselben Ebene in schiefer Lage gegen einander befinden, so gibt es immer zwei reelle Strahlen von S, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte von R gehen, sobald S und R entgegengesetzt verlaufen. Wenn S und R hingegen einstimmig verlaufen, so sind im allgemeinen entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Strahlen vorhanden, welche die ihnen entsprechenden Punkte enthalten.

Der Fall, in welchem nur ein reeller Strahl von S vorhanden ist, der die angegebene Bedingung erfüllt, muss als ein besonderer betrachtet werden. Er entspricht jenem Falle, wo zwei reelle Doppelpunkte coincidiren.

Unter imaginären Strahlen sind in obigem Satze jene Strahlen zu verstehen, welche je einen imaginären Doppelpunkt in sich enthalten. Wir sehen daraus, dass in einer imaginären geraden Linie auch ein reeller Punkt vorkommen kann, nachdem jeder Strahl des Büschels S, also auch ein imaginärer, durch den Mittelpunkt des Büschels gehen muss.

Wir wollen nun zwei Strahlenbüschel betrachten, welche in derselben Ebene liegen und deren Mittelpunkte coincidiren. Man sagt von zwei solchen Büscheln, dass sie concentrisch liegen, oder einfach, dass sie concentrisch sind. Uebrigens werden auch häufig Büschel, deren Mittelpunkte coincidiren, wenn erstere auch nicht in derselben Ebene liegen, concentrisch genannt.

Sowie in conjectivischen Punktreihen Doppelpunkte vorhanden sein können, ebenso gibt es auch unter Umständen in zwei projectivischen, concentrischen Strahlenbüscheln Doppelstrahlen, auch Haupt- oder Ordnungsstrahlen genannt. — Es sind dies solche, in welchen zwei einander entspre-

chende Strahlen der zwei Büschel zusammenfallen. — Um dies einzusehen, denke man sich diese Büschel S und S_1 durch eine beliebige, nicht durch den Mittelpunkt gehende Gerade geschnitten. Wenn die zwei auf der schneidenden Geraden sich ergebenden conjectivischen Reihen R und R_1 Doppelpunkte haben, so sind in S und S_1 offenbar auch Doppelstrahlen vorhanden. Je nachdem R und R_1 entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen, kann man die Strahlenbüschel entgegengesetzt oder einstimmig verlaufend nennen. Das Vorhandensein von Doppelstrahlen ist in analoger Weise von dem Umstande abhängig, ob S und S_1 entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen, wie das Vorkommen von Doppelpunkten durch die Richtungen des Verlaufens der zwei conjectivischen Punktreihen bedingt wird.

Zur Unterscheidung des Verlaufens von zwei projectivischen, concentrischen Strahlenbüscheln bedarf man übrigens nicht zweier conjectivischer Reihen. Denkt man sich nämlich, ein Strahl a des Büschels S drehe sich stetig in einem bestimmten Sinne um den Mittelpunkt, so wird auch der ihm entsprechende Strahl a_1 des Büschels S_1 sich stetig um seinen Mittelpunkt drehen. Erfolgt nun die Drehung beider Strahlen a und a_1 in entgegengesetztem Sinne, so sind S und S_1 entgegengesetzt verlaufend, erfolgt die Drehung in gleichem Sinne, so verlaufen beide Büschel einstimmig.

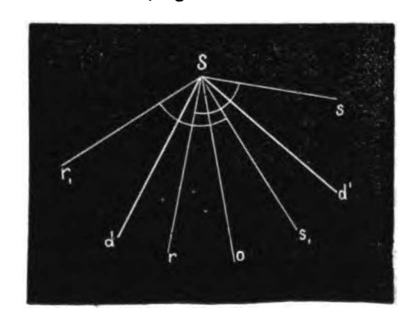
Bezeichnet man durch r und s zwei Strahlen irgend eines Büschels S, welche den Strahlen r_1 und s_1 eines projectivisch verwandten Büschels S_1 entsprechen, und sind diese Strahlen zugleich die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel (Satz 18), so ist bekanntlich das Product

$$\operatorname{tg} ar \,.\, \operatorname{tg} a_1 s_1 \text{ oder auch } \operatorname{tg} as \,.\, \operatorname{tg} a_1 r_1$$

für zwei beliebige einander entsprechende Strahlen a und a_1 constant. (Satz 19). Daraus haben wir geschlossen, dass wenn der Strahl a durch Drehung um den Mittelpunkt des Büschels S sich dem Strahle r nähert, also von s entfernt, der Strahl a_1 sich vom Strahle s_1 durch Drehung um den Mittelpunkt des Büschels S_1 entfernt und dem Strahle r_1 nähert, oder umgekehrt. Dasselbe muss nun selbstverständlich auch bei concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln der Fall sein. Dieser Umstand gibt uns das Mittel an die Hand über die Lage der Doppelstrahlen einiges festzustellen.

Um die folgenden Erklärungen zu vereinfachen, setzen wir voraus, die concentrischen Büschel S und S_1 beständen nur aus Halbstrahlen und wollen uns unter den Halbstrahlen r und s_1 (Fig. 16) diejenigen einander nicht entsprechenden Schenkel der rechten Winkel denken, welche einen spitzen oder höchstens einen rechten Win-

(Fig. 16.)



kel bilden. Die Schenkel s und r_1 schliessen dann einen stumpfen oder ebenfalls einen rechten Winkel ein.

Stellen wir uns nun vor, in zwei concentrischen entgegengesetzt verlaufenden Strahlenbüscheln fiele der Strahl a mit r zusammen, so muss a_1 mit r_1 coincidiren und bei der entgegengesetzten Bewegung von a und a_1 werden diese Strahlen an irgend einer ausserhalb des spitzen Winkels rs_1 befindlichen Stelle, die wir durch den Strahl d bezeichnen wollen, sich vereinigen und einen Doppelstrahl d bilden. Dass diese Vereinigung ausserhalb des genannten spitzen Winkels erfolgen muss, ist leicht einzusehen. Denkt man sich nämlich a und a_1 würden innerhalb des spitzen Winkels rr_1 einander entgegenkommen, so müssen sie auch innerhalb rr_1 zusammentreffen; setzt man aber voraus, ihre Bewegung erfolge innerhalb des stumpfen Winkels rr_1, so können sie sich ebenfalls nur ausserhalb des spitzen Winkels rs_1 begegnen, da, wenn a_1 den Strahl s_1 erreicht hat, a bereits mit s coincidirt. — Für den Strahl d besteht die Gleichung

$$\text{tg } dr \,.\, \text{tg } ds_1 = \text{tg } ar \,.\, \text{tg } a_1 s_1 .$$

Bezeichnet man den Strahl, welcher den spitzen Winkel rs_1 halbirt durch o und zieht einen Strahl d', der mit o einen ebenso grossen Winkel bildet, als d mit o, so lässt sich leicht nachweisen, dass d' ebenfalls ein Doppelstrahl sein muss, nachdem tg $d'r$. tg $d's$ offenbar auch gleich tg ar . tg $a_1 s_1$ ist.

Wir können somit den Satz aufstellen:

44. I n z w e i c o n c e n t r i s c h e n, p r o j e c t i v i s c h e n S t r a h l e n b ü s c h e l n, w e l c h e e n t g e g e n g e s e t z t v e r l a u f e n, g i b t e s i m m e r z w e i r e e l l e D o p p e l s t r a h l e n. D i e s e l b e n l i e g e n a u s s e r h a l b d e s s p i t z e n W i n k e l s, d e r v o n d e n s i c h n i c h t e n t s p r e c h e n d e n S c h e n k e l n r u n d s_1 d e r e n t s p r e c h e n d e n r e c h t e n W i n k e l g e b i l d e t w i r d u n d s c h l i e s s e n m i t d e r H a l b i r u n g s l i n i e o d e s W i n k e l s rs_1 g l e i c h e W i n k e l e i n.

Ist rs_1 auch ein rechter Winkel, so fallen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zusammen und bilden selbst Doppelstrahlen.

Um über die Lage der Doppelstrahlen e i n s t i m m i g v e r l a u f e n d e r Punktreihen Aufschluss zu erhalten, nehmen wir an, der Strahl a drehe sich vom Strahle r aus gegen s hin, während der Strahl a_1 i n d e m s e l b e n Sinne sich drehend von der Lage r_1 in die Lage s_1 übergeht. Wie leicht einzusehen, können sich a und a_1 nur in irgend einem i n n e r h a l b des spitzen Winkels rs_1 (Fig. 16) befindlichen Strahle d begegnen. Denn ist a_1 in s_1 angelangt, so befindet sich a bereits in s, folglich kann ein Zusammentreffen nur zwischen den Halbstrahlen r und s_1 stattfinden, von welchen wir vorausgesetzt haben, dass sie einen spitzen Winkel bilden. — Nachdem die Untersuchung über Doppelpunkte einstimmig verlaufender Reihen der hier vorzunehmenden ganz analog ist, so beschränken wir uns auf diese Andeutungen. — Kommt in dem spitzen Winkel rs_1 ein Doppelstrahl d vor, so muss immer noch ein zweiter d' vorhanden sein, welcher mit der Halbirungslinie o des Winkels rs_1 einen ebenso grossen

Winkel bildet, als der Doppelstrahl d, wie aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} dr \,.\, \operatorname{tg} ds_1 = \operatorname{tg} d'r \,.\, \operatorname{tg} d's_1$$

und aus dem Satze 19 folgt. Würde demnach d mit o coincidiren, so müsste auch d' mit o zusammenfallen und dann wären nicht zwei getrennte, sondern zwei in der Halbirungslinie o vereinigte Doppelstrahlen vorhanden. Es ist übrigens auch möglich, dass keine reellen Doppelstrahlen vorkommen. Hat nämlich der Strahl a_1 von r_1 ausgehend den Strahl r noch nicht erreicht, wenn a aus der Lage r bereits in die Lage s_1 übergegangen ist, so können sich offenbar a und a_1 weder innerhalb, noch ausserhalb des spitzen Winkels rs_1 treffen. Wir können somit folgenden Satz aufstellen:

45. In zwei concentrischen, projectivischen Strahlenbüscheln, welche einstimmig verlaufen, gibt es entweder zwei gesonderte, innerhalb jenes spitzen Winkels gelegene Doppelstrahlen, der von den sich nicht entsprechenden Schenkeln r und s_1 der entsprechenden rechten Winkel gebildet wird, oder zwei in der Halbirungslinie dieses spitzen Winkels coincidirende, oder keine reellen Doppelstrahlen. Die zwei gesonderten Doppelstrahlen schliessen mit der genannten Halbirungslinie immer gleiche Winkel ein.

Sind zwei concentrische Büschel congruent und verlaufen sie entgegengesetzt, so haben sie dem Satze 44 zufolge immer zwei Doppelstrahlen. Diese letzteren bilden stets einen rechten Winkel. Denn bezeichnet man dieselben durch d und d', so muss

$$\sphericalangle dr = dr_1 \text{ und } \sphericalangle d's = d's_1$$

sein, nachdem in Folge der Congruenz beider Büschel für jede Lage der sich drehenden Strahlen a und a_1

$$\sphericalangle ar = a_1 r_1 \text{ und } \sphericalangle as = a_1 s_1$$

ist. Wenn nun, wie die obigen Gleichungen zeigen, d und d' beziehungsweise die Winkel rr_1 und ss_1 halbiren, so lässt sich leicht nachweisen, dass sie auf einander senkrecht stehen müssen.

Wir haben die letztere Untersuchung über die Doppelstrahlen congruenter Strahlenbüschel auf das Vorkommen entsprechender rechter Winkel gestützt. Solche Büschel enthalten aber nicht blos ein Paar, sondern unendlich viele Paare sich entsprechender rechter Winkel, es könnte daher scheinen, dass hier andere Beziehungen statt haben, als in projectivisch verwandten Büscheln überhaupt. Indess zeigt sich, dass wenn man irgend ein Paar entsprechender rechter Winkel annimmt und untersucht, ob Doppelstrahlen vorhanden sind, dass zwei solche Strahlen existiren müssen. Setzt man ein anderes Paar entsprechender rechter Winkel voraus, so erhält man dasselbe Resultat; da es aber nicht mehr als zwei Doppelstrahlen geben kann, wenn nicht die beiden

Büschel identisch sein sollen (Satz 10), so müssen sich immer dieselben zwei Doppelstrahlen ergeben, welche Paare von rechten Winkeln man auch annehmen mag.

46. **Verlaufen zwei congruente, concentrische Strahlenbüschel einstimmig, so haben sie entweder keine reellen Doppelstrahlen, oder es fallen alle ihre entsprechenden Strahlen zusammen.**

Stellt man sich vor, dass zwei entsprechende Strahlen a und a_1, beziehungsweise von r und r_1 ausgehend, sich in demselben Sinne drehen und nimmt man an, sie würden in irgend einem Strahle d zusammentreffen, so ist leicht einzusehen, dass in Folge der Congruenz beider Büschel

$$\sphericalangle\, dr = dr_1$$

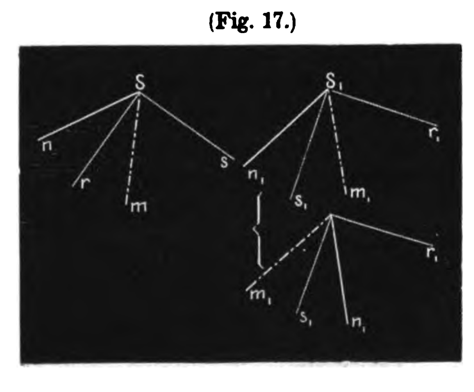
sein muss, welche Gleichung, da a und a_1 einstimmig fortschreiten sollen, nur erfüllt werden kann, wenn r und r_1 coincidiren. Fallen aber r und r_1 zusammen, so coincidiren offenbar auch s und s_1; die beiden Büschel hätten daher drei Paare von Strahlen entsprechend gemein und müssten somit identisch sein. Wenn also ein Paar entsprechender Strahlen zusammenfallen, so haben die beiden Büschel alle ihre Strahlen entsprechend gemein, woraus obiger Satz unmittelbar hervorgeht.

Sowie es in zwei projectivischen Punktreihen stets zwei Paare entsprechender Punkte MM_1 und NN_1 gibt, welche von den Gegenpunkten gleich weit abstehen, ebenso sind auch in zwei projectivischen Strahlenbüscheln S und S_1 (Fig. 17) stets zwei Paare von Strahlen mm_1 und nn_1 vorhanden, welche mit den sich nicht entsprechenden Schenkeln rs_1 der entsprechenden rechten Winkel gleiche Winkel einschliessen, so dass

$$\sphericalangle\, mr = m_1 s_1 \text{ und } \sphericalangle\, nr = n_1 s_1 \text{, also auch}$$
$$mn = m_1 n_1$$

wird. Um dies einzusehen stelle man sich wieder vor, ein Strahl a des Büschels S drehe sich von r aus gegen s hin, während der ihm entsprechende Strahl a_1 im Büschel S_1 von r_1 ausgehend gegen s fortschreitet. Je mehr a sich vom Strahle r entfernt, desto näher rückt bekanntlich a_1 dem Strahle s_1, folglich muss es einen Moment geben, in welchem der Winkel ar ebenso gross ist, als der Winkel $a_1 s_1$. Bezeichnet man durch m und m_1 jene Strahlen, mit welchen beziehungsweise a und a_1 in diesem Momente coincidiren, so hat man obige Gleichung $\sphericalangle\, mr = m_1 s_1$. Dass bei fort-

(Fig. 17.)



gesetzter Drehung von a und a_1 noch ein zweiter Moment eintreten muss, in welchem $ar = a_1 s_1$ ist, wollen wir nicht weiter begründen, nachdem die zur Herstellung eines Beweises nöthigen Betrachtungen denjenigen ganz analog sind, welche wir bezüglich der Punktpaare MM_1 und NN_1 in projectivischen Reihen bereits angestellt haben.

Heissen die Strahlen, mit welchen a und a_1 zusammenfallen, wenn sie zum zweitenmale gleiche Winkel mit r und s_1 bilden, n und n_1, so lässt sich leicht nachweisen, dass

$$\sphericalangle mr = nr \text{ und } m_1 s_1 = n_1 s_1$$

sein muss. Aus Satz 19 folgt nämlich, dass

$$\operatorname{tg} mr \,.\, \operatorname{tg} m_1 s_1 = \operatorname{tg} nr \,.\, \operatorname{tg} n_1 s_1$$

ist; nachdem aber die Winkel mr und $m_1 s_1$, sowie nr und $n_1 s_1$ einander gleich sind, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} mr = \operatorname{tg} nr \text{ und } \operatorname{tg} m_1 s_1 = \operatorname{tg} n_1 s_1 .$$

Die Winkel mn und $m_1 n_1$ werden also beziehungsweise durch r und s_1 halbirt.

Wir gehen nun wieder zur Betrachtung zweier concentrisch liegender, projectivischer Strahlenbüschel S und S_1 über. — Dass es auch in solchen Büscheln immer zwei Paare von entsprechenden Strahlen geben muss, welche mit r und s_1 gleiche Winkel bilden, ist selbstverständlich. Verlaufen die beiden Büschel entgegengesetzt, so liegen die entsprechenden Strahlen mm_1 sowie nn_1 immer auf derselben Seite der Strahlen r und s_1, d. h. wenn man die Strahlen r und s_1 in demselben Sinne um den Betrag des Winkels mr dreht, so gelangen sie beziehungsweise in die Lage der Strahlen m und m_1 oder auch n und n_1. Verlaufen aber S und S_1 einstimmig, so liegen die entsprechenden Strahlen mm_1 sowie nn_1 auf entgegengesetzten Seiten der Strahlen r und s_1. (In der Fig. 17 sind diese zwei Fälle angedeutet.) Für entgegengesetzt verlaufende concentrische Büschel müssen daher auch $\operatorname{tg} mr$ und $\operatorname{tg} m_1 s_1$ sowie $\operatorname{tg} nr$ und $\operatorname{tg} n_1 s_1$ stets gleich bezeichnet werden; für einstimmig verlaufende Büschel sind jedoch die Zeichen dieser Werthe entgegengesetzt anzunehmen.

Dem Satz 19 zufolge besteht die Gleichung:

$$\operatorname{tg} dr \,.\, \operatorname{tg} ds = \operatorname{tg} mr \,.\, \operatorname{tg} m_1 s_1 ,$$

wenn d einen Doppelstrahl bezeichnet. Da nun

$$\operatorname{tg} mr = \pm \operatorname{tg} m_1 s_1$$

ist, je nachdem die beiden Büschel entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen, so hat man für diese zwei Fälle beziehungsweise

$$\operatorname{tg} dr \,.\, \operatorname{tg} ds_1 = \pm \operatorname{tg} mr^2 \quad \ldots\ldots \quad \alpha'$$

Der Winkel ds_1 ist gleich $dr + rs_1$, mithin kann man auch schreiben

$$\operatorname{tg} dr \,.\, \frac{\operatorname{tg} dr + \operatorname{tg} rs_1}{1 - \operatorname{tg} dr \,.\, \operatorname{tg} rs_1} = \pm \operatorname{tg} mr^2 .$$

Wird diese Gleichung nach tg dr aufgelöst, so ergibt sich:

$$\text{tg}\, dr = \tfrac{1}{2}\left[-\text{tg}\, rs_1\ (1 \pm \text{tg}\, mr^2) \pm \sqrt{\text{tg}\, rs_1{}^2 (1 \pm \text{tg}\, mr^2)^2 \pm 4\ \text{tg}\, mr^2}\right]$$

Daraus ist zu ersehen, dass tg dr, wenn die oberen Zeichen gelten, nämlich bei entgegengesetzt verlaufenden Strahlenbüscheln stets reell wird. In solchen Büscheln sind somit, wie wir bereits in anderer Weise gefunden haben, immer reelle Doppelstrahlen vorhanden.

Nachdem

$$2\, mr = mn,$$

also

$$\text{tg}\ mn = \frac{2\ \text{tg}\ mr}{1 - \text{tg}\ mr^2}$$

ist, so ergibt sich für einstimmig verlaufende Strahlenbüschel auch

$$\text{tg}\, dr = \tfrac{1}{2}(1 - \text{tg}\, mr^2)(-\text{tg}\, rs_1 \pm \sqrt{\text{tg}\, rs_1{}^2 - \text{tg}\, mn^2})\quad \ldots \quad \beta'$$

Aus dieser Gleichung folgt der Satz:

47. In zwei concentrischen, projectivischen Strahlenbüscheln, welche einstimmig verlaufen, gibt es entweder zwei reelle gesonderte oder zwei relle coincidirende oder zwei imaginäre Doppelstrahlen, je nachdem der Winkel rs_1 grösser, gleich oder kleiner als der Winkel mn ist.

Welche Lage die rellen Doppelstrahlen gegen die Halbirungslinie des Winkels rs_1 haben, wurde bereits im Satze 45 ausgesprochen.

Nachdem die Winkel mn und m_1n_1 einander immer gleich sind und beziehungsweise von r und s_1 halbirt werden, so ist leicht einzusehen, dass wenn $rs_1 > mn$ ist, jeder der spitzen Winkel mn und m_1n_1 ganz ausserhalb des anderen liegt, während für den Fall $rs_1 < mn$ die beiden Winkel mn und m_1n_1 in einander eingreifen.

Mit Hilfe der bezüglich des Vorkommens von Doppelpunkten und Doppelstrahlen aufgestellten Sätze lassen sich auch folgende leicht nachweisen.

48. Liegen zwei in derselben Ebene befindliche projectivische Punktreihen schief gegen einander, so ist es nicht möglich von irgend einem Punkte dieser Ebene mehr als zwei Gerade zu ziehen, welche ein Paar entsprechender Punkte der zwei Reihen verbinden.

Liegen zwei in derselben Ebene befindliche, projectivische Strahlenbüschel schief gegen einander, so ist es nicht möglich, in dieser Ebene irgend eine Gerade zu ziehen, welche mehr als zwei Punkte enthält, in denen sich ein Paar entsprechender Strahlen schneiden.

Um den Satz links zu rechtfertigen, denken wir uns irgend einen Punkt der Ebene, in welcher die beiden Punktreihen liegen, mit den Punkten der letzteren verbunden, wodurch sich zwei concentrische, projectivische Strahlen-

büschel ergeben. In diesen Büscheln sind nun höchstens zwei Doppelstrahlen vorhanden, offenbar haben aber nur Doppelstrahlen die Eigenschaft, dass sie zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen verbinden.

Von der Richtigkeit des Satzes rechts kann man sich leicht überzeugen, wenn man berücksichtigt, dass auf jeder Geraden, welche die beiden Büschel schneidet, zwei conjectivische Punktreihen zu Stande kommen, in denen höchstens zwei Doppelpunkte vorhanden sind, und dass diese Doppelpunkte allein Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen sein können.

e) Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Von zwei conjectivischen Punktreihen, deren Gegenpunkte coincidiren sagt man, das sie involutorisch liegen oder eine Involution*) bilden.

Von zwei concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln, bei welchen die nicht entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel coincidiren, sagt man, dass sie involutorisch liegen oder eine Involution bilden.

Ein Strahlenbüschel und eine in der Ebene desselben befindliche Punktreihe R liegen involutorisch, wenn jene Reihe R_1, welche durch den Schnitt des Trägers der Reihe R mit dem Strahlenbüschel zu Stande kommt, so gelegen ist, dass R und R_1 eine Involution bilden.

Statt zwei Grundgebilde involutorisch liegend zu nennen, sagt man häufiger sie sind involutorisch. Auch fasst man meistens zwei gleichartige involutorische Grundgebilde als ein einziges auf und spricht von einer involutorischen Punktreihe und einem involutorischen Strahlenbüschel.

Der Punkt, in welchem die Gegenpunkte zweier involutorischer Reihen coincidiren wird das Involutionscentrum oder der Centralpunkt genannt.

Die Strahlen, in welchen die nicht entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel coincidiren, werden Normalstrahlen genannt.

Zwei involutorische Punktreihen oder Strahlenbüschel können, entweder einstimmig oder entgegengesetzt verlaufen. In einstimmig verlaufenden involutorischen Punktreihen liegen je zwei einander entsprechende Punkte zu verschiedenen Seiten des Centralpunktes, während in entgegengesetzt verlaufenden je zwei solcher Punkte sich auf derselben Seite des Centralpunktes befinden. Um dies nachzuweisen nehmen wir folgendes Schema einer involutorischen Punktreihe an:

$$U \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; GG' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; U'.$$

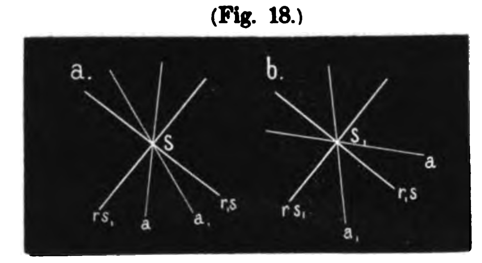
R und R_1 seien die zu einer Involution vereinigten Reihen. Im unendlich fernen Punkte U befinde sich ein Punkt A der Reihe R, während der ihm entsprechende A_1 der Reihe R_1 mit den coincidirenden Gegenpunkten GG'

*) Diese Bezeichnung rührt von Désargues her. (1593 — 1662.)

zusammenfällt. Sind R und R_1 entgegengesetzt verlaufend, so bewegt sich A_1 vom Centralpunkte (G oder G') aus gegen U hin, wenn A von U ausgehend sich dem Centralpunkte nähert. Hat A_1 den unendlich fernen Punkt U erreicht, so befindet sich A in G, man sieht also, dass beide sich bewegende Punkte stets auf einer Seite des Centralpunktes bleiben. Dasselbe zeigt sich wenn A und A_1 auf der Strecke $G'U'$ in entgegengesetztem Sinne fortschreiten. Erfolgt jedoch die Bewegung dieser zwei Punkte in demselben Sinne, so liegen sie, wie leicht einzusehen, stets auf verschiedenen Seiten des Centralpunktes. A und A_1 werden somit durch den Centralpunkt und den unendlich fernen Punkt entweder nicht getrennt, oder getrennt, je nachdem die involutorische Reihe entgegengesetzt oder einstimmig verläuft. Sind daher von einer involutorischen Reihe nur zwei einander entsprechende Punkte und das Involutionscentrum gegeben, so kann darüber, ob die Reihe entgegengesetzt oder einstimmig verläuft kein Zweifel bestehen.

Bei involutorischen Strahlenbüscheln finden analoge Beziehungen rücksichtlich der Lage von zwei entsprechenden Strahlen gegen die Normalstrahlen statt. Fig. 18. a. repräsentirt einem involutorischen, entgegengesetzt verlaufenden Strahlenbüschel, Fig. 18. b einen einstimmig verlaufenden. Man überzeugt sich leicht, dass für den ersteren Fall zwei einander entsprechende Strahlen a und a_1 von den Normalstrahlen rs_1 und rs_1 niemals getrennt werden, indess im zweiten Falle solche Strahlen immer durch die Normalstrahlen getrennt erscheinen.

(Fig. 18.)



Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgen nun die Sätze:

49. Zwei entsprechende Punkte einer involutorischen Punktreihe sind durch den unendlich fernen und den Centralpunkt entweder nicht getrennt oder getrennt, je nachdem die Reihe entgegengesetzt oder einstimmig verläuft.

Zwei entsprechende Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels sind durch die Normalstrahlen entweder nicht getrennt oder getrennt, je nachdem der Büschel entgegengesetzt oder einstimmig verläuft.

Eine charakteristische Eigenschaft involutorischer Punktreihen folgt aus dem Umstande, dass das Product der Abstände irgend zweier entsprechender Punkte A und A_1 vom Centralpunkte G stets dieselbe Grösse hat. (Satz 17.) Gehört nämlich A der Reihe R und A_1 der Reihe R_1 an, so besteht die Gleichung

$$AG \,.\, A_1G = K.$$

in welcher K irgend eine bestimmte Constante bedeutet. Wird nun A als ein Punkt der Reihe R_1 und A_1 als ein Punkt der Reihe R betrachtet, so müssen

diese zwei Punkte einander wieder entsprechen, indem das Product ihrer Abstände vom Centralpunkte wieder gleich K ist.

Für involutorische Strahlenbüschel besteht bezüglich zweier entsprechender Strahlen a und a_1 eine ganz analoge Beziehung, wie man aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} ar \,.\, \operatorname{tg} a_1 r = k,$$

in welcher r einen Normalstrahl und k eine bestimmte constante Grösse bezeichnen (Satz 19), leicht folgern kann. Es lässt sich somit behaupten:

50. In zwei zu einer Involution vereinigten Punktreihen entspricht irgend einem Punkte A immer derselbe Punkt A_1 ob man A als einen Punkt der ersten, oder der zweiten Reihe betrachtet. Daraus folgt, dass wenn in zwei involutorischen Reihen zwei Punkte zusammenfallen, die ihnen entsprechenden ebenfalls coincidiren müssen.

In zwei zu einer Involution vereinigten Strahlenbüscheln entspricht irgend einem Strahl a immer derselbe Strahl a_1 ob man a als einen Strahl des ersten oder des zweiten Büschels betrachtet. Daraus folgt, dass wenn in zwei involutorischen Strahlenbüscheln zwei Strahlen zusammenfallen, die ihnen entsprechenden ebenfalls coincidiren müssen.

Sind in zwei conjectivischen Punktreihen R und R_1 zwei entsprechende Punkte A und A_1 vorhanden, welche so gelegen sind, dass A dem Punkte A_1 entspricht, ob man A als einen Punkt der Reihe R oder der Reihe R_1 ansieht, so besteht folgende Gleichung, wenn man durch G und G' die Gegenpunkte bezeichnet:

$$AG \,.\, A_1G' = A_1G \,.\, AG',$$

oder

$$\frac{AG}{A_1G} = \frac{AG'}{A_1G'},$$

aus welcher folgt, dass G und G' coincidiren, also R und R_1 involutorisch liegen. Denn betrachtet man A und A_1 als Fixpunkte, so wird durch den Werth des Verhältnisses $\frac{AG}{A_1G}$ der Punkt G unzweideutig bestimmt und nachdem dieser Werth gleich $\frac{AG'}{A_1G'}$ ist, so müssen G und G' zusammenfallen.

Dass zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel S und S_1 involutorisch sind, wenn ein Paar von Strahlen a und a_1 sich entsprechen, ob man a als Strahl des Büschels S, oder des Büschels S_1 betrachtet, ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} ar \,.\, \operatorname{tg} a_1 s_1 = \operatorname{tg} a_1 r \,.\, \operatorname{tg} as_1,$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} ar}{\operatorname{tg} a_1 r} = \frac{\operatorname{tg} as_1}{\operatorname{tg} a_1 s_1}.$$

Denn nimmt man an a und a_1 seien Fixstrahlen, so erscheint die Lage des Strahles r durch den Werth des Verhältnisses $\frac{\operatorname{tg} ar}{\operatorname{tg} a_1 r}$ unzweideutig bestimmt und da dieser Werth gleich $\frac{\operatorname{tg} as_1}{\operatorname{tg} a_1 s_1}$ ist, so fallen r und s_1, folglich auch r_1 und s zusammen. — Wir können also behaupten:

51. Ist in zwei conjectivischen Punktreihen R und R_1 ein Paar von Punkten A und A_1 vorhanden, welche so gelegen sind dass sie sich entsprechen, ob man A als einen Punkt der Reihe R oder der Reihe R_1 ansieht, so findet dieselbe Beziehung zwischen allen entsprechenden Punkten statt, denn die zwei Reihen bilden dann eine Involution.

Ist in zwei concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln S und S_1 ein Paar von Strahlen a und a_1 vorhanden, welche so gelegen sind, dass sie sich entsprechen, ob man a als einen Strahl des Büschels S oder des Büschels S_1 ansieht, so findet dieselbe Beziehung zwischen allen entsprechenden Strahlen statt, denn die zwei Büschel bilden dann eine Involution.

Aus diesen und den Sätzen 50 folgt:

52. Jede Punktreihe, deren Elemente in den Strahlen eines involutorischen Büschels liegen, ist selbst involutorisch.

Jeder Strahlenbüschel, dessen Elemente durch die Punkte einer involutorischen Reihe gehen, ist selbst involutorisch.

Aus den Sätzen 38 und 44 ergeben sich ferner unmittelbar die nachstehenden:

53. In entgegengesetzt verlaufenden involutorischen Punktreihen sind immer zwei reelle Doppelpunkte vorhanden; sie liegen vom Centralpunkte gleich weit entfernt.

In entgegengesetzt verlaufenden involutorischen Strahlenbüscheln sind immer zwei reelle Doppelstrahlen vorhanden; sie schliessen mit ein und demselben Normalstrahle gleiche Winkel ein.

Dass in den Doppelpunkten involutorischer Punktreihen die im vorigen Abschnitte durch MM_1 und NN_1 bezeichneten Punkte zusammenfallen, welche gleichweit von den Gegenpunkten abstehen, so wie dass in den Doppelstrahlen involutorischer Strahlenbüschel jene Strahlen mm_1 und nn_1 vereinigt sind, welche gegen die Normalstrahlen gleiche Neigung haben, ist leicht einzusehen.

Nachdem Doppelpunkte oder Doppelstrahlen beziehungsweise durch die Coincidenz zweier entsprechender Punkte oder Strahlen zu Stande kommen, so folgt aus den Sätzen 49, welche aussagen, dass in einstimmig verlaufenden

involutorischen Reihen oder Büscheln zwei entsprechende Elemente stets getrennt sind:

54. Einstimmig verlaufende involutorische Punktreihen haben keine reellen Doppelpunkte.

Einstimmig verlaufende involutorische Strahlenbüschel haben keine reellen Doppelstrahlen.

Dass in jedem involutorischen Strahlenbüschel zwei auf einander senkrecht stehende sich entsprechende Strahlen, nämlich Normalstrahlen, vorhanden sind, geht aus dem Satze 18 hervor. Ausser den Normalstrahlen gibt es im allgemeinen kein zweites Paar von aufeinander senkrecht stehenden Strahlen. Denn in entgegengesetzt verlaufenden Büscheln, bei welchen je zwei entsprechende Strahlen $a\ a_1$ (nach Satz 49) von den Normalstrahlen nicht getrennt werden, ist offenbar der Winkel aa_1 entweder grösser oder kleiner als ein rechter, wenn a und a_1 nicht selbst Normalstrahlen bilden, während einstimmig verlaufende Büschel (nach Satz 32) congruent sein müssten, wenn ausser den Normalstrahlen noch ein zweites Paar entsprechender Strahlen auf einander senkrecht stünde. Nachdem nun in zwei congruenten Büscheln alle entsprechenden Winkel gleich gross sind, so würden die Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen b und b_1 beziehungsweise mit den Normalstrahlen r und r_1 bilden, gleich sein, woraus folgt, dass b und b_1 ebenfalls auf einander senkrecht stehen. Wir können somit behaupten:

55. In entgegengesetzt verlaufenden involutorischen Strahlenbüscheln gibt es ausser den Normalstrahlen kein Paar sich entsprechender Strahlen, welche auf einander senkrecht stehen, in einstimmig verlaufenden steht entweder nur ein Paar, oder es stehen alle Paare entsprechender Strahlen auf einander senkrecht. Wenn letzteres der Fall ist, so sagt man, der betreffende Büschel bilde eine rechtwinklige Involution.

Die Doppelpunkte und Doppelstrahlen involutorischer Punktreihen und Strahlenbüschel stehen in einer besonderen Beziehung zu je zwei sich entsprechenden Elementen dieser Gebilde. Bezeichnet man durch A und A_1 irgend zwei sich entsprechende Punkte und durch D und D' die Doppelpunkte einer involutorischen Reihe, so besteht die Gleichung:

$$(AA_1DD') = (A_1ADD')$$

oder

$$\frac{AD}{A_1D} : \frac{AD'}{A_1D'} = \frac{A_1D}{AD} : \frac{A_1D'}{AD'},$$

woraus folgt:

$$\left(\frac{AD}{A_1D}\right)^2 = \left(\frac{AD'}{A_1D'}\right)^2.$$

Wir entnehmen aus letzterer Gleichung, dass A und A_1 durch die Doppelpunkte harmonisch getrennt werden.

Denn es ergibt sich aus derselben:

$$\frac{AD}{A_1D} = -\frac{AD'}{A_1D'}.$$

Der durch Ausziehen der Wurzel sich ergebende positive Werth hat nämlich im allgemeinen keine Geltung, da die Punkte D und D' coincidiren müssten, wenn

$$\frac{AD}{A_1D} = \frac{AD'}{A_1D'}$$

wäre.

Eine analoge Beziehung findet zwischen den Doppelstrahlen und irgend zweien sich entsprechenden Strahlen involutorischer Büschel statt. Denkt man sich nämlich den Büschel durch irgend eine Gerade geschnitten, so entsteht eine involutorische Punktreihe (Satz 52), deren Doppelpunkte in den Doppelstrahlen des Büschels liegen. Nachdem nun diese Doppelpunkte die eben nachgewiesene Eigenschaft besitzen, je zwei sich entsprechende Punkte harmonisch zu trennen, so muss dieselbe Eigenschaft auch den Doppelstrahlen bezüglich irgend zweier sich entsprechender Strahlen zukommen. Es lassen sich daher folgende Sätze aufstellen:

56. Durch die Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe wird jedes Paar sich entsprechender Punkte harmonisch getrennt.

Durch die Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels wird jedes Paar sich entsprechender Strahlen harmonisch getrennt.

Da man je zwei getrennte Punkte einer harmonischen Reihe harmonisch conjugirte Punkte nennt, so werden, mit Rücksicht auf den Satz links, je zwei entsprechende Punkte einer involutorischen Reihe auch conjugirte Punkte genannt. Aus analogem Grunde heissen entsprechende Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels auch conjugirte Strahlen.

Durch Umkehrung der eben aufgestellten Sätze erhält man die folgenden, welche ebenfalls Geltung haben:

Wenn die Doppelpunkte zweier conjectivischer Reihen jedes Paar entsprechender Punkte harmonisch trennen, so liegen die beiden Reihen involutorisch.

Wenn die Doppelstrahlen von zwei concentrischen, projectivischen Strahlenbüscheln jedes Paar entsprechender Strahlen harmonisch trennen, so liegen die beiden Büschel involutorisch.

Sind nämlich $D\ D'$ die Doppelpunkte zweier conjectivischer Reihen $R\ R_1$ und $A\ A_1$ ein Paar entsprechender Punkte der letzteren, so entspricht dem Punkte A der Punkt A_1 ob man ihn als ein Element von R oder R_1 betrachtet, wenn D und D' je zwei entsprechende Punkte harmonisch trennen, woraus

nach Satz 51 folgt, dass R und R_1 involutorisch sind. — Auf dieselbe Art kann man sich von der Richtigkeit des Satzes rechts überzeugen.

Schneidet man einen involutorischen Strahlenbüschel durch eine Gerade, welche parallel zu einem seiner Doppelstrahlen ist, so liegt ein Doppelpunkt der auf der schneidenden Geraden befindlichen involutorischen Reihe in unendlicher Entfernung und der zweite, in endlicher Entfernung gelegene Doppelpunkt halbirt dem vorhergehenden Satze zufolge jede von zwei entsprechenden Punkten begrenzte Strecke. Daraus folgt, wie leicht einzusehen, dass alle entsprechenden Strecken einander gleich sind, dass also die beiden zu einer Involution vereinigten Reihen in diesem Falle congruent sein müssen. Eine derartige, aus zwei congruenten Reihen bestehende Involution, in welcher ein Doppelpunkt alle von je zwei entsprechenden Punkten begrenzte Strecken halbirt, nennt man eine s y m e t r i s c h e Involution.

Es drängt sich hier die Frage auf, welcher Art involutorische Reihen sind, die durch Vereinigung zweier ähnlicher oder congruenter Reihen zu Stande kommen.

Sind AA_1, BB_1 zwei beliebige Paare sich entsprechender Punkte einer durch Involution von zwei ähnlichen Punktreihen entstandenen Reihe, so müsste, eben in Folge der Aehnlichkeit und mit Rücksicht auf die involutorische Lage die Gleichung bestehen:

$$\frac{AA_1}{AB} = \frac{A_1A}{A_1B_1},$$

woraus folgt, dass $AB = -A_1B_1$ ist. Man sieht also, dass die zu einer Involution vereinigten ähnlichen Reihen i m m e r c o n g r u e n t u n d e n t g e g e n g e s e t z t v e r l a u f e n d s e i n m ü s s e n, nachdem die beliebig angenommenen sich entsprechenden Strecken AB und A_1B_1 gleich gross und entgegengesetzt bezeichnet sind. Da nun zwei congruente conjectivische Reihen, welche entgegengesetzt verlaufen stets zwei Doppelpunkte haben, wovon einer in unendlicher Entfernung liegt (Satz 41), so entsteht durch die Vereinigung von zwei congruenten Reihen zu einer Involution, den obigen Erklärungen zufolge, immer eine symetrische Involution. Es gilt somit der Satz:

57. Z w e i ä h n l i c h e P u n k t r e i h e n k ö n n e n s i c h n u r d a n n z u e i n e r I n v o l u t i o n v e r e i n i g e n, w e n n s i e c o n g r u e n t s i n d u n d e n t g e g e n g e s e t z t v e r l a u f e n. S i e b i l d e n i m m e r e i n e s y m e t r i s c h e I n v o l u t i o n.

Damit ist der scheinbare Widerspruch gehoben, in welchem die Sätze 40 und 54 stehen.

58. S i n d i n e i n e r i n v o l u t o r i s c h e n P u n k t r e i h e n u r z w e i P a a r e e n t s p r e c h e n d e r P u n k t e g e g e b e n, s o i s t z u j e d e m f ü n f t e n P u n k t e d e r i h m

S i n d i n e i n e m i n v o l u t o r i s c h e n S t r a h l e n b ü s c h e l n u r z w e i P a a r e e n t s p r e c h e n d e r S t r a h l e n g e g e b e n, s o i s t z u j e d e m f ü n f t e n S t r a h l e d e r i h m

entsprechende sechste unzweideutig bestimmt.	entsprechende sechste unzweideutig bestimmt.

Heissen die gegebenen Punktpaare AA_1 und BB_1 und wäre C irgend ein Punkt, welchem der zu ermittelnde Punkt C_1 entspricht, so besteht die Gleichung

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1),$$

oder

$$\frac{AB}{A_1B} : \frac{AC}{A_1C} = \frac{A_1B_1}{AB_1} : \frac{A_1C_1}{AC_1}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Werth des Verhältnisses $\frac{A_1C_1}{AC_1}$, welches die Lage des Punktes C_1 unzweideutig angibt, durch die zwei Punktpaare AA_1, BB_1 und den Punkt C vollkommen bestimmt ist.

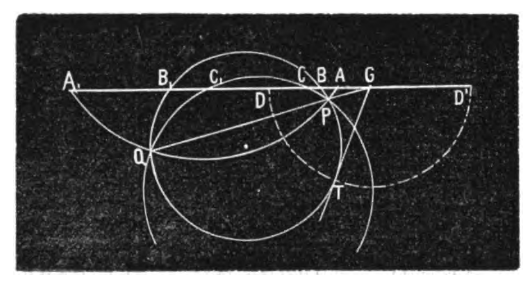
Wäre statt des Punktpaares BB_1 ein Doppelpunkt gegeben, oder würde man statt der zwei Paare von Punkten AA_1, BB_1 die Lage zweier Doppelpunkte kennen, so wäre C_1 offenbar ebenfalls bestimmt.

Der auf Strahlenbüschel sich beziehende Satz 58 kann in analoger Weise begründet werden.

Wir wollen nun die Aufgabe lösen: Wenn zwei Paare entsprechender Punkte AA_1, BB_1 einer involutorischen Reihe gegeben sind, beliebige andere sich entsprechende Punkte durch Construction zu ermitteln.

Zieht man einen beliebigen, durch A und A_1 gehenden Kreis (Fig. 19), dann einen zweiten, durch B und B_1 gehenden, welcher den ersteren schneidet und verbindet man die erhaltenen Durchschnittspunkte P und Q durch eine Gerade, so trifft letztere den Träger der involutorischen Reihe im Involutionscentrum. Denn ist G der Durchschnittspunkt von PQ mit AA_1, so besteht bekanntlich die Gleichung

(Fig. 19.)



$$PG \,.\, QG = AG \,.\, A_1G = BG \,.\, B_1G,$$

woraus folgt, dass G das Centrum der Involution sein muss. (Satz 17.)

Construirt man irgend einen dritten Kreis, welcher durch P und Q geht und den Träger der Reihe schneidet, so bilden die zwei Schnittpunkte CC_1 ein Paar sich entsprechender Punkte der involutorischen Reihe, da für dieselben die Gleichung gilt:

$$PG \,.\, QG = AG \,.\, A_1G = CG \,.\, C_1G.$$

Wäre demnach C gegeben und man sollte C_1 bestimmen, so hat man einen Kreis zu construiren, welcher durch PQ und C geht; derselbe würde C_1 enthalten.

Aus der Lage des Punktes G gegen die zwei, beziehungsweise durch AA_1 und BB_1 gehenden Kreise erkennt man sofort, ob die involutorische Reihe entgegengesetzt oder einstimmig verläuft, ob sie also Doppelpunkte besitzt oder nicht. Liegt nämlich G ausserhalb beider Kreise, so ist die Reihe entgegengesetzt verlaufend, liegt aber dieser Punkt innerhalb der Kreise, so verläuft die Reihe einstimmig. Dies folgt aus dem Satze 49, nachdem A und A_1 (sowie B und B_1) auf verschiedenen Seiten von G liegen, wenn G sich innerhalb der Kreise befindet, während diese Punkte auf derselben Seite von G liegen müssen, wenn letzterer Punkt ausserhalb der Kreise gelegen ist. Man kann daher auch sagen: Wenn sich von G aus Tangenten an die Kreise ziehen lassen, so ist die involutorische Reihe entgegengesetzt verlaufend, lässt sich keine Tangente ziehen, so verläuft die Reihe einstimmig.

Um für den Fall als die Reihe entgegengesetzt verläuft die Doppelpunkte DD' zu bestimmen, hat man nur aus dem Centralpunkte G eine Tangente an einen der beiden Kreise zu ziehen und die Entfernung dieses Punktes vom Berührungspunkte T auf dem Träger der Reihe von G aus beiderseits aufzutragen, so dass $DG = D'G = TG$ wird. Zufolge der angegebenen Construction ist nämlich

$$TG^2 = AG \,.\, A_1G = DG^2 = D'G^2,$$

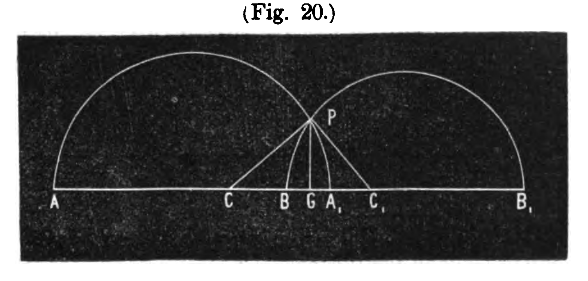
woraus sich ergibt, dass D und D' Doppelpunkte sein müssen.

Wird durch die drei Punkte PQD oder PQD' ein Kreis gezogen, so berührt derselbe den Träger der Reihe in einem Doppelpunkte D oder D'. Denn jeder durch P und Q gehende Kreis schneidet den Träger dieser Reihe in zwei einander entsprechenden Punkten, folglich muss ein Kreis, dessen Durchschnittspunkte coincidiren, der also den genannten Träger berührt, einen Doppelpunkt enthalten.

Aus diesen Untersuchungen ergibt sich auch, dass wenn man mehrere in derselben Ebene befindliche Kreise, welche durch zwei gemeinschaftliche Punkte PQ gehen, durch irgend eine Gerade schneidet, auf letzterer Geraden immer eine involutorische Punktreihe zu Stande kommt.

Wenn die Strecken, welche von den gegebenen Punkten AA_1 und BB_1 einer involutorischen Reihe begrenzt sind, sich übergreifen (Fig. 20), so kann zur Bestimmung des Centralpunktes und irgend eines dritten Paares sich entsprechender Punkte folgende einfache Construction angewendet werden. Man beschreibt über AA_1 und über BB_1 je einen Halbkreis und

(Fig. 20.)



fällt aus dem Durchschnittspunkte P derselben eine Senkrechte auf den Träger

der Reihe. Wie leicht einzusehen, muss der Fusspunkt G letzterer Senkrechten der Centralpunkt der Involution sein, da die Gleichung besteht:

$$PG^2 = AG \cdot A_1G = BG \cdot B_1G.$$

Dass G immer zwischen A und A_1, sowie zwischen B und B_1 fällt, bedarf keiner weiteren Erklärung. Die Reihe ist also eine einstimmig verlaufende. (Satz 49). Man kann daraus schliessen, dass eine involutorische Reihe stets einstimmig verläuft, sobald zwei ihrer Strecken, deren jede von einem Paare sich entsprechender Punkte begrenzt wird, sich übergreifen, d. h. sobald ein Paar entsprcehender Punkte durch ein anderes Paar solcher Punkte getrennt wird. Ist hingegen ein Paar entsprechender Punkte durch ein zweites nicht getrennt, so liegen (wie aus der in Fig. 19 dargestellten Construction zu ersehen ist) zwei entsprechende Punkte immer auf derselben Seite vom Centralpunkte und die Reihe muss entgegengesetzt verlaufen.

Sind somit nur zwei Paare sich entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe gegeben, so kann man sofort entscheiden, ob die Reihe entgegengesetzt oder einstimmig verläuft.

Auch über die Richtung des Verlaufens involutorischer Strahlenbüschel kann kein Zweifel bestehen, sobald nur zwei Paare entsprechender Strahlen gegeben sind. Wird nämlich jedes Paar durch das andere getrennt, so verläuft der Büschel einstimmig, findet keine Trennung des einen Paares durch das andere statt, so ist der Büschel entgegengesetzt verlaufend. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus den vorhergehenden Betrachtungen, wenn man sich die Büschel durch eine beliebige Gerade geschnitten denkt.

Wäre irgend ein fünfter Punkt C (Fig. 20) der in Rede stehenden Reihe gegeben und man hätte jenen Punkt C_1 zu ermitteln, welcher dem Punkte C entspricht, so verbinde man C mit P und errichte in P eine Senkrechte auf CP; die so erhaltene Senkrechte schneidet AA_1 im verlangten Punkte C_1, denn es ist

$$PG^2 = CG \cdot C_1G = AG \cdot A_1G.$$

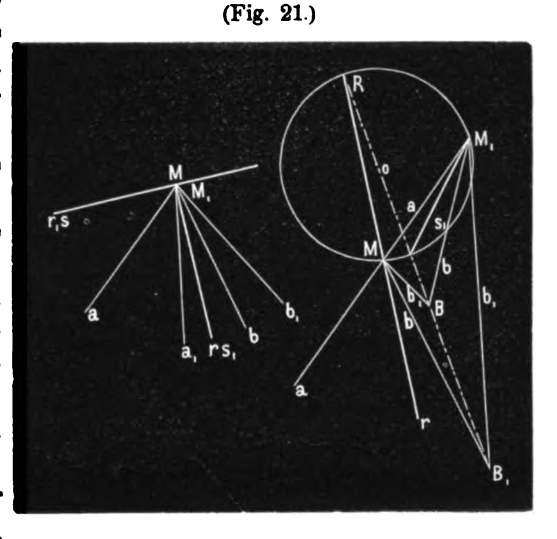
Aus dieser Construction folgt, dass die Schenkel eines jeden rechten Winkels, dessen Scheitel sich in P befindet und dessen Ebene durch den Träger der involutorischen Reihe geht, zwei entsprechende Punkte dieser Reihen enthalten. Man kann sich demnach vorstellen jede einstimmig verlaufende involutorische Reihe sei durch die Schnittpunkte der Schenkel eines rechten Winkels mit einer in der Ebene desselben befindlichen Geraden entstanden, wenn der rechte Winkel um seinen Scheitel so gedreht wird, dass er immer in derselben Ebene bleibt.

Hieraus folgt auch, dass es in jeder Ebene, welche eine einstimmig verlaufende involutorische Reihe enthält, zwei zu verschiedenen Seiten der Reihe liegende und von ihr gleich weit entfernte Punkte gibt, von denen aus jede durch entsprechende Punkte begrenzte Strecke dieser Reihe unter einem rechten Sehwinkel erscheint.

Da die Schenkel des gedrehten rechten Winkels einen Strahlenbüschel erzeugen, dessen Schnitte die involutorische Reihe ist, so muss dieser Strahlenbüschel selbst involutorisch sein. Nachdem ferner in letzterem je zwei sich entsprechender Strahlen auf einander senkrecht stehen, so bildet der durch Drehung des rechten Winkels entstandene Büschel eine rechtwinklige Involution. (Satz 55).

Sind zwei Paare entsprechender Strahlen aa_1 und bb_1 (Fig. 21) eines involutorischen Strahlenbüschels gegeben und man wollte die Normalstrahlen rs_1 und r_1s bestimmen, so kann man auf folgende Weise verfahren. Man construirt jeden der beiden gegebenen, zu einer Involution vereinigten Büschel S und S_1 für sich, so dass ihre Mittelpunkte MM_1 nicht coincidiren, gibt ihnen jedoch eine solche Lage, dass sie einen Strahl, etwa aa_1 entsprechend gemein haben, also perspectivisch sind. Die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte B und B_1 zweier Paare sich entsprechender Strahlen (bb_1 und b_1b) muss offenbar der Träger einer Punktreihe sein, von welcher S und S_1 Scheine bilden. Wird nun ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt o in BB_1 liegt, und welcher durch die Punkte M und M_1 geht, so müssen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel durch die Schnittpunkte des Kreises und der Geraden BB_1 gehen. Verbindet man demnach M mit einem dieser Schnittpunkte, etwa mit R, so ergibt sich ein Schenkel r jenes entsprechenden rechten Winkels, der dem Büschel S angehört und man hat schliesslich nur noch aus dem Mittelpunkte des gegebenen involutorischen Büschels einen Strahl zu ziehen, der mit a denselben Winkel einschliesst, welchen r mit aa_1 bildet um die Aufgabe gelösst zu haben.

(Fig. 21.)



Wenn sich die Winkel, welche von je einem der gegebenen Paare entsprechender Strahlen aa_1 und bb_1 gebildet werden, nicht übergreifen, wenn also der involutorische Strahlenbüschel entgegengesetzt verläuft, so sind in demselben Doppelstrahlen vorhanden und die Normalstrahlen lassen sich dann auch mit Benützung der Doppelstrahlen wie folgt bestimmen. Man schneidet den gegebenen Büschel durch eine beliebige Gerade, ermittelt in der als Schnitt sich ergebenden involutorischen Reihe die Doppelpunkte, verbindet letztere mit dem Mittelpunkte des Büschels, wodurch die Doppelstrahlen erhalten werden, und halbirt den Winkel, welcher von den Doppelstrahlen gebildet wird. Die

Halbirungslinie ist dann offenbar einer der Normalstrahlen, nachdem diese Strahlen den Winkel zweier Doppelstrahlen bekanntlich immer halbiren.

Wäre ausser den Strahlen aa_1 und bb_1 noch ein fünfter Strahl c gegeben und man wollte jenen Strahl c_1 bestimmen, welchem c entspricht, so schneidet man den gegebenen Büschel durch eine beliebige Gerade und construirt in der oben erklärten Weise den Punkt C_1 der involutorischen Reihe $AA_1BB_1CC_1$, welche durch den Schnitt des Büschels mit der Geraden zu Stande kommt.

Nicht selten bildet eine Gerade g den Träger von zwei involutorischen Reihen R und R' und man hat jene Punkte von g zu ermitteln, welche sowohl in R, als auch in R' einander entsprechen. Wir wollen nun zeigen, wie man solche Punkte bestimmt, und unter welchen Umständen keine reellen derartigen Punkte vorhanden sein können. Die Reihe R denken wir uns aus den projectivischen Reihen r, r_1, die Reihe R' aus den projectivischen Reihen r', r'_1 gebildet und setzen im allgemeinen voraus, dass keine der Reihen, welche R bilden, den Reihen, aus welchen R' besteht, projectivisch verwandt sei.

Bezüglich des Verlaufens von R und R' können drei verschiedene Fälle eintreten:

1. beide Reihen verlaufen einstimmig.
2. Eine Reihe verläuft einstimmig, die andere entgegengesetzt.
3. Beide Reihen verlaufen entgegengesetzt.

Im Falle 1 gibt es auf jeder Seite von g einen Punkt P (Fig. 20), in welchem sich alle Kreise schneiden, die über den von entsprechenden Punkten begrenzten Strecken von R aus einem in g liegenden Mittelpunkte beschrieben werden. Für R' existirt ebenfalls zu beiden Seiten von g ein Punkt P', der dieselbe Bedeutung bezüglich R' hat, wie P für R. Jener Kreis, welcher durch P und P' geht und dessen Mittelpunkt in g liegt, schneidet g in zwei Punkten, die einander sowohl in R, als auch in R' entsprechen.

Nimmt man im Falle 2 an R verlaufe einstimmig und R' entgegengesetzt, so gibt es für R zu beiden Seiten von g einen Punkt P von der eben erklärten Bedeutung. Wird P mit den Punkten von R' durch gerade Linien verbunden, so erhält man einen involutorischen Strahlenbüschel, dessen Normalstrahlen die Gerade g offenbar in Punkten treffen, welche einander sowohl in R, als auch in R' entsprechen.

Im Falle 3 haben beide involutorische Reihen Doppelpunkte, welche DD' und dd' heissen mögen. Jene Punkte CC_1 von g, welche sowohl DD', als auch dd' harmonisch trennen, sind offenbar entsprechende Punkte in beiden Reihen R und R'. Betrachtet man DD' und dd' als zwei Paare entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe und bestimmt, wie oben erklärt wurde (Fig. 19) die Doppelpunkte dieser Reihe, so erhält man die Punkte CC_1. Nachdem die involutorische Reihe, welche durch DD', dd' bestimmt wird, nur dann reelle Doppelpunkte hat, wenn sie entgegengesetzt verläuft, was immer der Fall ist, wenn DD' durch die Punkte dd' nicht getrennt werden, so gibt es immer

zwei reelle Punkte CC_1, ausser in dem Falle, wenn die Strecken DD' und dd' sich theilweise übergreifen.

Für zwei concentrisch liegende involutorische Strahlenbüschel ergeben sich analoge Resultate, wir können somit behaupten:

59. Zwei auf derselben Geraden befindliche involutorische Punktreihen haben immer ein gemeinschaftliches Paar entsprechender Punkte ausser in dem Falle, wenn beide Reihen entgegengesetzt verlaufen und die Doppelpunkte der einen Reihe durch jene der anderen Reihe getrennt werden.

Zwei concentrische involutorische Strahlenbüschel haben immer ein gemeinschaftliches Paar entsprechender Strahlen ausser in dem Falle, wenn die beiden Büschel entgegengesetzt verlaufen und die Doppelstrahlen des einen Büschels durch jene des anderen Büschels getrennt werden.

f) Ebenenbüschel. Ihre projectivischen Beziehungen zu den übrigen Grundgebilden der ersten Stufe.

Die Durchschnittspunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels mit einer beliebigen Geraden, welche die Axe des Büschels weder schneidet noch zu ihr parallel ist, bilden eine Punktreihe, die man als einen geradlinigen Schnitt des Büschels ansehen kann. Befinden sich eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel in solcher Lage gegen einander, dass die Reihe einen geradlinigen Schnitt des Büschels bildet, so sagt man, dass die beiden Grundgebilde gegen einander perspectivisch liegen oder kürzer, dass sie perspectivisch sind.

Eine Punktreihe R und ein Ebenenbüschel E sind projectivisch verwandt, wenn es eine gegen E perspectivisch liegende Punktreihe R_1 gibt, welche mit R projectivisch verwandt ist. Sind A und A_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte der Reihen R und R_1 und bezeichnet man durch α jene Ebene des Büschels, welche durch A_1 geht, so werden A und α entsprechende Elemente der Reihe R und des Büschels genannt. Liegen eine Punktreihe und ein ihr projectivisch verwandter Ebenenbüschel nicht perspectivisch, so sagt man, dass sie eine schiefe Lage gegen einander haben. Eine Punktreihe, welche gegen einen Ebenenbüschel perspectivisch liegt, ist selbstverständlich mit dem letzteren immer auch projectivisch verwandt.

Schneidet man einen Ebenenbüschel durch irgend eine Ebene, welche die Axe nicht enthält, so ist der entstehende Schnitt ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der schneidenden Ebene mit der Axe ist. — Wenn ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel sich in solcher Lage gegen

einander befinden, dass der erstere einen ebenen Schnitt des letzteren bildet, so sagt man, dass die beiden Grundgebilde gegen einander perspectivisch liegen oder kürzer dass sie perspectivisch sind.

Ein Ebenen- und ein Strahlenbüschel sind projectivisch verwandt, wenn sie durch je eine Gerade so geschnitten werden können, dass die entstehenden Punktreihen projectivisch werden.

Heissen diese Punktreihen R und R_1 und sind A und A_1 irgend zwei entsprechende Punkte derselben, so nennt man jene Ebene und jenen Strahl, welche beziehungsweise durch A und A_1 gehen, entsprechende Elemente der beiden Büschel.

Jeder Strahlenbüschel, der gegen einen Ebenenbüschel perspectivisch liegt, ist offenbar mit letzterem projectivisch verwandt. Von einem Ebenenbüschel und einem mit demselben projectivisch verwandten Strahlenbüschel sagt man, wenn sie nicht perspectivisch liegen, dass sie sich in schiefer Lage gegen einander befinden.

Ist die einen Ebenenbüschel schneidende Ebene parallel zur Axe des letzteren, so entsteht als Schnitt ein Parallelstrahlenbüschel.

60. Zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel, welche einen Strahl entsprechend gemein haben und nicht in derselben Ebene liegen, bilden ebene Schnitte ein und desselben Ebenenbüschels; man sagt daher von solchen Strahlenbüscheln auch, dass sie perspectivisch liegen.

Der Beweis für diesen Satz kann wie folgt geführt werden. Die beiden Strahlenbüschel nennen wir S und S_1 und den Strahl, welchen sie entsprechend gemein haben, a. Schneidet man sowohl S, als auch S_1 durch je eine zu a parallele Gerade, so ergeben sich zwei Punktreihen R und R_1, welche ähnlich sein müssen, da sie projectivisch sind und ihre unendlich fernen Punkte, nämlich die Durchschnitte der schneidenden Geraden mit a, einander entsprechen. Nachdem R und R_1 einen Punkt, und zwar den unendlich fernen, entsprechend gemein haben, so liegen sie perspectivisch (Satz 4) und sind daher Schnitte ein und desselben Strahlenbüschels S_2, dessen Mittelpunkt wir M_2 nennen wollen. Wie leicht einzusehen enthält jede Ebene, welche durch ein Paar entsprechender Strahlen von S und S_1 gelegt wird, einen Strahl des Büschels S_2 und geht somit durch M_2; da jede solche Ebene aber auch durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt M der Strahlenbüschel $S\,S_1$ geht, so haben alle durch je ein Paar entsprechender Strahlen der zuletzt genannten Büschel gehende Ebenen die Verbindungslinie der Punkte M und M_2 gemein und bilden somit einen Ebenenbüschel. Es erscheint demnach obiger Satz gerechtfertigt.

61. Wird ein Ebenenbüschel durch beliebige Ebenen geschnitten, so liegen je zwei der entsprechenden Strahlenbüschel gegen einander perspectivisch, sie sind demnach alle projectivisch verwandt. Sind die schneidenden Ebenen

parallel und schneiden sie die Axe des Ebenenbüschels, in endlicher Entfernung so entstehen congruente Strahlenbüschel; sind sie unter sich und zur Axe des Ebenenbüschels parallel, so entstehen ähnliche Parallelstrahlenbüschel.

Dass je zwei der sich als Schnitte ergebenden Strahlenbüschel S und S_1 perspectivisch liegen, ist leicht einzusehen, wenn man daran denkt, dass die Ebenen zweier solcher Büschel sich im allgemeinen in einer Geraden schneiden müssen, deren Durchschnittspunkte mit den einzelnen Elementen des Ebenenbüschels zugleich die Durchschnittspunkte zweier Strahlen von S und S_1 sind. Aus dem Umstande aber dass je zwei der sich als Schnitt ergebenden Strahlenbüschel perspectivisch liegen ergibt sich unmittelbar, dass je zwei derselben, folglich alle untereinander projectivisch verwandt sein müssen.

Uebrigens folgt der obige Satz auch daraus, dass von je zwei der in Rede stehenden Strahlenbüschel der eine immer als die Projection des anderen betrachtet werden kann. Als Projectionscentrum kann man offenbar jeden in der Axe des Ebenenbüschels gelegenen Punkt annehmen.

Die Behauptung, dass parallele ebene Schnitte eines Ebenenbüschels congruente Strahlenbüschel sind, bedarf wohl keines Beweises. — Was schliesslich die Entstehung ähnlicher Parallelstrahlenbüschel durch schneidende Ebenen anbelangt, welche unter sich und parallel zur Axe des Ebenenbüschels sind, so kann der hierauf bezügliche Theil des obigen Satzes damit gerechtfertigt werden, dass man annimmt der Ebenenbüschel, sowie die schneidenden Ebenen würden durch irgend eine zur Axe nicht parallele Ebene geschnitten. Der so entstehende Strahlenbüschel und die parallelen Ebenen schneiden sich in ähnlichen Punktreihen, deren Scheine die fraglichen Parallelstrahlenbüschel sind, daher müssen letztere ebenfalls ähnlich sein.

62. Wird ein Ebenenbüschel durch beliebige Gerade geschnitten, so sind alle auf diesen Geraden sich ergebende Punktreihen projectivisch verwandt. Sind die schneidenden Geraden zu ein und demselben Elemente des Ebenenbüschels parallel, so entstehen ähnliche Punktreihen. Treffen sich zwei der schneidenden Geraden, so liegen die Punktreihen, deren Träger diese Geraden sind, perspectivisch und ihr Projectionscentrum befindet sich in der Axe des Ebenenbüschels.

Um diess einzusehen denke man sich durch jede der Punktreihen eine beliebige Ebene gelegt, welche den Ebenenbüschel schneidet. Die als Schnitte sich ergebenden Strahlenbüschel sind nach Satz 61 projectivisch verwandt, folglich müssen es auch die in Rede stehenden Punktreihen sein, welche gegen sie perspectivisch liegen.

Dass durch schneidende Gerade, welche zu ein und derselben Ebene des Ebenenbüschels parallel sind, ähnliche Punktreihen entstehen müssen, lässt

sich wie folgt beweisen. Nennen wir der Kürze des Ausdruckes wegen R und R_1 die bieden Punktreihen und sind A und A_1 zwei ihrer Punkte, welche in derselben Ebene des Büschels liegen, so entsprechen sich A und A_1. Ist die Ebene, in der sich diese zwei Punkte befinden, parallel zu R und R_1, so liegen A und A_1 in unendlicher Entfernung und da sie entsprechende Punkte sind, so müssen R und R_1 ähnlich sein.

Der Beweis für den letzten Theil des obigen Satzes ergibt sich aus dem Umstande, dass der Punkt, in welchem zwei der sich schneidenden Geraden sich treffen, ein Punkt sein muss, der den auf beiden Geraden befindlichen Punktreihen entsprechend gemein ist und dass ferner, wenn man durch beide Gerade eine Ebene legt, der entstehende ebene Schnitt ein Strahlenbüschel ist, dessen Centrum in der Axe des Ebenenbüschels gelegen sein muss.

Bezüglich der Schnitte eines Parallel-Ebenenbüschels mit Geraden und Ebenen gilt der leicht zu beweisende Satz:

63. **Wird ein Parallel-Ebenenbüschel durch beliebige Gerade geschnitten, so sind alle entstehenden Punktreihen einander ähnlich. Sind die schneidenden Geraden parallel, so ergeben sich congruente Reihen. Wird ein solcher Ebenenbüschel durch beliebige Ebenen geschnitten, so sind die Schnitte ähnliche Parallel-Strahlenbüschel; sind die schneidenden Ebenen unter einander parallel, so werden letztere Büschel congruent.**

Von einem Ebenenbüschel, der gegen eine Punktreihe, oder einen Strahlenbüschel perspectivisch liegt, sagt man, dass er für das betreffende Grundgebilde **projicirend** sei. Liegen zwei Punktreihen gegen ein und denselben Ebenenbüschel perspectivisch, so kann man jede von ihnen als Projection der anderen auffassen. Analoge Beziehungen finden bezüglich zweier Strahlenbüschel statt, welche sich als Schnitte desselben Ebenenbüschels ergeben. Die Elemente des letzteren können in beiden Fällen als **projicirende Ebenen** betrachtet werden.

Ist ein Strahlenbüschel der Schnitt eines Ebenenbüschels, so sagt man auch, dass letzterer ein **Schein** des ersteren Büschels sei.

Schneidet man zwei Ebenenbüschel durch je eine Gerade und sind die entstehenden Punktreihen projectivisch, so sagt man, dass die beiden Büschel **projectvisch** verwandt sind.

Heissen die beiden Punktreihen, welche Schnitte der Büschel E und E_1 sind, beziehungsweise R und R_1 und bezeichnet man durch A und A_1 irgend zwei entsprechende Punkte dieser Reihen, so nennt man die Ebene des Büschels E, welche durch den Punkt A geht, und die durch A_1 gehende Ebene des Büschels E_1 **entsprechende** Elemente beider Ebenenbüschel.

Man kann übrigens in zwei Grundgebilden der ersten Stufe jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des andern als entsprechend **zuwei-**

sen abgesehen davon ob die beiden Gebilde projectivisch sind oder nicht. Von zwei solchen Grundgebilden sagt man, dass sie auf einander bezogen sind.

Aus der Erklärung über die projectivische Verwandtschaft zweier Ebenenbüschel und den Sätzen 61, 62 ergibt sich:

64. Alle geradlinigen und ebenen Schnitte beliebig vieler projectivischer Ebenenbüschel sind unter einander projectivisch verwandt.

Mit Hilfe des Satzes 1 und des letzteren lässt sich folgender die Grundgebilde der ersten Stufe betreffende allgemeine Satz rechtfertigen:

65. Wenn zwei Grundgebilde der ersten Stufe projectivisch verwandt sind, so müssen sie es auch unter einander sein.

Um diesen Satz nachzuweisen sollte man strenge genommen alle 18 Fälle, die er umfasst, besonders betrachten.

Insoferne sich derselbe auf Punktreihen und Strahlenbüschel bezieht, wurde er bereits erörtert (Satz 1). Da es zu weit führen würde alle übrigen Fälle zu behandeln, so wollen wir nur einige untersuchen, in welchen auch Ebenenbüschel vorausgesetzt werden.

Sind z. B. eine Punktreihe R und ein Ebenenbüschel E mit einem Strahlenbüschel S projectivisch, so müssen auch R und E projectivisch sein. Dies lässt sich wie folgt zeigen. Da R und S project visch sind, so muss S der Schein einer Punktreihe R_1 sein, welche mit R projectivisch ist. Da ferner E und S projectivisch sein sollen, so ist S der Schein einer Reihe R_2, welche mit einer gegen E perspectivisch liegenden Reihe R_3 projectivisch ist. Nachdem nun R_1 und R_2 Schnitte ein und desselben Strahlenbüschels sind, so müssen sie projectivisch sein, folglich sind R und R_3, also auch R und E projectivisch.

Hat man zwei Punktreihen R und R_1, welche beide mit einem Ebenenbüschel E projectivisch sind und es soll nachgewiesen werden, dass R und R_1 in Folge dessen auch unter sich projectivisch sein müssen, so kann man wie folgt verfahren. Da R und E projectivisch sein sollen, so muss E für eine Punktreihe R_2 projicirend sein, welche mit R projectivisch ist. Ebenso muss es eine gegen E perspectivisch liegende Punktreihe R_3 geben, welche mit R_1 projectivisch ist, nachdem auch R_1 und E projectivisch sein sollen. Nachdem nun R_2 und R_3 nach Satz 62 projectivisch sind, so ist R mit R_3, also auch mit R_1 projectivisch verwandt.

Auf ähnliche Art kann man den Beweis für alle übrigen möglichen Fälle durchführen.

Schneidet man einen Ebenenbüschel durch eine Ebene, welche senkrecht auf der Axe steht und heissen die Schnitte dieser Ebene mit zwei Elementen α und β des Büschels a und b, so gibt der Winkel ab die Grösse des Flächenwinkels $\alpha\beta$ an.

Sind A und B irgend zwei Punkte einer Punktreihe R, welche mit einem Ebenenbüschel projectivisch verwandt ist, und heissen $\alpha\beta$ die den Punkten AB

entsprechenden Ebenen des letzteren, so sagt man, dass die von A und B begrenzte Strecke und der von α und β gebildete Flächenwinkel sich entsprechen.

Ist ein Strahlenbüschel S mit einem Ebenenbüschel projectivisch verwandt und entsprechen den Strahlen a und b des ersteren die Ebenen α und β des letzteren, so nennt man die Winkel ab und $\alpha\beta$ einander entsprechende Winkel.

Bezeichnen α und β irgend zwei Ebenen eines Ebenenbüschels und $\alpha_1\beta_1$ die den Ebenen $\alpha\beta$ entsprechenden Elemente eines zweiten Ebenenbüschels, so werden die Flächenwinkel $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ entsprechende Winkel genannt.

Wenn ein Ebenenbüschel durch eine Ebene geschnitten wird, welche auf seiner Axe senkrecht steht, so ist jeder Winkel des sich als Schnitt ergebenden Strahlenbüschels dem ihm entsprechenden Flächenwinkel des Ebenenbüschels gleich. Es muss demnach auch das Doppelverhältniss von vier Strahlen $abcd$ des in Rede stehenden Strahlenbüschels dem Doppelverhältnisse der diesen Strahlen entsprechenden vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ des Ebenenbüschels gleich sein. Nun sind aber alle ebenen und geradlinigen Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels unter einander und mit letzterem projectivisch verwandt (Sätze 61 und 62), es muss also das Doppelverhältniss von vier beliebigen Elementen irgend einer Punktreihe oder eines Strahlenbüschels dem Doppelverhältnisse der diesen Elementen entsprechenden Ebenen eines Ebenenbüschels gleich sein, wenn letzterer mit den genannten Grundgebilden projectivisch verwandt ist. Aus dem Satze 64 und aus den zuletzt angestellten Betrachtungen folgt auch, dass wenn zwei Ebenenbüschel projectivisch verwandt sind, das Doppelverhältniss von vier beliebigen Elementen des einen Büschels dem Doppelverhältnisse der diesen Elementen entsprechenden vier Ebenen des anderen Büschels gleich sein muss. Es lässt sich demnach folgender allgemeinere Satz aufstellen:

66. Sind zwei Grundgebilde der ersten Stufe projectivisch verwandt, so ist das Doppelverhältniss von beliebigen vier Elementen des einen Gebildes gleich dem Doppelverhältnisse der diesen vier Elementen entsprechenden Elemente des anderen Grundgebildes.

Bezeichnet man also durch $ABCD$ vier beliebige Elemente einer Punktreihe R, welche mit einem Strahlenbüschel S und einem Ebenenbüschel E projectivisch verwandt ist, und heissen $abcd$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ beziehungsweise die Elemente von S und E, welche den Punkten $ABCD$ entsprechen, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \beta\gamma} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \beta\delta},$$

welche man symbolisch auch schreibt:

$$(ABCD) = (abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta).$$

Für zwei projectivisch verwandte Ebenenbüschel E und E_1 würde die Gleichung gelten:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)=(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$$

wenn $\alpha\beta\gamma\delta$ vier beliebige Elemente von E und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ die den genannten Elementen entsprechenden des Büschels E bezeichnen.

Der Satz 66 lässt sich auch umkehren, wodurch sich ergibt:

67. Ist das Doppelverhältniss von beliebigen vier Elementen eines Grundgebildes der ersten Stufe gleich dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Elemente eines zweiten solchen Gebildes, so sind die beiden Grundgebilde projectivisch verwandt.

Bezüglich der Punktreihe und des Strahlenbüschels wurde dieser Satz bereits nachgewiesen (Sätze 3, 6, 9), es erübrigt also noch zu zeigen, dass er auch bezüglich eines Ebenenbüschels und irgend eines zweiten Grundgebildes der ersten Stufe gilt. Wir beschränken uns darauf, von den möglichen drei Fällen, welche hier eintreten können nur einen zu betrachten, da es nicht schwer fällt die betreffenden Beweise durchzuführen. Nehmen wir z. B. an das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten einer Punktreihe R sei gleich dem Doppelverhältnisse der vier diesen Punkten entsprechenden Ebenen eines Ebenenbüschels E, so muss jener Strahlenbüschel S, der zu Stande kommt, wenn man einen gegen die Axe des Büschels E senkrechten Schnitt führt, nach Satz 9 mit R projectivisch verwandt sein. Da ferner nach Satz 64 jeder geradlinige Schnitt des Ebenenbüschels E mit S projectivisch verwandt ist, so müssen auch R und E projectivisch sein.

Zwei Ebenenbüschel befinden sich in perspectivischer Lage, oder sind perspectivisch, wenn sie gegen ein und denselben Strahlenbüschel perspectivisch liegen. Solche Ebenenbüschel sind demnach Scheine ein und desselben Strahlenbüschels und letzterer bildet einen gemeinsamen Schnitt der ersteren, welcher der perspectivische Durchschnitt der zwei Ebenenbüschel genannt wird. Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar, dass die Axen von zwei perspectivischen Ebenenbüscheln sich schneiden müssen; der Durchschnittspunkt befindet sich im Mittelpunkte des Strahlenbüschels, dessen Scheine die beiden Ebenenbüschel sind.

68. Wenn zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, für ein und dieselbe Punktreihe projicirend sind, so liegen sie gegen einander perspectivisch.

Um dies einzusehen, denke man sich durch die Punktreihe und den Durchschnittspunkt der Axen eine Ebene gelegt, welche beide Ebenenbüschel schneidet. Der mit letzteren sich ergebende Schnitt ist dann offenbar ein einziger Strahlenbüschel, von welchem die Ebenenbüschel Scheine sind, woraus folgt, dass diese Büschel gegen einander perspectivisch liegen.

Wenn die Axen zweier Ebenenbüschel sich schneiden, so kann es sein, dass die Ebene des einen Büschels, welche durch beide Axen geht, jener Ebene

des andern Büschels entspricht, welche ebenfalls durch beide Axen geht. In diesem Falle sagt man, dass die beiden Ebenenbüschel ein Element, nämlich die durch beide Axen bestimmte Ebene entsprechend gemein haben. Wie leicht einzusehen, müssen umgekehrt die Axen zweier Ebenenbüschel, welche ein Element entsprechend gemein haben sollen, sich schneiden, nachdem sie ja beide in diesem Elemente liegen.

69. Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel ein Element entsprechend gemein haben, so liegen sie gegen einander perspectivisch.

Denkt man sich die beiden Büschel durch irgend eine Ebene geschnitten, so entstehen zwei Strahlenbüschel S und S_1, welche in derselben Ebene liegen und einen Strahl entsprechend gemein haben. Da nun S und S_1 demzufolge gegen einander perspectivisch liegen müssen, so schneiden sie sich in einer Punktreihe. Für diese Reihe ist jeder der zwei Ebenenbüschel projicirend, folglich befinden sich letztere, da auch ihre Axen sich schneiden nach Satz 68 in perspectivischer Lage.

Aus dem Satz 69 geht hervor, dass man zwei projectivische Ebenenbüschel immer dadurch in perspectivische Lage bringen kann, dass man zwei ihrer Elemente, welche sich entsprechen, zur Coincidenz bringt.

70. Befinden sich die drei Durchschnittslinien von drei Paaren sich entsprechender Elemente zweier projectivischer Ebenenbüschel in derselben Ebene, so sind die beiden Büschel gegen einander perspectivisch gelegen.

Der Beweis für diese Behauptung lässt sich leicht herstellen, wenn man zuerst zeigt, dass die drei Durchschnittslinien, welche wir durch abc bezeichnen wollen, zufolge der Voraussetzung, dass sie in einer und derselben Ebene liegen, sich in einem Punkte schneiden müssen, der den Axen der beiden Ebenenbüschel gemeinschaftlich angehört. Nennen wir die beiden Ebenenbüschel E und E_1 und die Elemente von E und E_1, welche mit den ihnen entsprechenden Elementen die Schnitte abc geben, beziehungsweise $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Nachdem a in der Ebene α und b in der Ebene β gelegen ist und zufolge der gemachten Voraussetzung dass a und b sich schneiden sollen, kann dieser Durchschnitt nur im Schnitte von α und β, also in der Axe des Büschels E stattfinden. Dasselbe gilt offenbar für ac und für bc, es müssen sich daher a,b und c in ein und demselben Punkte der genannten Axe treffen. Da man ferner dieselbe Betrachtung auch bezüglich des Büschels E_1 anstellen kann, so gelangt man zu dem Resultate, dass abc sich auch in ein und demselben Punkte der Axe von E_1 schneiden, woraus folgt, dass die Axen von E und E_1 im Durchschnittspunkte von abc zusammentreffen müssen.

Schneidet man nun beide Büschel durch jene Ebene, in welcher sich abc befinden, so erhält man als Schnitte zwei projectivische Strahlenbüschel, welche die drei Geraden abc, also nach Satz 10 alle ihre Elemente entsprechend

gemein haben. Die Ebene der Geraden *abc* schneidet somit E und E_1 in ein und demselben Strahlenbüschel, was nur dann möglich ist, wenn die beiden Ebenenbüschel perspectivisch liegen.

Von zwei Grundgebilden der ersten Stufe, welche nicht perspectivisch sind, sagt man, dass sie sich in schiefer Lage gegen einander befinden. Zwei Ebenenbüschel liegen demnach schief gegen einander, wenn ihre Axen sich nicht schneiden, oder, in dem Falle als ein Zusammentreffen der Axen stattfindet, wenn die Ebene, welche durch beide Axen bestimmt wird, den beiden Büscheln nicht entsprechend gemein ist, oder endlich, wenn die Durchschnittslinien von drei Paaren sich entsprechender Ebenen nicht in ein und derselben Ebene liegen.

Wenn zwei Ebenenbüschel drei ihrer Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man annimmt, beide Büschel würden durch irgend eine Ebene geschnitten. Der entstehende Schnitt wäre offenbar ein einziger Strahlenbüschel; denn nimmt man auch an, dass sich zwei Strahlenbüschel ergeben, so müssten dieselben nach Satz 10 identisch sein, da sie drei ihrer Elemente, nämlich diejenigen, welche in den drei gemeinschaftlichen Ebenen der Ebenenbüschel liegen, entsprechend gemein haben. — Mit Rücksicht auf den eben erwähnten Satz lässt sich nun der folgende, allgemeinere aufstellen:

71. Wenn zwei gleichartige projectivische Grundgebilde der ersten Stufe drei ihrer Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein und sind daher identisch.

Eine Verallgemeinerung des Satzes 11 ist der nachstehende:

72. Will man zwei Grundgebilde der ersten Stufe projectivisch auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben drei Elemente beliebig wählen und einander als entsprechend zuweisen; jedem vierten Elemente des einen Grundgebildes entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des anderen.

Nachdem dieser Satz, insoferne er sich auf Punktreihen und Strahlenbüschel bezieht, bereits nachgewiesen wurde (Satz 11), so haben wir denselben nur mehr für jene Fälle zu rechtfertigen, in welchen eines der zwei Grundgebilde ein Ebenenbüschel ist, oder alle beide Ebenenbüschel sind. Die Beweise für diese Fälle lassen sich mit Hilfe des Satzes 11 immer leicht durchführen; wir wollen daher nur einen der letzteren betrachten. Sind z. B. drei Ebenen $\alpha\beta\gamma$ eines Ebenenbüschels E, ein mit E projectivisch verwandter Strahlenbüschel S und drei Elemente *abc* des letzteren gegeben, welche den Elementen $\alpha\beta\gamma$ entsprechen sollen, so sind alle Elemente von E vollkommen bestimmt. Schneidet man nämlich $\alpha\beta\gamma$ durch irgend eine Ebene, so erhält man als Schnittlinien drei Strahlen $a_1 b_1 c_1$ eines Strahlenbüschels S_1, welcher gegen E perspec-

tivisch liegt und mit S projectivisch verwandt ist. Da abc und $a_1b_1c_1$ sich entsprechen, so kann zu jedem beliebigen Strahle d des Büschels S ein Strahl d_1 des Büschels S_1, aber auch nur einer, ermittelt werden, es erscheint daher jene Ebene, welche durch den Strahl d_1 geht, vollkommen bestimmt. Nachdem nun d beliebig gewählt wurde, so muss auch jedem anderen Strahle von S eine bestimmte Ebene von E entsprechen, woraus folgt, dass alle Elemente von E durch die gemachten Voraussetzungen unzweideutig bestimmt sind.

73. Wenn zwei Grundgebilde der ersten Stufe so auf einander bezogen sind, dass jedem Elemente des einen ein einziges Element des anderen entspricht, so sind die beiden Grundgebilde projectivisch verwandt.

Zunächst wollen wir diesen Satz für den Fall nachweisen, in welchem er sich auf zwei Punktreihen bezieht. Nennen wir R und R_1 die zwei Reihen und AA_1, CC_1 irgend zwei Paare sich entsprechender Punkte, so muss unserer Voraussetzung zufolge die Gleichung bestehen:

$$AC \cdot A_1C_1 + mAC + nA_1C_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha$$

da jede Gleichung, aus welcher sich nur ein einziger Werth für die Strecke A_1C_1 ergibt, wenn man AC als gegeben betrachtet, diese Form hat.

Ist BB_1 ein drittes Paar sich entsprechender Punkte, so kann man in α

$$AC = AB + BC$$

und

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$$

setzen, wodurch man erhält:

$$BC \cdot B_1C_1 + (m + A_1B_1)\,BC + (n + AB)\,B_1C_1 + AB \cdot A_1B_1 + \\ + mAB + nA_1B_1 = 0.$$

In dieser Gleichung ist die Summe der drei letzten Glieder des links vom Gleichheitszeichen stehenden Theiles gleich Null, da B und B_1 entsprechende Punkte sind; man hat also:

$$BC \cdot B_1C_1 + (m + A_1B_1)\,BC + (n + AB)\,B_1C_1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad \beta$$

Aus α ergibt sich nun

$$AC = -\frac{nA_1C_1}{m + A_1C_1},$$

aus β

$$BC = -\frac{(n + AB)\,B_1C_1}{m + A_1B_1 + B_1C_1} = -\frac{(n + AB)\,B_1C_1}{m + A_1C_1};$$

es ist also

$$\frac{AC}{BC} = \frac{n}{n + AB} \cdot \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Setzt man statt CC_1 in letzterer Gleichung irgend ein anderes Paar sich entsprechender Punkte DD_1, so ergibt sich:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{n}{n + AB} \cdot \frac{A_1D_1}{B_1D_1}$$

und durch Division der beiden zuletzt aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1},$$

oder

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

Das Doppelverhältniss der beliebigen vier Punkte $ABCD$ von R ist somit gleich dem Doppelverhältnisse der diesen Punkten entsprechenden $A_1B_1C_1D_1$ von R_1, woraus folgt, dass R und R_1 projectivisch sind.

Dieses Ergebniss lässt uns schliessen, nachdem man jeden Strahlenbüschel als den Schein einer Punktreihe und jeden Ebenenbüschel als den Schein eines Strahlenbüschels betrachten kann, dass nicht bloss zwei Punktreihen, sondern irgend zwei Grundgebilde der ersten Stufe überhaupt projectivisch verwandt sein müssen, wenn jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges des anderen entspricht.

74. Zwei ungleichartige projectivische Grundgebilde der ersten Stufe liegen perspectivisch, wenn drei Elemente des einen Gebildes durch die drei diesen Elementen entsprechenden des anderen Gebildes gehen, oder in ihnen liegen.

Für die Punktreihe und den Strahlenbüschel wurde der Beweis hiefür bereits gegeben (Satz 12). Es erübrigt also noch zu zeigen, dass eine Punktreihe oder ein Strahlenbüschel gegen einen projectivisch verwandten Ebenenbüschel perspectivisch liegen, wenn drei Ebenen des letzteren durch die drei diesen Ebenen entsprechenden Elemente der Reihe, oder des Strahlenbüschels gehen. Setzen wir eine Punktreihe R und einen Ebenenbüschel E voraus, so folgt aus dem Satze 10, dass der Schnitt des Trägers der Reihe mit dem Büschel eine mit R identische Punktreihe sein muss und ebenso ergibt sich aus demselben Satze, dass für den Fall, in welchem ein Strahlenbüschel S und ein Ebenenbüschel E die angegebenen Beziehungen zu einander haben, der Schnitt der Ebene des Büschels S mit E ein Strahlenbüschel ist, dessen sämmtliche Elemente mit jenen des Büschels S coincidiren. Daraus folgt nun unmittelbar, dass im ersteren Falle R und E, im zweiten S und E perspectivisch liegen.

Sowie es in zwei projectivischen Strahlenbüscheln stets entsprechende rechte Winkel gibt (Satz 18), so sind auch in zwei projectivischen Ebenenbüscheln immer ein Paar entsprechende rechte Flächenwinkel vorhanden. Um dies einzusehen braucht man sich nur jeden der zwei Ebenenbüschel durch eine auf seiner Axe senkrecht stehende Ebene geschnitten zu denken. Die als Schnitte sich ergebenden zwei Strahlenbüschel sind nämlich projectivisch verwandt, haben also entsprechende rechte Winkel, folglich müssen auch in den Ebenenbüscheln entsprechende rechte Flächenwinkel vorkommen. Auch bezüglich eines Ebenenbüschels und eines mit ihm projectivisch verwandten Strahlenbüschels gelten analoge Beziehungen, wir können daher mit Rücksicht auf den Satz 18 folgenden aufstellen:

75. **Zwei projectivische Ebenenbüschel oder ein Ebenenbüschel und ein mit ihm projectivisch verwandter Strahlenbüschel haben, wenn keiner der Büschel ein Parallelbüschel ist, entweder nur ein Paar oder unendlich viele Paare von entsprechenden rechten Winkeln.**

Heissen die senkrecht stehenden Ebenen des einen von zwei projectivischen Ebenenbüscheln ϱ und σ, die des anderen, welche den Elementen ϱ und σ entsprechen und ebenfalls auf einander senkrecht stehen, ϱ_1 und σ_1, so besteht, wie mit Hilfe des Satzes 19 leicht nachzuweisen ist, die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha\varrho \,.\, \operatorname{tg} \alpha_1\sigma_1 = \operatorname{tg} \beta\varrho \,.\, \operatorname{tg} \beta_1\sigma_1 \,,$$

wenn $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ zwei beliebige Paare sich entsprechender Ebenen der beiden Büschel sind.

Mit Hilfe des Satzes 7 lässt sich folgender, insoferne derselbe nicht bereits nachgewiesen ist (Satz 4, 7 und 30), einfach begründen:

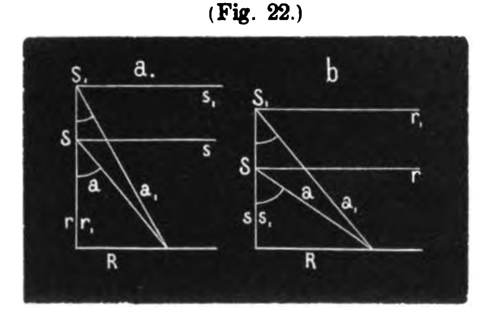
76. **Zwei projectivisch verwandte Grundgebilde der ersten Stufe können im allgemeinen immer in perspectivische Lage gebracht werden.**

Um eine Punktreihe gegen einen mit ihr projectivisch verwandten Ebenenbüschel in perspectivische Lage zu bringen, schneiden wir letzteren durch irgend eine Ebene und bringen die Reihe mit dem sich als Schnitt ergebenden Strahlenbüschel in perspectivische Lage (Satz 30). Dann liegt die Punktreihe offenbar auch perspectivisch gegen den Ebenenbüschel.

Dass man einen Strahlenbüschel S_1 und einen mit S_1 projectivisch verwandten Ebenenbüschel E, wenn keiner der Büschel ein Parallelbüschel ist immer in perspectivische Lage bringen kann geht aus Folgendem hervor.

Wird E durch eine Ebene geschnitten, welche senkrecht auf seiner Axe steht, so ist der entstehende Strahlenbüschel S mit S_1 projectivisch verwandt, es muss daher in S und S_1 entsprechende rechte Winkel geben. Bringt man S und S_1 dadurch in perspectivische Lage, dass man ein Paar entsprechender Schenkel, etwa r und r_1 (Fig. 22 a.) der entsprechenden rechten Winkel rs und r_1s_1 coincidiren lässt, so müssen S und S_1 Scheine einer Punktreihe R werden, welche senkrecht auf rr_1 steht, nachdem R gegen den unendlich ferne gelegenen Durchschnittspunkt der Strahlen s und s_1 convergirt. Setzen wir voraus, a und a_1 wären irgend ein Paar sich entsprechender Strahlen von S und S_1, und der spitze Winkel ra sei grösser als r_1a_1, so liegt der Mittelpunkt des Büschels S_1 offenbar von R weiter entfernt, als jener des Büschels S, woraus man auch schliessen kann, dass jeder andere spitze Winkel rb von

(Fig. 22.)



S grösser sein muss, als der ihm entsprechende $r_1 b_1$ im Büschel S_1. Denkt man sich nun den Büschel S_1 um R gedreht, so muss sein Mittelpunkt in zwei verschiedenen Stellungen von S_1 mit der Axe des Ebenenbüschels E zusammentreffen. Für den Fall dieses Zusammentreffens aber liegt S_1 gegen E perspectivisch.

Damit der Mittelpunkt von S_1 durch die angegebene Drehung dieses Büschels in die Axe von E zu liegen komme, ist es nothwendig, dass er, wie wir indirect vorausgesetzt haben, von R entfernter sei, als der Mittelpunkt von S. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, ist nämlich jeder Winkel ra des Büschels S kleiner als der ihm entsprechende $r_1 a_1$ des Büschels S_1, so würde es nicht möglich sein auf die angegebene Weise S_1 und E in perspectivische Lage zu bringen, wohl aber gelangen wir zu dem gewünschten Resultate, wenn wir in diesem Falle nicht r und r_1, sondern s und s_1 (Fig. 22 b.) coincidiren lassen. Man erhält dann als Durchschnitt von S und S_1 wieder eine Reihe R, welche senkrecht auf ss_1 steht und der Mittelpunkt von S_1 ergibt sich in grösserer Entfernung von R, als der Mittelpunkt des Büschels S. Wird S_1 wie im ersten Falle um R gedreht, so gelangt sein Mittelpunkt bei zwei verschiedenen Stellungen des gedrehten Büschels in die Axe von E und in diesen zwei Stellungen liegt S_1 gegen E perspectivisch.

Würde irgend ein Winkel $ra = r_1 a_1$ sein, so wären auch ihre Complemente sa und $s_1 a_1$ einander gleich, die beiden Büschel hätten demnach zwei gleiche entsprechende Winkel und müssten nach Satz 32 congruent sein. Dass in diesem Falle S_1 gegen E auch in perspectivische Lage gebracht werden kann ist selbstverständlich.

Wie leicht einzusehen schliesst die Ebene des Büschels S_1 in den zwei verschiedenen perspectivischen Lagen gleiche Winkel mit der Axe von E ein. Ist S_1 mit S congruent, so sind diese Winkel rechte und dann gehen die zwei Stellungen von S_1 in eine einzige über.

Dass zwei projectivische Ebenenbüschel im allgemeinen auf unendlich viele Arten in perspectivische Lage gebracht werden können, lässt sich wie folgt zeigen. Heissen die beiden Büschel E und E_1 und schneidet man E_1 durch irgend eine Ebene, wodurch ein Strahlenbüschel S_1 zu Stande kommt, so kann S_1, wie so eben erklärt wurde, gegen E in perspectivische Lage gebracht werden. Denkt man sich mit S_1 zugleich auch E_1 verschoben, ohne dass S_1 und E_1 ihre gegenseitige Lage ändern, so muss offenbar, wenn S_1 gegen E perspectivisch liegt auch zwischen E und E_1 dieselbe Beziehung stattfinden, nachdem E und E_1 dann Scheine ein und desselben Strahlenbüschels S_1 sind. Da ferner S_1 ein beliebiger ebener Schnitt von E_1 ist und für jeden anderen Schnitt E und E_1 im allgemeinen eine andere perspectivische Lage erhalten, so erscheint die oben aufgestellte Behauptung gerechtfertigt.

Auf einfachere Art können E und E_1 dadurch in perspectivische Lage gebracht werden, dass man irgend zwei entsprechende Elemente derselben zur Coincidenz bringt, wie oben bereits erklärt wurde.

Aehnliche Ebenenbüschel sind solche projectivische Büschel, deren unendlich ferne Elemente sich entsprechen. Demnach können nur Parallel-Ebenenbüschel einander ähnlich sein.

Zwei Ebenenbüschel, deren Axen in endlicher Entfernung liegen, werden congruent genannt, wenn je zwei einander entsprechende Flächenwinkel derselben gleich sind. Zwei Parallel-Ebenenbüschel nennt man congruent, wenn der Abstand von je zwei Ebenen des einen Büschels dem Abstande der entsprechenden Ebenen des anderen gleich ist.

Harmonische Ebenenbüschel heissen solche Büschel, welche aus vier Elementen $\alpha\beta\gamma\delta$ bestehen, deren Doppelverhältniss $(\alpha\beta\gamma\delta)$ gleich der negativen Einheit ist. Es besteht somit für derartige Büschel die Gleichung

$$\frac{\sin\alpha\gamma}{\sin\beta\gamma} : \frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\delta} = -1,$$

oder

$$\frac{\sin\alpha\gamma}{\sin\gamma\beta} = \frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\delta}.$$

Sowie in einem aus den Strahlen $abcd$ bestehenden harmonischen Strahlenbüschel, für welchen die Gleichung $(abcd) = -1$ gilt, gezeigt worden ist, dass a und b durch c und d getrennt sind, ebenso kann nachgewiesen werden,- dass die Ebenen α und β durch die Ebenen γ und δ getrennt sein müssen. Man sagt desshalb und mit Rücksicht auf das harmonische Verhältniss, dass die Ebenen α und β von den Ebenen γ und δ harmonisch getrennt sind. α und β, sowie γ und δ nennt man auch harmonisch zugeordnete oder harmonisch conjugirte Elemente des Ebenenbüschels.

77. Wird ein harmonischer Ebenenbüschel E durch irgend eine Gerade oder eine Ebene geschnitten, so entsteht beziehungsweise eine harmonische Punktreihe R, oder ein harmonischer Strahlenbüschel S als Schnitt.

Denn R und S sind mit E projectivisch verwandt (Satz 64), folglich ist das Doppelverhältniss ihrer Elemente gleich jenem der Elemente von E, nämlich gleich -1.

Aus dem Satze 67 folgt ferner:

78. Alle harmonischen Grundgebilde der ersten Stufe sind unter einander projectivisch verwandt.

Schneidet man drei beliebige Ebenen $\alpha\beta\gamma$ eines Ebenenbüschels durch irgend eine Gerade und sucht zu den sich ergebenden Schnittpunkten ABC einen vierten Punkt D der schneidenden Geraden, welcher so gelegen ist, dass $ABCD$ eine harmonische Punktreihe wird, so bilden die Ebenen $\alpha\beta\gamma$ mit der durch D gehenden Ebene des Büschels einen harmonischen Ebenenbüschel. — Mit Hilfe des Satzes 77 lässt sich diese Behauptung leicht rechtfertigen. — Daraus folgt auch, dass wenn man beliebig viele schneidende Gerade zieht und in



allen einen Punkt D bestimmt, die sämmtlichen Punkte D in einer einzigen Ebene δ gelegen sein müssen. Analoge Beziehungen treten ein, wenn man drei beliebige Ebenen $\alpha\beta\gamma$ eines Ebenenbüschels durch irgend eine Ebene schneidet und zu den drei Strahlen abc des sich als Schnitt ergebenden Strahlenbüschels jenen Strahl d sucht, welcher mit abc einen harmonischen Büschel bildet. Die durch d gehende Ebene δ des Ebenenbüschels ist dann auch ein Element eines harmonischen Büschels $\alpha\beta\gamma\delta$. Werden $\alpha\beta\gamma$ durch beliebig viele Ebenen geschnitten und bestimmt man zu allen sich ergebenden Strahlenbüscheln einen vierten Strahl d von der angegebenen Lage, so befinden sich alle diese vierten Strahlen in derselben Ebene des Ebenenbüschels.

Die Construction eines harmonischen Ebenenbüschels, wenn drei seiner Elemente gegeben sind, bedarf wohl keiner besonderen Erklärung. Das wesentliche dieser Construction besteht in der bekannten Bestimmung eines vierten Elementes einer harmonischen Punktreihe oder eines harmonischen Strahlenbüschels.

Der Analogie wegen, die zwischen harmonischen Strahlen- und Ebenenbüscheln besteht, und um Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir die letzteren nicht weiter untersuchen.

Zwei Ebenenbüschel, deren Axen coincidiren liegen concentrisch, oder wie man auch sagt, sind concentrisch. Schneidet man zwei solche Büschel durch irgend eine Gerade, so können die zwei entstehenden conjectivischen Punktreihen entweder einstimmig oder entgegengesetzt verlaufen. Im ersteren Falle verlaufen die beiden Ebenenbüschel einstimmig im letzteren entgegengesetzt. Zwei entsprechende Elemente concentrischer Ebenenbüschel, welche zusammenfallen werden Doppelebenen, Hauptebenen oder auch Ordnungselemente genannt. Bezüglich des Vorkommens und der Lage von Doppelebenen gegen jene Ebenen, welche entsprechende rechte Flächenwinkel einschliessen, gelten Sätze die den für concentrische Strahlenbüschel aufgestellten vollkommen analog sind. Wir unterziehen sie daher keiner speciellen Untersuchung.

Involutorisch sind zwei concentrische Ebenenbüschel, wenn die nicht entsprechenden Ebenen der entsprechenden rechten Flächenwinkel coincidiren. Man nennt jene zwei Ebenen, welche dann die letzteren Winkel bilden, Normalebenen.

Die unter 49 bis 56 aufgestellten, sich auf Strahlenbüschel beziehenden Sätze, sowie der Satz 58 gelten auch für Ebenenbüschel, wenn man in denselben überall statt „Strahlen" „Ebenen" setzt. Auch die Aufgabe in einem involutorischen Ebenenbüschel die Doppel- und Normalebenen zu ermitteln, lässt sich sehr leicht auf die für involutorische Strahlenbüschel bereits gelöste, analoge Aufgabe zurückführen; wir betrachten sie daher nicht näher. Besonders anzuführen wäre nur, dass ein involutorischer Ebenenbüschel, in welchem alle Paare sich entsprechender Ebenen auf einander senkrecht stehen, eine

rechtwinkelige Involution bilden und dass eine solche Involution, wie die gleichnamige zweier Strahlenbüschel immer einstimmig verläuft. (Satz 55.)

Wird ein involutorischer Ebenenbüschel durch irgend eine Ebene geschnitten, so entsteht ein involutorischer Strahlenbüschel. Die Normalstrahlen des letzteren liegen offenbar nicht immer in den Normalebenen des ersteren. Nur dann, wenn die schneidende Ebene senkrecht auf einer der Normalebenen steht, ist dies der Fall.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Erzeugnisse zweier projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel, welche in derselben Ebene liegen.

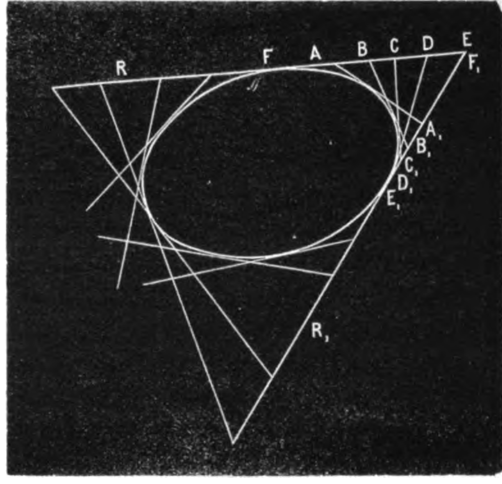
---

a) Erzeugung der Curven zweiter Classe durch projectivische Punktreihen.

Unter einem Erzeugnisse zweier in derselben Ebene befindlicher Punktreihen versteht man im allgemeinen jene Curve, welche die sämmtlichen Verbindungslinien von je zwei sich entsprechenden Punkten dieser Reihen berührt.

Beistehende Figur 23, in welcher R und R_1 zwei schief liegende projectivische Punktreihen sind, veranschaulicht das Zustandekommen dieser Curve. Man nennt letztere in Bezug auf alle Geraden, welche sie berührt, die einhüllende oder auch umhüllende Curve.

(Fig. 23.)



Der Kürze des Ausdruckes wegen führen wir gleich hier an, dass die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projectivischer Punktreihen, welche sich in derselben Ebene befinden, Projectionsstrahlen genannt werden und im allgemeinen einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung bilden. Die bisher betrachteten Strahlenbüschel werden im Gegensatze zu jenen der zweiten Ordnung, Büschel erster Ordnung genannt.

Dass es im allgemeinen immer eine Curve gibt, welche sämmtliche Projectionsstrahlen zweier Reihen berührt, folgt aus der gegenseitigen Lage dieser Strah-

len. Wir haben bereits aus Satz 17 geschlossen, dass man sich zwei projectivische Reihen durch gleichzeitige, stetige Bewegung zweier Punkte entstanden denken kann, welche in jedem bestimmten Momente ihrer Bewegung entsprechende Punkte sind. Hieraus lässt sich weiter schliessen, dass auch die Projectionsstrahlen stetig auf einander folgen und daher auf einander folgende Tangenten irgend einer Curve bilden.

Die Träger der erzeugenden Reihen R und R_1 (Fig. 23) sind ebenfalls Tangenten der umhüllenden Curve. Denn nennen wir die beiden Punkte der erzeugenden Reihen, in welchen sich die Träger dieser Reihen schneiden, beziehungweise E und F_1 und die diesen Punkten entsprechenden E_1 und F, so bilden die Geraden EE_1 und FF_1, als Verbindungslinien entsprechender Punkte, Tangenten der umhüllenden Curve. Nachdem nun die Geraden EE_1 und FF_1 beziehungsweise die Träger von R und R_1 sind, so erscheint obige Behauptung gerechtfertigt.

Die Punkte E_1 und F, nämlich jene, welche den im Durchschnittspunkte der Reihen R und R_1 vereinigten Punkten E und F_1 entsprechen, sind zugleich die Berührungspunkte der Träger dieser Reihen, wie aus folgender Betrachtung klar wird. Von jedem Punkte der Reihe R können an die umhüllende Curve zwei Tangenten gezogen werden, nämlich die Gerade, welche den Träger von R bildet, und jene, welche den in R angenommenen Punkt mit seinem entsprechenden in R_1 verbindet. Der Punkt F ist der einzige in R, von welchem aus sich keine zwei gesonderten, wohl aber zwei coincidirende Tangenten ziehen lassen, denn hier fällt der Träger von R mit dem aus F gezogenen Projectionsstrahle zusammen. Verbindet man die Berührungspunkte von zwei aus einem beliebigen Punkte von R gezogenen Tangenten, so erhält man eine Berührungssehne der umhüllenden Curve. Diese Sehne erhält für die aus F gezogenen zwei Tangenten, welche coincidiren, die Länge gleich Null, und da bekanntlich in einem solchen Falle der Durchschnittspunkt der zwei Tangenten mit den Berührungspunkten zusammenfällt, so muss F der Berührungspunkt des Trägers von R sein. — Dass E_1 der Berührungspunkt des Trägers von R_1 ist, lässt sich auf dieselbe Art nachweisen.

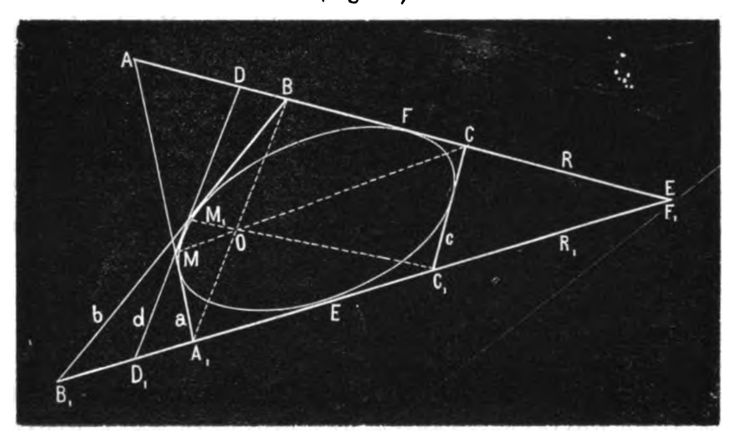
An die umhüllende Curve können aus keinem Punkte mehr als zwei Tangenten gezogen werden. Denn verbindet man irgend einen Punkt P mit sämmtlichen Punkten von R und R_1, so entstehen zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel, welche bekanntlich nicht mehr als zwei Doppelstrahlen enthalten. Da nun offenbar nur Doppelstrahlen in diesem Falle durch zwei entsprechende Punkte von R und R_1 gehen, also Tangenten bilden können, so erscheint obige Behauptung gerechtfertigt.

Der eben nachgewiesenen Eigenschaft wegen nennt man jede durch zwei projectivische Punktreihen erzeugte Curve eine Curve zweiter Classe.*)

*) Im allgemeinen heisst eine Curve, an welche sich aus keinem Punkte mehr als n Tangenten ziehen lassen, eine Curve $n$ter Classe.

Sind in den erzeugenden Reihen R und R_1 (Fig. 24.) drei Paare entsprechender Punkte AA_1, BB_1, CC_1 gegeben, so ist nach Satz 11 jedes vierte Paar entsprechender Punkte DD_1 unzweideutig bestimmt. Es ist somit auch jeder vierte Projectionsstrahl vollkommen bestimmt, sobald die Träger der erzeugenden Reihen und noch drei Strahlen AA_1, BB_1, CC_1 angenommen wurden. Bezeichnen wir die genannten vier Strahlen, entsprechend den Punkten von R und

(Fig. 24.)



R_1, durch welche sie gehen, durch *abcd* und die Schnittpunkte des Strahles d mit a und b beziehungsweise durch M und M_1, so schneiden sich die Verbindungslinien der Punkte C, M und C_1, M_1 in einem Punkte O der Geraden A_1B, wie aus Folgendem hervorgeht. Denkt man sich M mit $ABCD$ und M_1 mit $A_1B_1C_1D_1$ durch gerade Linien verbunden, so bilden diese Linien zwei projectivische Strahlenbüschel erster Ordnung, welche den Strahl d entsprechend gemein haben, also Scheine ein und derselben Punktreihe sein müssen. Der Träger dieser Reihe ist die Verbindungslinie der Punkte A_1 und B, in welchen sich beziehungsweise die entsprechenden Strahlen MA, M_1A_1 und MB, M_1B_1 treffen; es liegt also auch der Durchschnittspunkt O der sich entsprechenden Strahlen MC und M_1C_1 in A_1B, wie behauptet wurde. Da der Strahl d des Büschels zweiter Ordnung ein ganz beliebiger ist, so gilt für jeden anderen Strahl dieses Büschels dasselbe, was wir bezüglich d nachgewiesen haben. Die Geraden MC und M_1C_1 schneiden sich nämlich stets in einem Punkte O der Geraden A_1B, wenn M und M_1 die Durchschnittspunkte irgend eines Strahles mit a und b bezeichnen.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass man einen Strahl d, wenn R und R_1 und drei Strahlen *abc* gegeben sind, auch auf folgende Art erhält: Man nimmt irgend einen Punkt M in a an, verbindet denselben mit C durch eine Gerade, welche A_1B im Punkte O schneidet und zieht die Gerade OC_1; letztere schneidet den Strahl a im Punkte M_1 der mit M verbunden einen vierten Strahl

des Büschels zweiter Ordnung gibt. Wird M im Punkte A angenommen, so fallen O und M_1 mit B zusammen, wählt man M in A_1, so coincidirt M_1 mit B_1; man erkennt hieraus ebenfalls, dass die Träger der erzeugenden Reihen R und R_1 Tangenten der erzeugten Curve sind.

Denkt man sich R, R_1 sowie die Strahlen abc gegeben und mit Benützung der in A_1B gelegenen Punkte O alle übrigen Strahlen d des Büschels zweiter Ordnung bestimmt, so bildet die Gesammtheit der Punkte O eine Punktreihe, deren Träger A_1B ist und alle Verbindungslinien der Punkte O mit C und C_1 sind Strahlen zweier Büschel erster Ordnung, welche ihre Mittelpunkte in C und C_1 haben. Diese zwei Büschel liegen gegen einander perspectivisch, da sie Scheine derselben, auf A_1B befindlichen Punktreihe sind; sie müssen daher auch projectivisch verwandt sein. Die Punktreihen, welche sich auf a und b als Schnitte der beiden Büschel ergeben, sind demnach ebenfalls projectivisch und da die Elemente dieser Reihen auch als Durchschnittspunkte aller Strahlen d mit a und b aufgefasst werden können so folgt, dass a und b durch die Gesammtheit aller übrigen Strahlen des Büschels zweiter Ordnung in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten werden. Dasselbe lässt sich nun offenbar bezüglich eines beliebigen anderen Paares von Strahlen ebenfalls nachweisen, da a und b willkürlich angenommen wurden, wir können somit den Satz aufstellen:

1. Je zwei Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung werden von allen übrigen Strahlen desselben in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten.

Da jeder Strahl eines Büschels zweiter Ordnung eine Tangente der umhüllenden Curve des letzteren ist, so kann dieser Satz auch in folgender Weise ausgedrückt werden: Je zwei Tangenten einer Curve zweiter Classe werden durch alle übrigen Tangenten dieser Curve in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten.

Daraus geht nun hervor, dass man statt der Punktreihen R und R_1 (Fig. 24) irgend zwei andere, auf zwei Projectionsstrahlen befindliche Reihen als erzeugende Reihen jener Curve betrachten kann, welche durch R und R_1 bestimmt wird. Letztere Reihen nehmen also keine bevorzugte Stellung ein; ihre Träger sind eben auch nur Strahlen des Büschels zweiter Ordnung.

Nachdem sämmtliche Strahlen des Büschels zweiter Ordnung sich bestimmen lassen, sobald die Träger von R und R_1 und drei beliebige Strahlen abc gegeben sind, so folgt der Satz:

2. Eine Curve zweiter Classe ist durch fünf ihrer Tangenten vollkommen bestimmt.

Die Strahlen $abcd$ bilden mit den Trägern der Reihen R und R_1 ein Sechseck, welches der Curve zweiter Classe umschrieben ist. Wie oben bewiesen wurde, schneiden sich die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken dieses Sechseckes (nämlich solcher Ecken, zwischen welchen beiderseits drei Seiten liegen) in ein und demselben Punkte O. Die Reihenfolge der Seiten des

Sechseckes ist eine ganz beliebige, da in dieser Beziehung keine bestimmte Voraussetzung gemacht wurde. Wir können somit den Satz aufstellen:

3. Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken eines Sechseckes, welches einer Curve zweiter Classe umschrieben ist, schneiden sich in ein und demselben Punkte, wie man auch die Reihenfolge der Seiten des Sechseckes wählt.

Dieser Satz wurde von Brianchon zuerst aufgestellt (1806) und wird daher der Brianchon'sche Satz genannt.

Aus obigen (an die Fig. 24 geknüpften) Betrachtungen folgt auch, dass einem Sechsecke immer eine Curve zweiter Classe eingeschrieben werden kann, wenn die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken sich in ein und demselben Punkte schneiden.

Es wurde bereits gezeigt, dass man aus jedem Punkte einer beliebigen Geraden t, welche eine Curve zweiter Classe berührt (z. B. des Trägers der Reihe R Fig. 23) noch eine zweite von t verschiedene oder mit t coincidirende Tangente an letztere Curve ziehen kann. Ausser den Punkten, durch welche sich eine oder zwei Tangenten an eine Curve zweiter Classe ziehen lassen, gibt es auch solche in der Ebene einer jeden Curve dieser Art, aus denen sich keine reelle Tangente ziehen lässt. Es sind dies Punkte, durch welche kein Strahl des Büschels zweiter Ordnung geht und von denen man sagt, dass sie innerhalb der Curve zweiter Classe liegen, im Gegensatze zu den in irgend einem Strahle dieses Büschels gelegenen Punkten, welche man ausserhalb liegende Punkte nennt, wenn sie nicht der Curve selbst angehören. Wir können daher sagen: Von einem in der Ebene einer Curve zweiter Classe befindlichen Punkte kann man zwei gesonderte, zwei coincidirende, oder keine reellen Tangenten an diese Curve ziehen, je nachdem der Punkt ausserhalb, in der Curve, oder innerhalb derselben liegt.

Der Fall, in welchem von einem Punkte P sich keine reellen Tangenten ziehen lassen, entspricht demjenigen, wo die beiden Strahlenbüschel, welche ihren Mittelpunkt in P haben und Scheine der erzeugenden Reihen R und R_1 der Curve zweiter Classe sind, nur imaginäre Doppelstrahlen besitzen. Diese Doppelstrahlen können nämlich, da sie auch Strahlen des Büschels zweiter Ordnung sind, als Tangenten, und zwar als imaginäre Tangenten der Curve betrachtet werden. Berücksichtigt man daher das Vorhandensein der letzteren, sowie den Umstand, dass durch jeden Punkt einer Curve zweiter Classe eigentlich zwei coincidirende Tangenten gehen, wie bereits erklärt wurde, so lässt sich behaupten, dass von jedem beliebigen Punkte der Ebene einer Curve zweiter Classe zwei Tangenten an diese gezogen werden können.

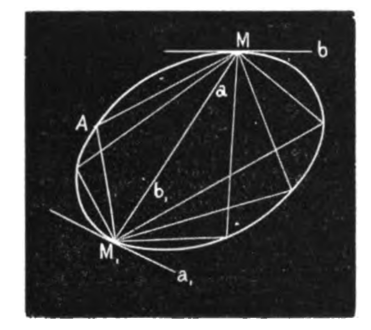
b) Erzeugung der Curven zweiter Ordnung durch projectivische Strahlenbüschel.

Die Gesammtheit aller Durchschnittspunkte von je einem Paare sich entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel, welche sich in derselben Ebene befinden, bilden im allgemeinen eine Curve, die man ein **Erzeugniss** oder auch den **Durchschnitt** der beiden Strahlenbüschel nennt.

Fig. 25 veranschaulicht die Entstehung einer solchen Curve.

Aus dem Satze 19. haben wir bereits geschlossen, dass man sich zwei projectivische Strahlenbüschel immer durch die gleichzeitige, stetige Drehung zweier Geraden entstanden denken kann, welche in jedem bestimmten Momente ihrer Drehung entsprechende Strahlen beider Büschel bilden. Daraus folgt, dass wenn die eine Gerade ihre Lage nur unendlich wenig ändert, auch die andere sich um unendlich wenig weiter dreht. Es müssen also auch die Durchschnittspunkte zweier Paare sich entsprechender Strahlen, wenn diese Paare sich unendlich nahe liegen, ebenfalls unendlich wenig von einander entfernt sein, daher bilden die Durchschnittspunkte aller Paare entsprechender Strahlen eine stetige Aufeinanderfolge von Punkten, nämlich, wie wir behauptet haben, eine Curve.

(Fig. 25.)



Die **Mittlpunkte** M **und** M_1 **der erzeugenden Strahlenbüschel** S **und** S_1 **müssen auch der Curve angehören**, denn die Gerade MM_1, als Strahl des Büschels S_1 betrachtet, schneidet den ihr entsprechenden Strahl des Büschels S in M, und auch M_1 ist der Durchschnittspunkt zweier entsprechender Strahlen, nämlich der Geraden MM_1, als Strahl des Büschels S betrachtet und des diesem Strahle entsprechenden des Büschels S_1.

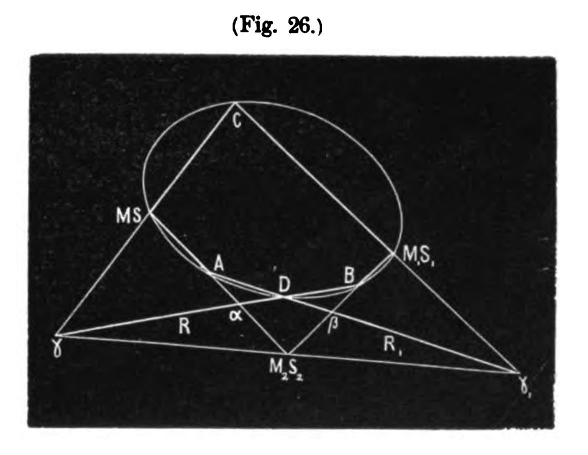
Bezeichnet A irgend einen Punkt der erzeugten Curve und denkt man sich die Strahlen MA und M_1A so gedreht, dass ihr Durchschnitt A sich stets in der Curve befindet, wobei MA und M_1A immer entsprechende Strahlen bleiben, so ist jeder dieser Strahlen eine Secante der in Rede stehenden Curve, wenn A nicht mit M oder M_1 zusammenfällt. Coincidirt A mit M, so geht die Secante MA in eine Tangente über, deren Berührungspunkt M ist. Sie bildet dann offenbar jenen Strahl von S der dem Strahle M_1A, oder was hier dasselbe ist, dem Strahle M_1M des Büschels S_1 entspricht. Fällt A mit M_1 zusammen, so geht die Secante M_1A in eine Tangente über, welcher als Strahl des Büschels S_1 betrachtet, der Strahl MM_1 des Büschels S entspricht. Daraus

ergibt sich also: Die in den Mittelpunkten der beiden Büschel S und S_1 an den Durchschnitt der letzteren gezogenen Tangenten sind jene Strahlen von S und S_1, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechen, wenn man diese Linie einmal als Strahl des Büschels S_1, dann als Strahl des Büschels S betrachtet.

Eine durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugte Curve wird von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten. Selbstverständlich kann eine Gerade, welche nicht in der Ebene der Curve gelegen ist, höchstens einen Punkt mit der Curve gemein haben, da letztere eben ist. Liegt die Gerade in der Curvenebene selbst, so schneidet sie die erzeugenden Strahlenbüschel in zwei conjectivischen Punktreihen, welche bekanntlich nicht mehr als zwei Doppelpunkte haben können. Diese Punkte gehören der Curve an, da sich in ihnen zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel schneiden; sie sind also die Durchschnittspunkte der Geraden mit der Curve. Daher erscheint obige Behauptung gerechtfertigt.

Der eben nachgewiesenen Eigenschaft wegen heisst man jede durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugte Curve eine Curve zweiter Ordnung.*)

(Fig. 26.)



Sind die Mittelpunkte M und M_1 (Fig. 26) der beiden, eine Curve zweiter Ordnung erzeugenden Strahlenbüschel S und S_1, sowie drei beliebige andere Punkte ABC dieser Curve gegeben, so ist letztere vollkommen bestimmt, da in den zwei Büscheln S und S_1 dann drei Paare sich entsprechender Strahlen, nämlich die Verbindungslinien der Punkte M und M_1 mit A, B und C gegeben erscheinen, also nach Satz 11 das ganze Strahlensystem von S und S_1 bestimmt ist.

Nehmen wir nun an D sei ein beliebiger sechster Punkt der Curve, woraus folgt, dass dem Strahle MD der Strahl M_1D entspricht, und verbinden wir A und B mit dem Punkte D durch gerade Linien, so schneidet BD den Büschel S in einer Punktreihe R, welche jener Reihe R_1 projectivisch verwandt ist, die

---

*) Im allgemeinen wird eine Curve, welche von keiner Geraden in mehr als n Punkten geschnitten wird, eine Curve $n$ter Ordnung genannt.

sich als Schnitt der Geraden AD mit dem Büschel S_1 ergibt. Nachdem R und R_1 den Punkt D entsprechend gemein haben, so liegen sie perspectivisch, es müssen sich daher die sämmtlichen Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen in einem einzigen Punkte schneiden. Ist α der Schnittpunkt der Geraden MA und BD, ferner β der Schnittpunkt von M_1B und AD, so entspricht dem Punkt A in R_1 der Punkt α in R und dem Punkte B in R der Punkt β in R_1, es sind demnach $A\alpha$ und $B\beta$, oder was dasselbe ist, MA und M_1B Verbindungslinien entsprechender Punkte von R und R_1. Der Durchschnittspunkt M_2 von MA und M_1B ist somit jener Punkt, in welchem sich sämmtliche Verbindungslinien entsprechender Punkte von R und R_1 schneiden, nämlich der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels S_2, von welchem R und R_1 Schnitte bilden. Nennen wir γ den Schnittpunkt von MC und BD und γ_1 den Schnittpunkt von M_1C und AD, so sind γ und γ_1 entsprechende Punkte von R und R_1, da der Strahl MC des Büschels S dem Strahle M_1C des Büschels S_1 entspricht. Verbindet man γ und γ_1 durch eine Gerade, so muss dieselbe durch M_2 gehen, da sie einen Strahl des Büschels S_2 bildet. Wir schliessen daraus, dass, wie auch der sechste Punkt D der Curve zweiter Ordnung gelegen sein mag, die Durchschnittspunkte γ, M_2 und γ_1 der gegenüberliegenden Seiten des Sechseckes $MADBM_1C$, nämlich solcher Seiten, zwischen welchen beiderseits zwei andere Seiten liegen, sich stets in einer Geraden befinden.

Daraus ergibt sich folgende Construction zur Bestimmung irgend eines sechsten Punktes D der Curve zweiter Ordnung, wenn die Punkte MM_1AB und C gegeben sind. Man zieht aus A eine beliebige Gerade, welche M_1C in γ_1 schneidet, verbindet γ_1 mit M_2 und den Schnittpunkt γ von $M_2\gamma_1$ und MC mit B. Der Durchschnittspunkt von $A\gamma_1$ mit $B\gamma$ ist dann ein Punkt der Curve zweiter Ordnung.

Aus dieser Construction ist auch zu ersehen, dass die Mittelpunkte M und M_1 der erzeugenden Strahlenbüschel Punkte der Curve zweiter Ordnung sein müssen, denn zieht man statt der Geraden $A\gamma_1$ die Gerade AM oder AM_1 und führt die eben erklärte Construction durch, so erhält man beziehungsweise M oder M_1 als einen Punkt der Curve.

Denkt man sich unendlich viele Punkte D in der Curve zweiter Ordnung mit A und B verbunden, so ergeben sich unendlich viele Paare sich entsprechender Punkte γ und γ_1, welche alle beziehungsweise in MC und M_1C liegen und auf diesen Geraden zwei Punktreihen bilden. Letztere Reihen müssen projectivisch verwandt sein, da sie Schnitte des Büschels S_2 sind, es wird also auch der Strahlenbüschel, welcher durch die Verbindungslinien sämmtlicher Punkte γ mit B entsteht, jenem Strahlenbüschel projectivisch verwandt sein, dessen Strahlen die Verbindungslinien aller Punkte γ_1 mit A bilden. Diese zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die beliebig angenommenen Punkte A und B der Curve zweiter Ordnung sind, schneiden sich in Punkten D derselben Curve zweiter Ordnung, welche den Schnitt von S und S_1 bildet. Daraus folgt:

4. **Die Verbindungslinien sämmtlicher Punkte einer Curve zweiter Ordnung mit irgend zwei Punkten derselben Curve bilden zwei projectivische Strahlenbüschel.**

Eine Curve zweiter Ordnung kann demnach immer als Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel betrachtet werden, deren Mittelpunkt irgend zwei Punkte dieser Curve sind. Die Punkte M und M_1 erscheinen also den übrigen Curvenpunkten gegenüber durch nichts ausgezeichnet, da je zwei beliebige andere, z. B. A und B, Fig. 26, der letzteren als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln betrachtet werden können, deren Erzeugniss dieselbe Curve zweiter Ordnung ist.

Da beliebig viele Punkte einer Curve zweiter Ordnung sich, wie oben gezeigt wurde, unzweideutig bestimmen lassen, sobald fünf Punkte (MM_1ABC) derselben gegeben sind, so folgt:

5. **Eine Curve zweiter Ordnung ist durch fünf ihrer Punkte vollkommen bestimmt.**

Die sechs Verbindungslinien von je zwei aufeinander folgenden von den sechs Punkten $MADBM_1C$ bilden ein der Curve zweiter Ordnung eingeschriebenes Sechseck. Bezüglich desselben wurde bereits nachgewiesen, dass die Durchschnittspunkte $\gamma M_2 \gamma_1$ von je zwei einander gegenüberliegenden Seiten, nämlich solchen, zwischen welchen beiderseits noch zwei andere Seiten liegen, sich in ein und derselben Geraden befinden. Die Reihenfolge der Ecken des Sechseckes ist eine ganz beliebige, da wir in dieser Beziehung keine bestimmte Voraussetzung gemacht haben. Es gilt daher folgender Satz:

6. **Die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Sechseckes, das einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben ist, liegen in ein und derselben Geraden, wie man auch die Reihenfolge der Ecken des Sechseckes wählt.**

Dieser wichtige Satz wurde von Pascal (1623—1662) zuerst aufgestellt, daher nennt man ihn den Pascal'schen Satz.

Aus den obigen (an die Fig. 26 geknüpften) Untersuchungen geht auch hervor, dass einem Sechsecke sich immer eine Curve zweiter Ordnung umschreiben lässt, sobald die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten sich in ein und derselben Geraden befinden. Durch fünf Eckpunkte $MABM_1C$ ist nämlich die Curve bestimmt und durch den sechsten Punkt D muss sie gehen, da AD und BD entsprechende Strahlen von zwei erzeugenden Büscheln sind, deren Mittelpunkte wir uns in A und B denken.

Dass die Erzeugnisse zweier projectivischer Strahlenbüschel von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden, haben wir damit begründet, dass zwei conjectivische Punktreihen, welche durch den Schnitt der beiden erzeugenden Büschel mit irgend einer in ihrer Ebene gelegenen Geraden entstehen, höchstens zwei reelle Doppelpunkte haben können. Nachdem in solchen Reihen auch coin-

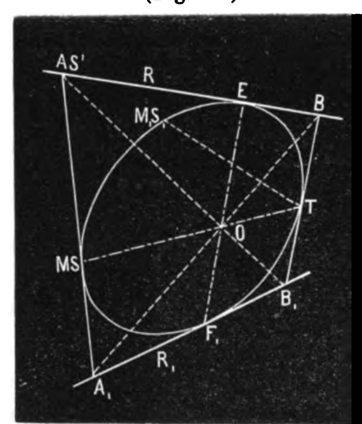
cidirende und imaginäre Doppelpunkte möglich sind, so kann eine Curve zweiter Ordnung von einer Geraden auch in zwei coincidirenden, oder in zwei imaginären Punkten geschnitten werden. Mit Berücksichtigung der coincidirenden und imaginären Schnittpunkte kann man demnach sagen, dass eine Curve zweiter Ordnung von einer in ihrer Ebene liegenden Geraden immer in zwei Punkten geschnitten wird.

e) Beweise für die Identität der Curven zweiter Classe mit jenen zweiter Ordnung.

In Fig. 27 seien R und R_1 zwei eine Curve zweiter Classe erzeugende Punktreihen und AA_1, BB_1 zwei Paare entsprechender Punkte der letzteren, woraus folgt, dass die Geraden AA_1 und BB_1 Tangenten der erzeugten Curve sind. Die Träger von R und R_1 bilden mit den Geraden AA_1 und BB_1 ein Viereck, welches der Curve zweiter Classe umschrieben ist. Die Berührungspunkte der Seiten AB, BB_1, B_1A_1 und A_1A dieses Viereckes seien beziehungsweise ETF_1 und M.

Es wurde bereits gezeigt, dass jede Tangente, welche aus einem Punkte einer Curve zweiter Classe an letztere gezogen werden kann, eigentlich zwei coincidirende Tangenten bildet und dass man sich als Durchschnittspunkt solcher coincidirender Tangenten ihren Berührungspunkt zu denken hat. Wir können daher annehmen, dass die Tangente AA_1, sowie BB_1 aus je zwei Tangenten bestehen, die sich beziehungsweise in M und T schneiden. Das Viereck ABB_1A_1 kann somit als ein der Curve zweiter Classe umschriebenes Sechseck betrachtet werden, in welchem die Berührungspunkte M und T Eckpunkte sind, es müssen sich also dem Brianchon'schen Satze (Satz 2, zweiter Abschnitt) zufolge die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken AB_1, A_1B und MT in ein und demselben Punkte O schneiden.

(Fig. 27.)



Betrachten wir die Berührungspunkte E und F_1 als Eckpunkte eines der Curve zweiter Classe umschriebenen Sechseckes $AEBB_1F_1A_1$ und wenden auf dasselbe den Brianchon'schen Satz an, so zeigt sich dass auch die Verbindungslinie der Punkte E und F_1 durch den Punkt O gehen muss. Daraus folgt, dass umgekehrt der Durchschnittspunkt O der Geraden AB_1 und A_1B immer in der Geraden EF_1 gelegen ist, welche Lage auch die Tangenten AA_1 und BB_1 haben mögen.

Denken wir uns nun die Geraden AB, AA_1 und A_1 B_1 unbeweglich, während die Gerade BB_1 sich so bewegen soll, dass sie in jeder Lage eine

Tangente der Curve zweiter Classe bildet. Der Berührungspunkt T der beweglichen Geraden wird dann nach und nach mit allen Curvenpunkten zusammenfallen und die sämmtlichen Verbindungslinien des Punktes M mit allen Punkten T werden einen Strahlenbüschel bilden, den wir durch S bezeichnen wollen. Einen zweiten Strahlenbüschel S' kann man sich durch die sämmtlichen Verbindungslinien AB_1 entstanden denken; derselbe liegt gegen S perspectivisch, da sowohl S, als auch S' Scheine der auf EF_1 durch die Punkte O gebildeten Punktreihe sind. S und S' müssen somit projectivisch verwandt sein, woraus folgt, dass S auch mit R_1, welche Reihe als ein Schnitt des Büschels S' betrachtet werden kann, projectivisch ist und daraus ergibt sich endlich, dass S sowohl mit R, als auch mit R_1 projectivisch verwandt sein muss.

Nachdem die Tangente AA_1 ganz beliebig gewählt wurde, so gilt bezüglich jeder anderen Tangente dasselbe, was wir für AA_1 nachgewiesen haben, nämlich dass die Verbindungslinien des Berührungspunktes (M) mit allen Berührungspunkten (T) der beweglichen Tangente BB_1 einen Strahlenbüschel bilden, welcher mit R und R_1 projectivisch ist.

Nehmen wir nun an, ausser dem Punkte M der Curve zweiter Classe, sei noch irgend ein zweiter Curvenpunkt M_1 mit allen Punkten T verbunden worden, so haben wir zwei Strahlenbüschel S und S_1, deren Mittelpunkte M und M_1 sind. Diese beiden Büschel müssen projectivisch sein, da jeder derselben, wie soeben bewiesen wurde, mit R und R_1 projectivisch ist. Es lässt sich nun zeigen, dass je zwei Strahlen von S und S_1, die sich in einem Curvenpunkte T schneiden, entsprechende Strahlen sind. Der Strahl MT entspricht nämlich dem Punkte B_1 der Reihe R_1 und dies ist offenbar auch dann der Fall, wenn man sich M an die Stelle M_1 denkt. Daraus geht nun hervor, dass die durch R und R_1 erzeugte Curve zweiter Classe immer auch als ein Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel erhalten werden kann. Es ist somit jede Curve zweiter Classe auch eine Curve zweiter Ordnung.

Aus dieser Untersuchung folgt auch der Satz:

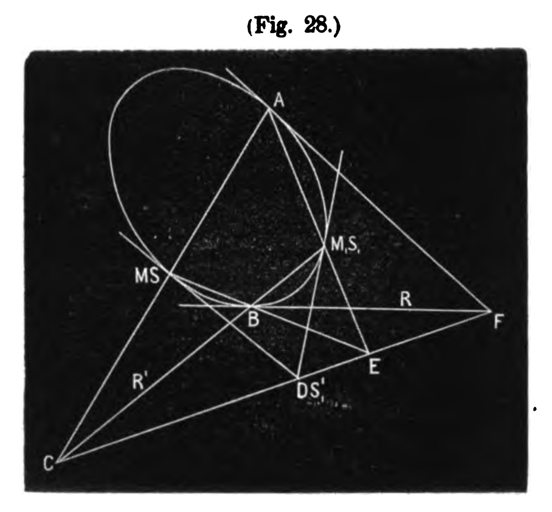
7. Die Punktreihen R und R_1, welche auf irgend zwei festen Tangenten einer Curve zweiter Classe durch eine dritte bewegliche Tangente t entstehen, sind jenem Strahlenbüschel S projectivisch verwandt, der durch alle Verbindungslinien irgend eines festen Punktes dieser Curve mit den Berührungspunkten von t gebildet wird. Entsprechende Elemente von R, R_1 und S sind solche, welche sich für ein und dieselbe Lage von t ergeben.

Wir wollen nun zeigen, dass jede Curve zweiter Ordnung auch eine Curve zweiter Classe ist.

M und M_1 (Fig. 28) seien die Mittelpunkte zweier eine Curve zweiter Ordnung erzeugender Strahlenbüschel S und S_1; ferner nehmen wir an, A und B wären irgend zwei beliebige Punkte dieser Curve. In A und B sei je eine

Tangente an die Curve gezogen und jede dieser Tangenten denken wir uns als eine Secante, deren zwei Durchschnittspunkte einander unendlich nahe liegen. Letzterer Voraussetzung gemäss bilden die genannten Tangenten mit den vier Geraden MA, M_1A, MB und M_1B ein der Curve eingeschriebenes Sechseck. Die gegenüberliegenden Seiten desselben sind MA, M_1B, dann MB, M_1A und die beiden in A und B gezogenen Tangenten; es liegen somit die Durchschnittspunkte C, E und F dieser Linien dem Satze 6 dieses Abschnittes zufolge in ein und derselben Geraden.

(Fig. 28.)



Sind MD und M_1D die beziehungsweise in M und M_1 an die Curve zweiter Ordnung gezogenen Tangenten, so liegt der Punkt D, in welchem sich MD und M_1D schneiden, ebenfalls in jener Geraden, die durch C, E und F bestimmt wird, denn die sechs Geraden MA, M_1A, MB, M_1B, MD, M_1D bilden auch ein der Curve zweiter Ordnung eingeschriebenes Sechseck, es müssen daher C, D und E, also auch F sich in ein und derselben Geraden befinden.

Stellen wir uns nun vor, der Punkt A verändere seine Lage in der Curve. Die Folge dieser Aenderung ist, dass auch die Linien MA, M_1A und AF ihre Lage ändern, während die Geraden MB, M_1B und die in M, B und M_1 gezogenen Tangenten in Ruhe bleiben. Von den vier Punkten C, D, E und F bleibt somit nur D an derselben Stelle, während C in der Geraden M_1B und F in der im Punkte B gezogenen Tangente seinen Ort verändert. Jedenfalls aber liegen C, D und F immer in ein und derselben Geraden.

Wenn nun der Punkt A sich so bewegt, dass er stets in der Curve bleibt, so bildet jede Gerade MA einen Strahl des Büschels S und alle Punkte C gehören einer Punktreihe R' an, welche durch den Schnitt des Büschels S mit der Geraden M_1B entsteht. Ebenso bilden alle Geraden DC einen Strahlenbüschel S′ dessen Mittelpunkt D ist, und welcher gegen S perspectivisch liegt, nachdem S und S' Scheine der Reihe R' sind. Die sämmtlichen Punkte F, wo alle in den verschiedenen Lagen von A an die Curve gezogenen Tangenten AF jene Gerade schneiden, welche die Curve in B berührt, bilden ferner eine Punktreihe, die wir R nennen wollen. Diese Reihe kann als ein Schnitt des Strahlenbüschels S' mit der in B gezogenen Tangente betrachtet werden, es sind somit R und R' Schnitte ein und desselben Strahlenbüschels, folglich müssen sie

projectivisch sein. Da nun S gegen R' perspectivisch liegt, so sind S und R, also auch S_1 und R projectivisch verwandt.

Der Punkt B wurde in der Curve beliebig gewählt, daher muss für jede in irgend einem andern Curvenpunkte gezogene Tangente dasselbe gelten, was wir für die in B berührende Gerade nachgewiesen haben. Es lässt sich somit behaupten, dass die Durchschnittspunkte irgend einer von dem Träger der Reihe R verschiedenen Tangente mit den sämmtlichen Lagen der beweglichen Tangente AF ebenfalls eine Punktreihe R_1 bilden, welche sowohl mit S, als auch mit S_1 projectivisch ist. Daraus folgt, dass R und R_1 unter sich projectivisch sein müssen und nachdem die bewegliche Tangente AF in jeder ihrer Lagen entsprechende Punkte von R und R_1 verbindet, da der Punkt F der Reihe R, also auch der Durchschnitt von AF mit R_1 immer dem Strahle MA des Büschels S entspricht, so kann die in Rede stehende Curve auch als ein Erzeugniss zweier projectivischer Reihen R und R_1 betrachtet werden. Es ist daher jede Curve zweiter Ordnung auch eine Curve zweiter Classe.

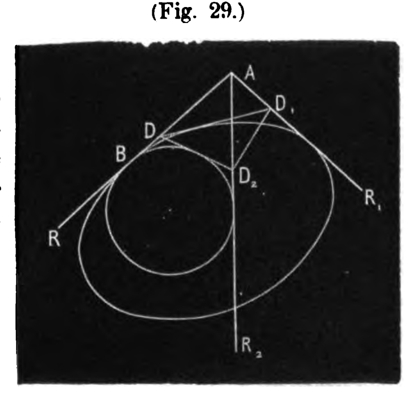
Aus dem Umstande, dass jede Curve zweiter Classe eine Curve zweiter Ordnung und umgekehrt jede Curve zweiter Ordnung eine Curve zweiter Classe ist, folgt, dass diese beiden Curvengattungen identisch sind.

d) Beweise für die Identität der Curven zweiter Ordnung und Classe mit den Kegelschnittslinien.

Bevor wir unsere Untersuchungen über die Erzeugnisse projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel, welche in derselben Ebene liegen, fortsetzen, wollen wir nachweisen, dass diese Erzeugnisse mit den Kegelschnittslinien identisch sind. Um den Beweis dafür herzustellen, zeigen wir, dass durch jedes solche Erzeugniss sich immer eine Kegelfläche zweiten Grades legen lässt.

In Figur 29 seien R und R_1 die eine Curve zweiter Classe erzeugenden Punktreihen. Der Durchschnittspunkt der letzteren heisse A und der Berührungspunkt des Trägers von R mit der erzeugten Curve sei B. Wir construiren nun in der Curven ebene einen Kreis von beliebigem Halbmesser, welcher den Träger von R, also auch die Curve zweiter Classe, im Punkte B berührt. Von irgend einem Punkte der Reihe R, etwa von D aus, ziehen wir sodann eine Tangente an die Curve zweiter Classe und eine zweite Tangente an den Kreis. Der Durchschnittspunkt der ersteren Tangente mit dem Träger von R_1 sei D_1 und der Durchschnitt der zweiten Tangente mit einer aus A ebenfalls an den Kreis

(Fig. 29.)

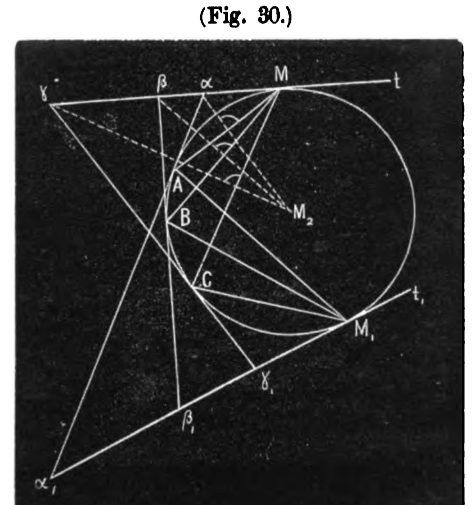


gezogenen Tangente heisse D_2. Für jeden in R gewählten Punkt D erhält man durch diese Construction ein Paar solcher Durchschnittspunkte D_1 und D_2. Sämmtliche Punkte D und D_1 bilden die erzeugenden Reihen R und R_1, während durch die Punkte D_2 eine neue Reihe entsteht, welche wir R_2 nennen wollen.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass R und R_2, also auch R_1 und R_2 projectivisch verwandt sind. Der Kreis hat nämlich, sowie jede Curve zweiter Classe überhaupt, die Eigenschaft, dass die Durchschnittspunkte zweier beliebiger Tangenten mit allen übrigen Tangenten der Curve zwei projectivische Punktreihen bilden.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir die Figur 30. — t und t_1 seien Tangenten, welche einen Kreis in den beliebig gewählten Punkten M und M_1 berühren. A, B und C nennen wir ferner drei andere beliebige Punkte des Kreises und α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Durchschnitte von t und t_1 mit den in A, B und C gezogenen Tangenten. Verbindet man die Punkte α, β und γ mit dem Mittelpunkte M_2 des Kreises, so bilden die so erhaltenen Geraden einen Strahlenbüschel S_2, welcher jenem Büschel S congruent ist, der durch die Verbindungslinien des Punktes M mit A, B und C gebildet wird, denn die Strahlen von S, nämlich die Sehnen MA, MB, MC stehen beziehungsweise senkrecht auf den Geraden $M_2\alpha$, $M_2\beta$, $M_2\gamma$. Da nun der aus den Sehnen M_1A, M_1B und M_1C gebildete Strahlenbüschel S_1 dem Büschel S congruent ist, nachdem die auf gleichen Bögen aufstehenden Umfangswinkel AMB und AM_1B, sowie BMC und BM_1C einander gleich sind, so ist S_2 auch jenem Strahlenbüschel S_3 congruent, der entsteht, wenn man M_2 mit α_1, β_1 und γ_1 verbindet, oder, was dasselbe ist, von M_2 auf die Sehnen M_1A, M_1B und M_1C Senkrechte fällt. Die auf den Tangenten t und t_1 sich ergebenden Punktreihen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sind somit Schnitte zweier congruenter, also auch projectivisch verwandter Strahlenbüschel S_2 und S_3, daher müssen diese Reihen ebenfalls projectivisch verwandt sein. Für irgend ein anderes Paar von Tangenten gilt offenbar dasselbe, was für die beliebig gewählten Tangenten t und t_1 bewiesen wurde, es erscheint somit obige Behauptung gerechtfertigt. — Zu bemerken ist noch, dass je zwei entsprechende Punkte der auf t und t_1 liegenden Reihen, z. B. α und α_1, wie leicht einzusehen, sich in ein und derselben Tangente befinden.

(Fig. 30.)



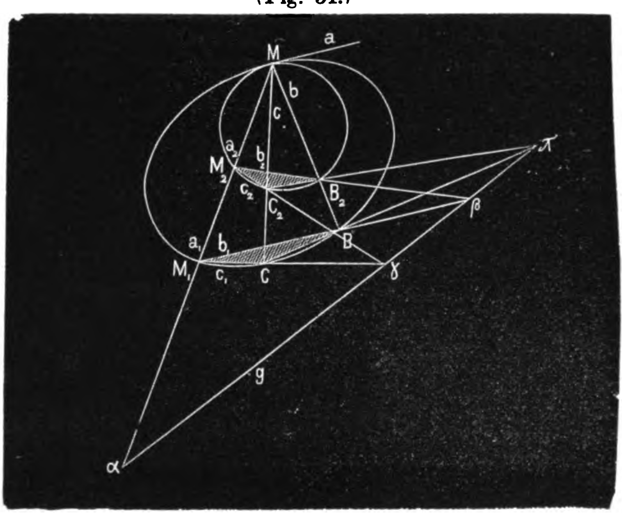
In Figur 29 sind AB und AD_2 Tangenten eines Kreises, welche von einer dritten DD_2 geschnitten werden, es bilden also, dem Vorhergehenden zufolge, alle Punkte D und D_2 zwei projectivische Punktreihen R und R_2 Da nun R und R_1 projectivisch sind, so müssen es auch R_1 und R_2 sein.

Nachdem D_1 und D_2 entsprechende Punkte von R_1 und R_2 sind, so folgt, dass diese Reihen den Punkt A entsprechend gemein haben, wie leicht einzusehen ist, wenn man sich den Punkt D im Berührungspunkte B gewählt denkt. Die beiden Reihen liegen also perspectivisch und alle Verbindungslinien D_1D_2 entsprechender Punkte müssen sich in einem einzigen Punkte schneiden. Dies wird auch dann der Fall sein, wenn der Träger von R_2 sammt dem Kreise durch Drehung um AB in irgend eine andere Lage gegen R_1 gebracht wird, denn durch eine solche Drehung verlieren R_1 und R_2 ihre perspectivische Lage nicht. Den Durchschnittspunkt aller Verbindungslinien entsprechender Punkte von R_1 und R_2 nach geschehener Drehung denken wir uns nun als ein Projectionscentrum, von welchem aus der Kreis auf die Ebene der Curve zweiter Classe projicirt wird, oder anders aufgefasst, als die Spitze eines Kegels, dessen Basis der gedrehte Kreis ist. Jede Tangente DD_2 projicirt sich dann offenbar als eine Tangente DD_1 der Curve zweiter Classe, woraus folgt, dass die Projection des Kreises auf der Ebene der genannten Curve mit dieser Curve identisch sein muss. Es kann demnach jede Curve zweiter Classe als die Projection eines Kreises auf einer Ebene betrachtet werden. Jede solche Curve ist also ein Kegelschnitt.

Da wir bereits die Identität der Curven zweiter Ordnung mit jenen zweiter Classe nachgewiesen haben, so folgt ohne weiteren Beweis, dass die Curven zweiter Ordnung ebenfalls Kegelschnittslinien sein müssen. Indess wollen wir letzteres noch besonders begründen.

In Figur 31 seien M und M_1 die Mittelpunkte zweier eine Curve zweiter

(Fig. 31.)



Ordnung erzeugender Strahlenbüschel S und S_1, von welchen wir der Einfachheit wegen nur die Strahlen abc und $a_1 b_1 c_1$ betrachten wollen. Die Durchschnittspunkte von bb_1 und cc_1 nennen wir beziehungsweise B und C. Der Strahl a sei die Tangente der Curve zweiter Ordnung im Punkte M; der ihm entsprechende ist dann, dieser Voraussetzung zufolge wie bekannt die Gerade MM_1. Wir construiren nun einen Kreis von beliebigem Halbmesser, welcher die Tangente a, also auch die Curve zweiter Ordnung in M berührt, und nennen die Durchschnitte von MM_1, b und c mit diesem Kreise beziehungsweise M_2, B_2 und C_2. Die Verbindungslinien des Punktes M_2 mit M, B_2 und C_2 bilden dann einen Strahlenbüschel S_2, welcher dem Büschel S congruent ist, nachdem alle Winkel in S_2 den entsprechenden Winkeln in S als Umfangswinkel des Kreises, welche auf gleichen Bögen aufstehen, gleiche Grösse haben. S und S_2 sind daher auch projectivisch verwandt und da S und S_1 projectivisch sind, so müssen es auch S_1 und S_2 sein. Da ferner S_1 und S_2 die Strahlen a_1 und a_2 entsprechend gemein haben, so liegen sie perspectivisch, folglich liegen die Durchschnittspunkte $\alpha\beta\gamma$ ... aller entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel in ein und derselben Geraden g. — Der Punkt π, in welchem sich die Geraden BC und B_2C_2 treffen, liegt auch in der Geraden g, wie aus dem Satze 15 hervorgeht, wenn man die Geraden MM_1, MC und MB als Träger dreier Punktreihen MM_2M_1, MC_2C, MB_2B betrachtet, welche den Punkt M entsprechend gemein haben. Diese drei Reihen sind nämlich projectivisch verwandt, da jede derselben die Projection einer anderen von ihnen für eines der Projectionscentra β, γ oder π ist, es müssen also β, γ und π, dem Satze zufolge in derselben Geraden liegen.

Wir denken uns nun den Kreis sammt dem Dreiecke $M_2B_2C_2$ durch Drehung um g in irgend eine andere Lage gebracht. Verbindet man nach geschehener Drehung die Punkte M_1 und M_2, C und C_2, sowie B und B_2, so werden sich diese drei Verbindungslinien in ein und demselben Punkte des Raumes schneiden, denn letzterer Punkt ist offenbar der Durchschnittspunkt jener drei Ebenen, welche durch die sich in β, γ und π schneidenden Geraden $B\beta$, $B_2\beta$, dann $M_1\gamma$, $M_2\gamma$ und $C\pi$, $C_2\pi$ gelegt werden können.

Denkt man sich diesen Punkt als Projectionscentrum — oder als Spitze eines Kegels, dessen Basis der gedrehte Kreis ist — so wird die Projection dieses Kreises auf der Ebene der Curve zweiter Ordnung mit letzterer Curve zusammenfallen, denn die projicirenden Geraden sind eben keine anderen, als die Verbindungslinien der Punkte M_1M_2, CC_2, BB_2 ....., es ist somit nachgewiesen, dass jede Curve zweiter Ordnung als Projection eines Kreises betrachtet werden kann. Jede solche Curve ist also eine Kegelschnittslinie.

e) Ueber die Erzeugung der verschiedenen Arten von Kegelschnittslinien.

Wird eine Kegelfläche zweiten Grades von einer Ebene geschnitten, so ist der entstehende Schnitt bekanntlich eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je

nachdem die schneidende Ebene zu keiner, zu einer oder zu zwei geradlinigen Erzeugenden der Kegelfläche parallel ist. Diese drei Gattungen von Kegelschnitten unterscheiden sich demnach wesentlich dadurch, dass die Ellipse keinen, die Parabel einen und die Hyperbel zwei unendlich entfernte Punkte besitzt.

Da alle unendlich fernen Punkte einer Ebene in ein und derselben Geraden liegen, wie wir gleich zeigen werden, so kann man auch sagen, ein Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem er mit der in seiner Ebene liegenden unendlich fernen Geraden keinen, einen oder zwei Punkte gemein hat. Im zweiten Falle wird die Curve von dieser Geraden berührt, da jede Gerade eine Tangente eines Kegelschnittes ist, wenn sie in der Ebene desselben liegt und ihn nur in einem Punkte trifft. — Dass die unendlich fernen Punkte einer Ebene in einer einzigen Geraden liegen müssen, geht daraus hervor, dass jede Gerade nur einen unendlich fernen Punkt hat. Würden nämlich die unendlich fernen Punkte einer Ebene sich in einer Curve befinden, so könnte nicht jede Gerade der Ebene diese Curve nur in einem einzigen Punkte schneiden, es müsste also Gerade geben, welche mehr als einen unendlich fernen Punkt hätten.

Da aus jedem in der Ebene einer Curve zweiter Classe, ausserhalb der letzteren gelegenen Punkte zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden können, so ist es möglich an die Ellipse nach allen Richtungen ihrer Ebene zwei parallele Tangenten zu ziehen, denn je zwei solche Tangenten gehen von einem Punkte der unendlich fernen Geraden aus, deren sämmtliche Punkte ausserhalb der Ellipse liegen. An die Parabel können nach keiner Richtung zwei parallele Tangenten gezogen werden, denn zwei solche Tangenten müssten sich in einem Punkte der unendlich fernen Geraden treffen, und da diese selbst Tangente der Parabel ist, so hätte letztere drei von demselben Punkte ausgehende Tangenten, was bei Curven zweiter Classe nicht möglich ist. Bei der Hyperbel liegt ein Theil der unendlich fernen Geraden ausserhalb, der andere innerhalb der Curve; es können daher nicht nach allen, sondern nur nach solchen Richtungen, welche gegen Punkte des ausserhalb liegenden Theiles convergiren, zwei parallele Tangenten an die Hyperbel gezogen werden. Nach jener Richtung, welche durch einen der zwei Durchschnittspunkte der unendlich fernen Geraden mit der Hyperbel bestimmt wird, kann nur eine einzige Tangente an die genannte Curve gezogen werden, weil diese zwei unendlich fernen Punkte in der Curve selbst liegen, also die Berührungspunkte bilden. Die zwei gegen die genannten Durchschnittspunkte convergirenden Tangenten werden die Asymptoten der Hyperbel genannt.

Wir wollen nun die Bedingungen aufstellen, unter welchen sich eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel als Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen oder Strahlenbüschel ergibt.

Wenn als Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen eine Parabel zu Stande kommen soll, so muss die unendlich ferne Gerade der Ebene dieser

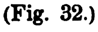
Reihen die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte bilden, da die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Parabel sein muss. Dies ist nur dann möglich, wenn die unendlich fernen Punkte der zwei Reihen sich entsprechen, woraus folgt, dass eine Parabel nur durch zwei ähnliche Punktreihen entstehen kann. Daraus ergibt sich auch, dass je zwei beliebige Tangenten einer Parabel durch alle übrigen Tangenten dieser Curve immer in zwei ähnlichen Punktreihen geschnitten werden.

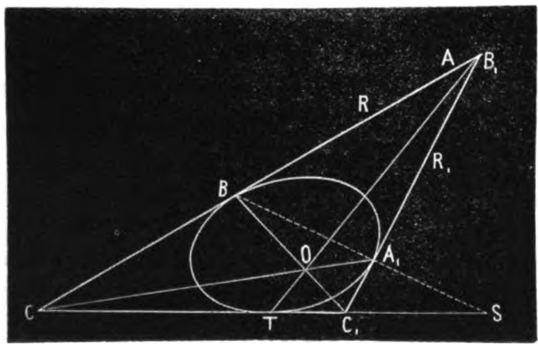
Sind die zwei erzeugenden, ähnlichen Punktreihen zu einander parallel, so liegen sie perspectivisch, weil sie dann ihren unendlich fernen Punkt entsprechend gemein haben. Die Parabel geht in diesem Falle in eine Gerade über, nämlich in die Verbindungslinie des Projectionscentrums beider Reihen mit dem unendlich fernen Punkte der letzteren. Dieser unendlich ferne Punkt gehört auch der Parabel an, weil er der Schnittpunkt der Träger beider Reihen ist, und sich selbst entspricht, also der Berührungspunkt der erzeugten Curve mit den Trägern der erzeugenden Reihen sein muss.

Aus dem Umstande, dass die Parabel in eine Gerade übergeht, sobald man zwei parallele erzeugende Reihen annimmt, folgt ebenfalls, dass es nicht möglich ist, an eine Parabel zwei zu einander parallele Tangenten zu ziehen.

Sind die erzeugenden Reihen einander nicht ähnlich, so kann durch sie, wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, nur eine Ellipse oder Hyperbel entstehen. Unter welchen Umständen die eine oder die andere dieser Curven erzeugt wird, wollen wir nun untersuchen.

Es seien R und R_1 (Fig. 32) die zwei erzeugenden Reihen; A, B_1 nennen wir die im Durchschnitte ihrer Träger vereinigten Punkte, A_1, B, nämlich die entsprechenden von A und B_1, sind demnach die Berührungspunkte der Träger von R und R_1; endlich heissen wir C und C_1 irgend ein drittes Paar sich entsprechender Punkte. Die Träger der erzeugenden Reihen bilden mit der Tangente CC_1, deren Berührungspunkt wir T nennen wollen, ein dem Kegelschnitte umschriebenes Dreieck, für welches sich mit Hilfe des Brianchon'schen Satzes leicht nachweisen lässt, dass die Geraden AT, CA_1 und C_1B, nämlich die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten, sich in ein und demselben Punkte O schneiden müssen. Betrachtet man jede Dreiecksseite als zwei coin-


(Fig. 32.)



cidirende Gerade, die sich in dem Berührungspunkte derselben Seite schneiden, so geht das Dreieck in ein dem Kegelschnitte umschriebenes Sechseck über, auf welches der Brianchon'sche Satz Anwendung findet. Gegenüberliegende Ecken dieses Sechseckes sind dann immer ein Berührungspunkt einer Dreiecksseite und die der letzteren gegenüberliegende Ecke des Dreieckes.

Verbindet man die Berührungspunkte A_1 und B der Träger von R und R_1 und bezeichnet den Durchschnitt dieser Berührungssehne und der Tangente CC_1 mit S, so bilden die vier Punkte CTC_1S eine harmonische Punktreihe, wie leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass C und C_1 die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des Viereckes AA_1OB und S, T die Durchschnitte der Diagonalen dieses Viereckes mit der Geraden CC_1 sind. (Satz 37). Die Punkte C und C_1, sowie S und T bilden conjugirte Punkte der harmonischen Reihe, daher rückt S in unendliche Entfernung, wenn T die endliche Strecke CC_1 halbirt und umgekehrt müsste S in der Mitte zwischen C und C_1 liegen, wenn der Berührungspunkt T sich in unendlicher Entfernung befinden soll.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, in welchem die Träger der erzeugenden Reihen R und R_1 (Fig. 33) zu einander parallel sind. G und G' seien die Gegenpunkte dieser Reihen, also zugleich die Berührungspunkte ihrer Träger mit dem Kegelschnitt, nachdem die den Punkten G und G' entsprechenden unendlich fernen Punkte sich im Durchschnitte von R und R_1 befinden. CC_1 wäre irgend eine Tangente, deren Durchschnitt mit der Berührungssehne GG' wir S nennen wollen. Der Berührungspunkt dieser Tangente heisse T Dem Vorhergehenden zufolge bilden dann die vier Punkte $SCTC_1$ eine harmonische Reihe.

(Fig. 33.)

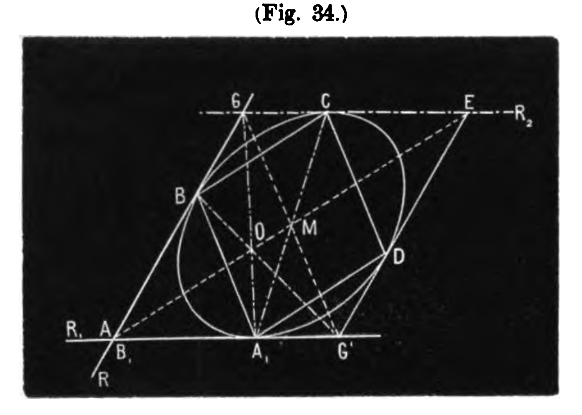
Es frägt sich nun, unter welchen Umständen der Berührungspunkt T in unendliche Entfernung gelangt. Für diesen Fall ist nämlich der Kegelschnitt eine Hyperbel, während dann, wenn T für jede Lage von C_1 in endlicher Entfernung bleibt, die erzeugte Curve eine Ellipse sein muss. Da S und T conjugirte harmonische Punkte sind, so kann T nur dann in unendliche Entfernung kommen, wenn S der Halbirungspunkt der Strecke CC_1, also auch der Strecke GG' wird. Dann liegen C und C_1 auf verschiedenen Seiten der Geraden GG_1, woraus leicht zu ersehen ist, dass R und R_1 für diesen Fall einstimmig verlaufend sein müssen. — Dieselbe Unterscheidung, welche wir bei conjectivischen Reihen bezüglich ihres Verlaufens gemacht haben, können nämlich auch für Reihen, deren Träger parallel sind gemacht werden. — Wenn es nun eine Lage von CC_1 gibt, für welche der Punkt S mit dem Halbirungspunkte M der Strecke GG' zusammenfällt, so muss es noch eine zweite Lage

CC_1 geben, für welche dasselbe stattfindet. Dies wird klar, wenn man sich M als Mittelpunkt zweier Strahlenbüschel denkt, wovon der eine gegen R, der andere gegen R_1 perspectivisch liegt. Geht nämlich die Gerade CC_1 durch M, so bildet sie einen Doppelstrahl der zwei concentrischen Strahlenbüschel und da solche Büschel im allgemeinen zwei Doppelstrahlen besitzen, so muss es auch noch eine zweite Verbindungslinie entsprechender Punkte CC_1 geben, für welche M in CC_1 liegt. Diese zwei Verbindungslinien, welche durch M gehen, sind die Asymptoten der durch R und R_1 erzeugten Hyperbel, nachdem ihre Berührungspunkte T sich in unendlicher Entfernung befinden. Daraus folgt nun, dass sobald R und R_1 nicht ähnlich sind und einstimmig verlaufen, die erzeugte Curve immer eine Hyperbel ist.

Wenn R und R_1 entgegengesetzt verlaufen, so liegen je zwei entsprechende Punkte C und C_1, wie man sich leicht überzeugen kann, immer auf derselben Seite der Geraden GG'. Der Durchschnittspunkt S befindet sich dann stets ausserhalb der endlichen Strecke CC_1, also der Berührungspunkt T stets innerhalb derselben, nachdem S und T durch C und C_1 harmonisch getrennt werden. Aus dieser Betrachtung folgt, dass T für entgegengesetzt verlaufende Reihen niemals in unendliche Entfernung gelangen kann; wir schliessen also, dass wenn R und R_1 nicht ähnlich sind und entgegengesetzt verlaufen, die erzeugte Curve immer eine Ellipse sein muss.

Der allgemeine Fall, in welchem die erzeugenden Reihen R und R_1 (Fig. 34) nicht parallel sind, lässt sich leicht auf den soeben untersuchten zurückführen.

(Fig. 34.)



Die Gegenpunkte der beiden Reihen nennen wir G und G', die im Durchschnitte der Träger von R und R_1 vereinigten Punkte der letzteren seien A und B_1 und der dem Punkte A entsprechende, also der Berührungspunkt des Trägers von R sei A_1. Durch diese Annahmen sind drei Paare sich entsprechender Punkte von R und R_1 bestimmt, nämlich die Gegenpunkte mit den ihnen entsprechenden unendlich fernen Punkten und das Paar AA_1, es kann daher dem Satze 11 zufolge kein viertes Paar solcher Punkte beliebig gewählt werden. Der Berührungspunkt B des Trägers von R ist demnach aus den Angaben zu ermitteln. Derselbe wird durch Benützung des Brianchon'schen Satzes leicht in folgender Weise gefunden: Man zieht aus G eine Parallele zu R_1 und aus G' eine Parallele zu R, verbindet den Durchschnittspunkt E dieser Parallelen mit

A, ebenso G mit A_1, wodurch sich im Schnitte von AE mit A_1G der Punkt O ergibt, welchen man endlich noch mit G' verbindet. Die Gerade $G'O$ trifft dann den Träger von R im Punkte B. Die aus G und G' gezogenen Parallelen bilden nämlich zwei Projectionsstrahlen, da sie entsprechende Punkte verbinden, sie sind demnach Tangenten des Kegelschnittes und können als Seiten eines dem letzteren umschriebenen Sechseckes $ABGEG'A_1$ betrachtet werden, bei welchem sich die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken AE, A_1G und BG' in ein und demselben Punkte O schneiden.

Die Punkte $ABOA_1$ bilden ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten sich in den Punkten G und G' treffen. Die Diagonale AO dieses Viereckes, welche mit der Diagonale des dem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes $AG\,EG'$ coincidirt, trifft die Gerade GG' in ihrem Halbirungspunkte M, nämlich dem Mittelpunkte des genannten Parallelogrammes. Da nun die Punkte G, M, G' und der Durchschnitt der zweiten Diagonale A_1B des Viereckes mit GG' nach Satz 37 eine harmonische Reihe bilden, so muss A_1B mit der Diagonale GG' des umschriebenen Parallelogrammes parallel sein, nachdem der dem Halbirungspunkte M harmonisch conjugirte Punkt, nämlich der Durchschnitt von A_1B und GG' sich in unendlicher Entfernung befindet. Es gilt also der Satz:

8. **Die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Reihen R und R_1, welche einen Kegelschnitt erzeugen, ist immer parallel zur Verbindungslinie der Gegenpunkte dieser Reihen.**

Diesem Satze zufolge ergibt sich B einfach im Durchschnitte der aus A_1 zu GG' gezogenen Parallelen mit dem Träger von R. Wir schliessen daraus, dass der Berührungspunkt von R_1 sich innerhalb oder ausserhalb der endlichen Strecke AG befindet, je nachdem der Berührungspunkt von R innerhalb oder ausserhalb der endlichen Strecke AG' liegt.

Als Träger von Reihen, welche den fraglichen Kegelschnitt erzeugen, können wir auch die Geraden AG und GE betrachten. Diese beiden Reihen nennen wir beziehungsweise R und R_2; ihre Gegenpunkte sind die Eckpunkte A und E des dem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes. Denn die Tangente AG' verbindet den Punkt A in R mit dem unendlich fernen Punkte in R_1 und die Tangente EG' den Punkt E mit dem unendlich fernen Punkte in R, es müssen somit die beiden unendlich fernen Punkte den Punkten A und E entsprechen. Der Berührungspunkt C des Trägers von R_2 ergibt sich nach Satz 8, 2. Abschnitt im Durchschnitte einer aus B zur Verbindungslinie der Gegenpunkte AE gezogenen Parallelen mit diesem Träger. Ebenso erhält man den Berührungspunkt D der Geraden EG' im Durchschnitte einer aus C zu GG', oder aus A_1 zu AE gezogenen Parallelen mit der Geraden EG'. Die vier Berührungspunkte A_1BCD der Seiten des umschriebenen Parallelo-

grammes bilden also die Ecken eines Parallelogrammes, dessen Seiten zu den Diagonalen des umschriebenen parallel sind. Dass beide Parallelogramme einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, bedarf wohl keines Beweises.

Die parallelen Reihen R_1 und R_2 lassen uns nun leicht erkennen, ob die durch sie erzeugte Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. Wir wissen bereits, dass erstere oder letztere Curve zu Stande kommt, je nachdem R_1 und R_2 entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen. Die genannten Reihen verlaufen immer entgegengesetzt, sobald A_1 zwischen A und G' liegt, denn in Folge dessen befindet sich auch B zwischen A und G, und ebenso C zwischen G und E; die einander entsprechenden Punkte A und G liegen also dann auf derselben Seite der Verbindungslinie der Gegenpunkte $A_1 C$, woraus wir schliessen können, dass R_1 und R_2 entgegengesetzt verlaufen. Es lässt sich demnach folgender Satz aufstellen:

9. Die durch zwei schief gegeneinander gelegene, nicht ähnliche Reihen erzeugte Curve ist entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die Punkte A_1, B, welche dem Durchschnitte A der Träger beider Reihen entsprechen, zwischen A und den Gegenpunkten G, G' liegen, oder sich ausserhalb der Strecken AG und AG' befinden.

Die Gattung des erzeugten Kegelschnittes hängt also nur von der Lage der Gegenpunkte und der Berührungspunkte der erzeugenden Reihen gegen den Durchschnittspunkt der letzteren ab, nicht aber etwa von der Grösse des Winkels, den die Träger der Reihen einschliessen. Daraus folgt, dass wenn man die Reihen durch Drehen um ihren Schnittpunkt in eine andere gegenseitige Lage bringt, die erzeugte Curve ihre Gattung nicht ändert. Dies kann jedoch der Fall sein, wenn man die Reihen derart verschiebt, dass die im Durchschnitte ihrer Träger vereinigten Punkte andere werden. Gelangt durch eine solche Verschiebung der Gegenpunkt einer der zwei Reihen in den Durchschnitt beider Reihen, so bildet der Träger der anderen Reihe eine Asymptote, denn der Berührungspunkt des Trägers der letzteren Reihe liegt dann in unendlicher Entfernung nachdem derselbe dem im Durchschnitte beider Reihen befindlichen Gegenpunkte entspricht. Befinden sich demnach beide Gegenpunkte im Durchschnitte der zwei Reihen, so sind beide Träger Asymptoten, und umgekehrt liegen bei zwei projectivischen Reihen, welche durch den Durchschnitt aller Tangenten einer Hyperbel mit den Asymptoten zu Stande kommen, die Gegenpunkte im Durchschnitte der beiden Asymptoten.

Befinden sich die beiden erzeugenden Reihen in perspectivischer Lage, so geht der erzeugte Kegelschnitt in zwei Punkte über. Diese Punkte sind das Projectionscentrum und der Punkt, welchen die Reihen entsprechend gemein haben. Der letztere Punkt muss nämlich auch zum Erzeugnisse der Reihen gehören, weil er in beiden Reihen dem Schnittpunkte

der Träger entspricht (mit welchem er coincidirt) also den Berührungspunkt der erzeugten Curve mit den Trägern bildet.

In dem speciellen Falle, wenn eine der erzeugenden Punktreihen nur aus einem einzigen Punkte besteht, ist auch der erzeugte Kegelschnitt nur **ein einziger Punkt.** — Dass eine Punktreihe auch nur aus einem Punkte bestehen kann sieht man leicht ein, wenn man sich einen Strahlenbüschel durch eine Gerade geschnitten denkt, welche durch den Mittelpunkt des Büschels geht.

Wir gehen nun zur Untersuchung der Bedingungen über, unter welchen eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel durch zwei in derselben Ebene befindliche projectivische Strahlenbüschel entstehen. Um feststellen zu können, ob zwei solche Büschel S und S_1 entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen, denken wir uns den einen derselben parallel zu sich selbst, also derartig in seiner Ebene verschoben, dass die Richtung seiner Strahlen nicht geändert wird, bis die beiden Büschel concentrisch werden. Je nachdem die so erhaltenen concentrischen Büschel dann entgegengesetzt oder einstimmig verlaufen, sind auch die ursprünglichen Büschel entgegengesetzt oder einstimmig verlaufend. Die Art des Verlaufens zweier einen Kegelschnitt erzeugender Strahlenbüschel bietet uns ein Mittel dar, die Gattung dieses Kegelschnittes in einfacher Weise zu erkennen, ohne dass man nöthig hätte, die Curve selbst zu construiren. Vor allem ist klar, dass die erzeugte Curve nur dann eine Parabel oder Hyperbel sein kann, wenn in den beiden Strahlenbüscheln S und S_1 ein oder zwei Paare von parallelen, sich entsprechenden Strahlen vorkommen, weil die Curve nur dann unendlich ferne Punkte besitzt. Solche parallele Strahlen werden, wenn man S und S_1 auf die angegebene Weise in concentrische Lage bringt, offenbar Doppelstrahlen bilden; das zu Stande kommen von Kegelschnittslinien mit unendlich fernen Punkten hängt somit davon ab, dass die beiden concentrischen Strahlenbüschel Doppelstrahlen haben. Sind keine Doppelstrahlen vorhanden, so wird die Curve eine Ellipse, weil es dann in S und S_1 kein Paar von parallelen, sich entsprechenden Strahlen, also auch keine unendlich fernen Curvenpunkte geben kann. Mit Rücksicht auf diese Umstände und darauf, dass in zwei entgegengesetzt verlaufenden, concentrischen Strahlenbüscheln immer zwei getrennte, reelle Doppelstrahlen vorhanden sind (Satz 44), können wir nun behaupten:

10. **Zwei in derselben Ebene befindliche schief gegen einander gelegene projectivische Strahlenbüschel erzeugen immer eine Hyperbel, wenn sie entgegengesetzt verlaufen.**

Die Asymptoten der erzeugten Hyperbel sind parallel zu den Doppelstrahlen der in concentrische Lage gebrachten Büschel, ihre Richtung kann somit leicht gefunden werden.

Wird von zwei **entgegengesetzt** verlaufenden Strahlenbüscheln der eine um seinen Mittelpunkt beliebig gedreht, ohne dass er dabei aus seiner Ebene heraus tritt, so bleibt die durch beide Büschel erzeugte Curve nach

obigem Satze stets eine Hyperbel. Werden bei dieser Drehung die entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zu einander parallel, liegen also die unendlich fernen Punkte in zwei auf einander senkrechten Richtungen, so bilden die Asymptoten rechte Winkel und die Hyperbel ist dann eine gleichseitige. Zwei beliebige entgegengesetzt verlaufende projectivische Strahlenbüschel können daher immer in solche Lagen gebracht werden, dass sie eine gleichseitige Hyperbel erzeugen. Man braucht dieselben nur so zu drehen, dass die entsprechenden Schenkel ihrer entsprechenden rechten Winkel zu einander parallel werden. — Wenn die beiden Büschel durch Drehung des einen in perspectivische Lage kommen, so geht die Hyperbel in zwei gerade Linien über. Die eine dieser Geraden ist der geradlinige Durchschnitt der erzeugenden Strahlenbüschel, die zweite Gerade ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Büschel. Letztere Gerade gehört nämlich auch dem Erzeugnisse der Büschel an, nachdem jedes solche Erzeugniss bekanntlich durch die Mittelpunkte der erzeugenden Büschel hindurchgeht. Besteht einer der beiden erzeugenden Büschel nur aus einem einzigen Strahle, so ist auch der erzeugte Kegelschnitt nur eine einzige Gerade. — Dass es Strahlenbüschel geben kann, welche nur aus einem Strahle, bestehen, sieht man ein, wenn man sich eine Punktreihe aus irgend einem Punkte derselben projicirt denkt.

In dem Falle, wenn die zwei Strahlenbüschel congruent und entgegengesetzt verlaufend sind, ist die erzeugte Hyperbel immer gleichseitig. Derartige Büschel haben nämlich, eben weil sie entgegengesetzt verlaufen, immer zwei Paare von sich entsprechenden parallelen Strahlen und diese Strahlenpaare bilden rechte Winkel. Letzteres ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass die Doppelstrahlen in zwei congruenten, entgegengesetzt verlaufenden Strahlenbüscheln immer auf einander senkrecht stehen müssen; denn coincidiren in solchen Büscheln zwei entsprechende Strahlen, so coincidiren auch die auf ersteren senkrecht stehenden in Folge der Congruenz der Büschel. Dieses zweite coincidirende Strahlenpaar bildet aber zugleich den zweiten Doppelstrahl, da es in zwei concentrischen Strahlenbüscheln nicht mehr als zwei Doppelstrahlen geben kann, wenn die beiden Büschel nicht identisch sind.

Wenn die zwei erzeugenden Büschel S und S_1 einstimmig verlaufen und man verschiebt den einen parallel zu sich selbst in seiner Ebene bis die zwei Büschel concentrisch werden, so haben sie nach Satz 47 entweder zwei gesonderte reelle oder zwei coincidirende reelle, oder zwei imaginäre Doppelstrahlen, je nachdem der Winkel rs_1, welcher von den sich nicht entsprechenden Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel gebildet wird, grösser, gleich, oder kleiner als der Winkel mn ist. — Durch mn bezeichnen wir bekanntlich jenen Winkel in dem einen Büschel, dessen entsprechender m_1n_1 im andern

Büschel dieselbe Grösse hat und so gelegen ist, dass er vom Strahle r, und $m_1 n_1$ vom Strahle s_1 halbirt wird. — Die Strahlen, welche sich zu Doppelstrahlen vereinigten, werden, wenn man S und S_1 in ihre ursprüngliche gegenseitige Lage bringt, zu einander parallel, schneiden sich also in unendlich fernen Punkten. Wir können somit behaupten:

11. Zwei in derselben Ebene befindliche, schief gegen einander gelegene projectivische Strahlenbüschel, welche einstimmig verlaufen, erzeugen entweder eine Hyperbel, eine Parabel, oder eine Ellipse, je nachdem der Winkel rs_1, welcher von den Richtungen der sich nicht entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel gebildet wird, grösser, gleich, oder kleiner ist, als der Winkel mn.

Dreht man einen der zwei erzeugenden einstimmig verlaufenden Büschel um seinen Mittelpunkt, ohne dass er dabei aus seiner Ebene heraustritt, so ändert sich je nach der gegenseitigen Lage der beiden Büschel die Gattung des durch sie erzeugten Kegelschnittes. Gelangen die Büschel durch diese Drehung in eine solche Lage, dass die Strahlen m und m_1 parallel werden, so schliessen die Richtungen der Strahlen r und s_1 einen Winkel ein, welcher dem Winkel mn gleich ist und die erzeugte Curve muss dann obigem Satze zufolge eine Parabel werden. Der unendlich ferne Punkt derselben liegt in der Richtung der Strahlen m und m_1. Dreht man den einen Büschel in solchem Sinne weiter, dass der Winkel rs_1 grösser als mn wird, so bleibt die erzeugte Curve so lange eine Hyperbel, bis die Strahlen n und n_1 zu einander parallel werden, in welchem Falle die Hyperbel in eine Parabel übergeht, deren unendlich ferner Punkt sich in der Richtung der Strahlen n und n_1 befindet. Bei weiterer Drehung wird der spitze, von r und s_1 gebildete Winkel kleiner als mn, dann gibt es in den beiden Büscheln kein einziges Paar von parallelen sich entsprechenden Strahlen und der erzeugte Kegelschnitt geht in eine Ellipse über. Erst wenn durch weiteres Drehen m und m_1 nochmals parallel werden, erhält man statt elliptischen Kegelschnitten wieder die Parabel. Bei einer vollen Umdrehung des einen Büschels ist demnach nur in zwei verschiedenen Lagen desselben die erzeugte Curve eine Parabel, in unzähligen andern Lagen entsteht eine Hyperbel oder eine Ellipse. Der Fall, in welchem eine Parabel erzeugt wird, bildet den Uebergang zu jenen zwei Arten der gegenseitigen Stellung beider Büschel die das Zustandekommen einer Ellipse und einer Hyperbel bedingen.

Werden bei der in Rede stehenden Drehung des einen Büschels die entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, also r und r_1, sowie s und s_1 zu einander parallel, so ist der erzeugte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel. Kommen die beiden Büschel in perspectivische Lage, so wird ihr Erzeugniss ein Linienpaar, welches aus dem Durchschnitte der Büschel und der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte besteht.

Sind die beiden einstimmig verlaufenden Büschel congruent so haben sie, wie aus dem Satze 46 leicht gefolgert werden kann, entweder kein einziges Paar von parallelen sich entsprechenden Strahlen, oder es müssen alle entsprechenden Strahlen parallel sein. Im ersteren Falle gehört demnach die erzeugte Curve zur Gattung der elliptischen Kegelschnitte, und zwar ist sie ein Kreis, wofür der Nachweis sich daraus ergibt, dass alle Peripheriewinkel eines Kreises, welche auf demselben Bogen aufstehen, gleiche Grösse haben. Im zweiten Falle besteht das Erzeugniss aus der Geraden, welche die Mittelpunkte beider Strahlenbüschel verbindet und der unendlich fernen Geraden, in welcher die Durchschnittspunkte sämmtlicher Paare von parallelen Strahlen liegen. — Bezüglich des Kreises bemerken wir noch, dass derselbe nur durch einstimmig verlaufende congruente Strahlenbüschel erzeugt werden kann; denn zwei sich entsprechende Winkel der erzeugenden Büschel werden zu Peripheriewinkeln, welche auf gleichen Bögen aufstehen, sie müssen also einander gleich sein.

Der Zusammenhang, welcher zwischen den Doppelstrahlen der beiden, in concentrische Lage gebrachten erzeugenden Strahlenbüscheln und den Asymptoten der erzeugten Curve besteht, lässt uns die Annahme imaginärer Asymptoten gerechtfertigt erscheinen. Haben nämlich die concentrischen Büschel imaginäre Doppelstrahlen, so sind auch die Asymptoten, da sie in jedem Falle zu den Doppelstrahlen parallel sind, imaginär. Nachdem nun stets, wenn die Doppelstrahlen imaginär werden, die erzeugte Curve eine Ellipse wird, so ist man berechtigt anzunehmen, dass jede Ellipse ein Paar von imaginären Asymptoten besitzt. — Der Fall, in welchem durch die beiden Büschel eine Parabel erzeugt wird, zeichnet sich dadurch aus, dass die zwei Doppelstrahlen der in concentrische Lage gebrachten Büschel coincidiren. Diese Doppelstrahlen sind reell; die Asymptoten einer Parabel müssen demnach ebenfalls reell sein, da aber die Parabel nur einen unendlich fernen Punkt besitzt, und in diesem Punkte von der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene berührt wird, so sind die beiden Asymptoten mit der unendlich fernen Geraden identisch.

f) Verschiedene, die Kegelschnitte betreffende Sätze und Aufgaben.

Die Resultate unserer bisherigen Untersuchungen über die Kegelschnitte gestatten uns eine grosse Zahl von Sätzen, welche sich auf diese Curven beziehen und anscheinend schwierig nachzuweisen sind, meist sehr einfach zu begründen, sowie auch verschiedene, die Kegelschnitte betreffende Aufgaben mit Leichtigkeit zu lösen. Wir wollen in Folgendem nur solche Sätze und Aufgaben betrachten, denen eine grössere Wichtigkeit zukommt, und welche sich auf Kegelschnitte im Allgemeinen beziehen.

Vor allem untersuchen wir die Sätze 3 und 6 dieses Abschnittes, nämlich den Brianchon'schen und Pascal'schen Satz, vorzugsweise rücksichtlich

ihrer Specialitäten, etwas näher. Wir wiederholen diese Sätze in veränderter Form und stellen sie einander gegenüber um auf ihre Analogie aufmerksam zu machen.

Werden sechs Punkte eines Kegelschnittes in irgend einer Reihenfolge zu einem Sechsecke verbunden, so liegen die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sechseckes in ein und derselben Geraden.
(Pascal.)

Werden sechs Tangenten eines Kegelschnittes in irgend einer Reihenfolge zu einem Sechsseit zusammengefasst, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken des Sechseckes in ein und demselben Punkte. (Brianchon.)

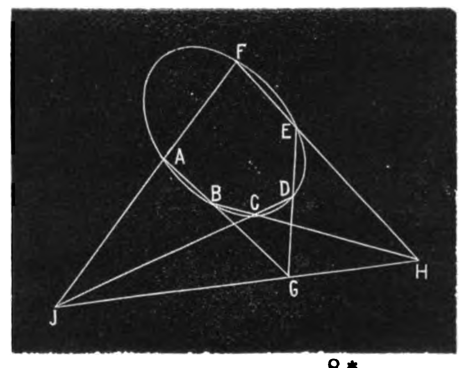
Als ersten der sechs Punkte *ABCDEF* (Satz links) kann man jeden beliebigen, z. B. *A* wählen und erhält, indem man die Reihenfolge der übrigen fünf Punkte so oft als möglich verändert, $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 = 120$ Buchstabengruppen, welche eben so vielen Sechsecken entsprechen. Unter letzteren sind offenbar alle möglichen Sechsecke enthalten, deren Eckpunkte die genannten Punkte sein können. Je zwei solche Sechsecke (z. B. *ACBDFE* und *AEFDBC*), bei welchen die Punkte *B* bis *F* in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, sind aber identisch, wir können also, indem wir die sechs Punkte durch gerade Linien in beliebiger Reihenfolge mit einander verbinden nur 60 verschiedene Sechsecke erhalten.

Der Kürze wegen nennt man ein Sechseck, das einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, ein Pascal'sches Sechseck und jede Gerade, in welcher die Durchschnittspunkte der drei Paare von gegenüberliegenden Seiten eines solchen Sechseckes liegen, eine Pascal'sche Linie.

Bezüglich des Brianchon'schen Satzes könnten ganz analoge Betrachtungen angestellt werden, wodurch sich ergeben würde, dass es möglich ist sechs Tangenten eines Kegelschnittes auf 60 verschiedene Arten zu einem dem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke zusammenfassen.

Wir haben bereits bemerkt, dass die in Rede stehenden zwei Sätze auch, umgekehrt werden können. Der Pascal'sche gibt uns dann ein einfaches Mittel an die Hand, folgende Aufgaben zu lösen:

(Fig. 35.)



Beliebig viele Punkte eines Kegelschnittes sollen ermittelt werden, wenn fünf Punkte desselben *ABCDE* (Fig. 35) gegeben sind.

Man zieht durch einen der fünf Punkte, z. B. *E*, eine beliebige Gerade *EF*, betrachtet dieselbe als Seite eines Sechseckes, von welchem die gegebenen fünf Punkte Eckpunkte

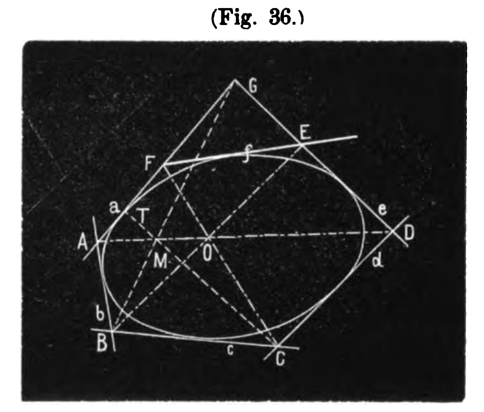
sind und sucht mit Hilfe des Pascal'schen Satzes jene Sechseckseite AF, deren Schnitt F mit EF ein Curvenpunkt ist. AF ergibt sich, wenn man die Schnittpunkte G und H der gegenüberliegenden Seitenpaare AB, DE und BC, EF durch eine Gerade verbindet, den Durchschnittspunkt J der letzteren Geraden mit der Seite CD ermittelt und die Gerade JA zieht. EF wird dann von JA in einem sechsten Punkte F des Kegelschnittes getroffen.

Mit Hilfe des Brianchon'schen Satzes lässt sich ebenso einfach die Aufgabe lösen:

Beliebig viele Tangenten eines Kegelschnittes sollen ermittelt werden, wenn fünf Tangenten desselben *abcde* (Fig. 36) gegeben sind.

Man wählt in einer der fünf Tangenten, z. B. in e, einen Punkt E, betrachtet denselben als Eckpunkt eines dem Kegelschnitte umschriebenen Sechseckes, von welchem fünf Seiten die gegebenen Tangenten sind, und bestimmt den sechsten Eckpunkt F, nämlich einen zweiten Punkt, der durch E gehenden Tangente. Dies geschieht, indem man die zwei Paare gegenüberliegender Ecken A, D und B, E durch Gerade verbindet, deren Durchschnittspunkt wir O nennen wollen, und die Gerade CO zieht. Die Tangente a und CO treffen sich dann in einem Punkte F, welcher in der durch E gehenden Tangente liegt; es ist somit die Verbindungslinie der Punkte E und F eine sechste Tangente des Kegelschnittes.

(Fig. 36.)

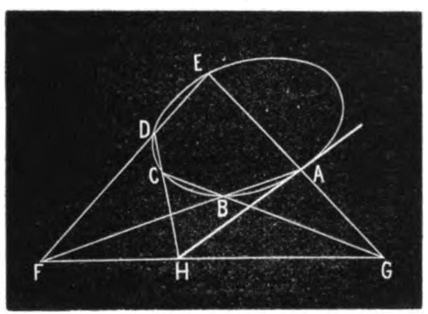


Bemerkenswerth ist, dass wenn bei einer bestimmten Reihenfolge der Eckpunkte eines Pascal'schen Sechseckes sich ungenaue, oder über die Zeichenfläche hinausfallende Schnitte der gegenüberliegenden Seiten ergeben, oft mit Vortheil eine andere Reihenfolge der Ecken gewählt werden kann, wenn der Pascal'sche Satz benützt wird, um einen sechsten Punkt eines Kegelschnittes zu bestimmen. — Bei der Ermittlung einer sechsten Tangente mit Hilfe des Brianchon'schen Satzes ist die Reihenfolge der als Sechseckseiten betrachteten Tangenten auf die Genauigkeit und leichtere Durchführbarkeit der Construction ebenfalls von Einfluss.

Liegen zwei Eckpunkte eines Pascal'schen Sechseckes einander unendlich nahe, so geht die Seite, welche durch dieselben bestimmt wird, in eine Tangente des Kegelschnittes, und das Sechseck in ein dem Kegelschnitte eingeschriebenes Fünfeck über Wir können somit den Satz aufstellen:

12. **Sind *ABCDE* (Fig. 37) fünf Punkte eines Kegelschnittes, so liegt der Schnittpunkt *H* der den Kegelschnitt in *A* berührenden Tangente mit *CD* in jener Geraden *FG*, welche die zwei Durchschnittspunkte der Geraden *AB*, *DE* und *BC*, *AE* verbindet.**

(Fig. 37.)



Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich die Aufgabe sehr leicht lösen:

Fünf Punkte eines Kegelschnittes sind gegeben, es soll die Tangente in irgend einem dieser Punkte construirt werden.

Will man z. B. die Tangente in *A* (Fig. 37) ermitteln, wenn ausser *A* noch vier andere Punkte *BCDE* des Kegelschnittes gegeben sind, so hat man die Punkte *F* und *G*, in welchen sich beziehungsweise die Geraden *AB*, *DE* und *BC*, *AE* schneiden, durch eine Gerade zu verbinden, den Durchschnittspunkt *H* von *CD* und *FG* zu bestimmen und die Gerade *AH*, welche die verlangte Tangente ist, zu ziehen.

Auch die Lösung der folgenden Aufgabe ergibt sich durch Benützung des obigen Satzes in einfacher Weise:

Vier Punkte *ABCD* (Fig. 37) eines Kegelschnittes, und die Tangente in einem derselben, etwa in *A*, sind gegeben, es sollen beliebig viele andere Punkte des Kegelschnittes ermittelt werden.

Dass der Kegelschnitt durch diese Angaben vollkommen bestimmt ist, leuchtet ein, sobald man sich erinnert, dass ein Berührungspunkt einer Tangente eigentlich zwei coincidirende Curvenpunkte repräsentirt, nachdem jede Tangente als eine Sekante aufgefasst werden kann, deren Durchschnittspunkte zusammenfallen. Da nun ausser dem Berührungspunkte der gegebenen Tangente noch drei andere Curvenpunkte gegeben sind, so ist der Kegelschnitt nach Satz 5, 2. Abschnitt vollkommen bestimmt.

Um noch einen Punkt *E* des Kegelschnittes zu finden, ziehen wir durch *D* eine beliebige Gerade *DE*, betrachten dieselbe als Seite eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechseckes, von welchem die Tangente in *A*, die Geraden *AB*, *BC* und *CD* ebenfalls Seiten sind, und bestimmen durch Anwendung obigen Satzes die sechste Seite *AE*. Diese schneidet die Gerade *DE* in einem Punkte *E* des Kegelschnittes.

Fallen zwei Seiten eines Sechseckes, das einem Kegelschnitte umschrieben ist, zusammen, so geht das Sechseck in ein Fünfeck über, auf welches der Brianchon'sche Satz ebenfalls Anwendung findet. Als Durchschnittspunkt der zwei zusammenfallenden Seiten muss dann der Berührungspunkt dieser Seiten

angesehen werden; denn lässt man zwei Tangenten einer Curve so lange an der Curve fortgleiten, bis sie mit einander coincidiren, so werden schliesslich die zwei Berührungspunkte und der Durchschnittspunkt beider Tangenten in einem einzigen auf der Curve gelegenenen Punkte zusammentreffen. Mit Rücksicht auf diesen Umstand können wir somit behaupten:

13. Ist *ABCDG* (Fig. 36) ein Fünfeck, welches einem Kegelschnitte umschrieben ist, so liegt der Berührungspunkt *T* der Seite *AG* in der Verbindungslinie des dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunktes *C* mit dem Durchschnittspunkte *M* der Diagonalen *AD* und *BG*.

Dieser Satz kann zur Lösung der Aufgabe benützt werden:

Fünf Tangenten eines Kegelschnittes sind gegeben, es soll der Berührungspunkt irgend einer derselben ermittelt werden.

Wären z. B. die Tangenten *abcde* (Fig. 36) gegeben und man wollte den Berührungspunkt von *a* finden, so hätte man dem Satze zufolge die Diagonalen *AD* und *BG* des von den Tangenten gebildeten Fünfeckes zu ziehen und ihren Durchschnittspunkt *M* mit dem Eckpunkte *C* zu verbinden; der Schnittpunkt von *MC* und *a* wäre dann der gesuchte Berührungspunkt.

Durch Anwendung des Satzes 13 lässt sich auch die folgende Aufgabe leicht lösen:

Vier Tangenten *abcd* (Fig. 36) eines Kegelschnittes und der Berührungspunkt *T* einer derselben, etwa von *a*, sind gegeben, es sollen beliebig viele andere Tangenten des Kegelschnittes ermittelt werden.

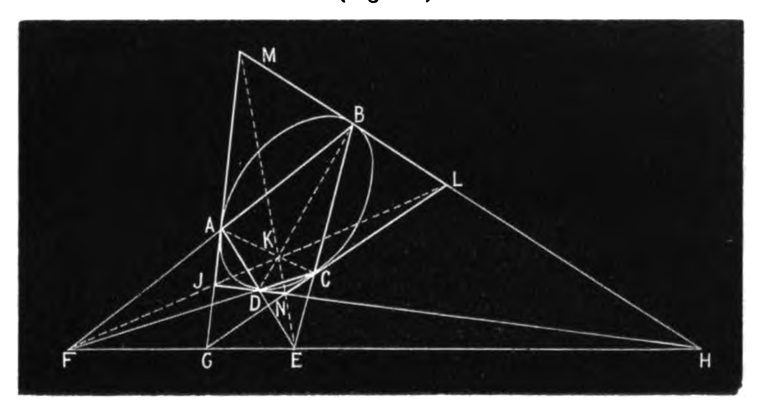
Durch die Angabe von vier Tangenten und des Berührungspunktes einer derselben ist der Kegelschnitt vollkommen bestimmt, nachdem die Tangente, deren Berührungspunkt gegeben ist, als zwei coincidirende Tangenten aufgefasst werden kann, welche sich im gegebenen Berührungspunkte schneiden. Es erscheinen somit eigentlich fünf Tangenten des Kegelschnittes gegeben, wodurch derselbe vollkommen bestimmt wird.

Die Ermittlung irgend einer anderen Tangente kann, mit Berücksichtigung obigen Satzes, auf folgende Weise geschehen: Man wählt in *d* einen beliebigen Punkt *D*, verbindet denselben mit dem Durchschnittspunkte *A* von *a* und *b*, zieht ferner die Verbindungslinie des Punktes *T* mit dem Durchschnittspunkte *C* der Tangenten *c* und *d*, und verbindet endlich den Schnittpunkt *M* der Geraden *AD* und *CT* mit dem Punkte *B*, in welchem sich *b* und *c* schneiden. Die Gerade *BM* trifft dann die Tangente *a* in einem Punkte *G*, welcher der aus *D* an den Kegelschnitt gezogenen Tangente *e* angehört. Um diese Tangente zu erhalten hat man also nur die Punkte *D* und *G* durch eine Gerade zu verbinden.

Coincidiren zwei Paare von Eckpunkten eines Pascal'schen Sechseckes, so geht dieses in ein dem Kegelschnitte eingeschriebenes Viereck über. Als

Seiten, welche zwei coincidirende Punkte verbinden, müssen dann die Tangenten in diesen Punkten betrachtet werden. Nimmt man an, dass die coincidirenden Punkte an gegenüberliegenden Ecken des Viereckes vorhanden sind, so lässt sich demnach behaupten: Die Durchschnittspunkte E und F der Gegenseiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Viereckes $ABCD$ (Fig. 38) und die Durch-

(Fig. 38.)



schnittspunkte G und H der Tangenten, welche den Kegelschnitt in den gegenüberliegenden Ecken dieser Viereckes berühren, liegen in ein und derselben Geraden.

Da die Reihenfolge der Eckpunkte eines Pascal'schen Sechseckes beliebig gewählt werden kann, ohne dass hiedurch die Giltigkeit des Pascal'schen Satzes aufgehoben würde, so ist es auch gestattet, die Reihenfolge $ABDC$ der Eckpunkte des Viereckes vorauszusetzen. Dann sind die Tangenten in A und D, die Seiten AB und DC, sowie die Diagonalen AC und BD Gegenseiten des Sechseckes, woraus sich ergibt, dass auch die Durchschnittspunkte J, F und K dieser Gegenseiten in ein und derselben Geraden liegen müssen. Betrachtet man die Tangenten in B und C als Gegenseiten, so ergibt sich, dass auch der Durchschnittspunkt L derselben in der Geraden FK liegt.

Wird $ADBC$ als das eingeschriebene Viereck angesehen, so kann man aus dem Pascal'schen Satze ferner schliessen, dass der Durchschnittspunkt M der Tangenten in A und B und der Durchschnittspunkt N der Tangenten in C und D der Verbindungslinie der Punkte E und K angehören. — Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Tangenten in A, B, C und D ein dem Kegelschnitte umschriebenes Viereck bilden, können wir nun folgenden Satz aufstellen:

14. Ist ein Viereck $ABCD$ (Fig. 38) einem Kegelschnitte eingeschrieben und ein zweites $JMLN$, dessen Seiten den Kegelschnitt in den Eckpunkten des ersteren Viereckes berühren, umschrieben, so liegen die Durchschnittspunkte $EFGH$ der Gegenseiten beider Vierecke in ein und derselben Geraden, ferner schneiden sich die Diagonalen beider Vierecke

in demselben Punkte *K* und endlich geht jede Diagonale des umschriebenen Viereckes durch die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten des eingeschriebenen.

Eine bemerkenswerthe Specialität dieses Satzes ergibt sich, wenn man eines der beiden Vierecke in ein Parallelogramm übergehen lässt. Man findet dann folgendes:

Die Berührungspunkte der Seiten eines einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes bilden die Eckpunkte eines zweiten Parallelogrammes, dessen Mittelpunkt mit jenem des ersteren zusammenfällt und dessen Seiten den Diagonalen des ersteren parallel sind. (Siehe Fig. 34.)

Von besonderem Interesse ist der specielle Fall, wenn die Diagonalen des eingeschriebenen Viereckes durch die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten des umschriebenen Viereckes gehen. Nach Satz 37 bilden die Punkte *EFGH* auch in dem allgemeinen Falle eine harmonische Punktreihe; gehen nun die Diagonalen des eingeschriebenen Viereckes durch die Schnittpunkte *G* und *H* der Gegenseiten des umschriebenen, so ist demzufolge der Strahlenbüschel, welcher aus den vier durch *K* gehenden Diagonalen beider Vierecke besteht, ein harmonischer. Daraus ist zu ersehen, dass auf jeder der vier Tangenten, welche Seiten des umschriebenen Viereckes bilden, harmonische Punktreihen zu Stande kommen; der Berührungspunkt einer jeden solchen Tangente und die Schnittpunkte derselben mit den übrigen drei Tangenten sind die Elemente dieser Reihen. So z. B. würden die Punkte *MAJG* eine harmonische Reihe bilden, wenn die Diagonale *BD* durch *G* ginge. Denn es müsste dann die zweite Diagonale *AC* des eingeschriebenen Viereckes (nach Satz 37) durch den Punkt *H* gehen, weil er der vierte harmonische Punkt zu *E*, *F* und *G* ist; der aus den Geraden *KM*, *KA*, *KJ* und *KG* bestehende Strahlenbüschel wäre demnach harmonisch und ebenso die Punktreihe *MAJG*, welche als ein Schnitt dieses Büschels mit der Tangente in *A* betrachtet werden kann. In gleicher Weise lässt sich begründen, dass auch auf den Tangenten in *B*, *C* und *D* harmonische Punktreihen zu Stande kommen, deren Elemente der Berührungspunkt und die Schnittpunkte der betreffenden Tangente mit den drei übrigen sind. — Nach Satz 1, 2. Abschnitt werden je zwei Tangenten eines Kegelschnittes von den übrigen Tangenten in projectivischen Punktreihen geschnitten; daraus ergibt sich, dass wenn die Punktreihe, welche auf der einen dieser zwei Tangenten zu Stande kommt, harmonisch ist, auch die auf der zweiten entstehende Punktreihe harmonisch sein muss. Denken wir uns nun ausser den vier, das umschriebene Viereck bildenden Tangenten noch eine beliebige fünfte Tangente des Kegelschnittes gezogen, so folgt aus der eben gemachten Bemerkung, dass diese fünfte Tangente von den vier anderen ebenfalls in einer harmonischen Punktreihe geschnitten wird, wie leicht einzusehen ist, wenn man sich erinnert, dass der Berührungspunkt einer jeden Tangente als der Schnittpunkt zweier

coincidirender Tangenten aufgefasst werden kann. Die Seiten des umschriebenen Viereckes *JMLN* schneiden somit jede beliebige Tangente des Kegelschnittes in einer harmonischen Punktreihe, wenn die Diagonalen des eingeschriebenen Viereckes *ABCD* durch die Schnittpunkte *G* und *H* der Gegenseiten des ersteren Viereckes gehen.

Vier Tangenten eines Kegelschnittes, welche die Eigenschaft haben, dass sie jede beliebige fünfte Tangente in einer harmonischen Punktreihe schneiden, nennt man harmonische Tangenten und den Kegelschnitt in Bezug auf das von solchen vier Tangenten gebildete Viereck den eingeschriebenen harmonischen Kegelschnitt.

Die Berührungspunkte von vier harmonischen Tangenten zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, dass die vier Verbindungslinien derselben mit irgend einem Punkte des Kegelschnittes einen harmonischen Strahlenbüschel bilden. Nehmen wir an, dass in Fig. 38 die Diagonalen *BD* und *AC* beziehungsweise durch *G* und *H* gehen, so ist der Strahlenbüschel *AG*, *AD*, *AC*, *AB* ein harmonischer, da er als ein Schein der harmonischen Reihe *GEHF* betrachtet werden kann. Ein Gleiches lässt sich für die Büschel, deren Mittelpunkte *B*, *C* und *D* sind, nachweisen. Denken wir uns nun irgend einen fünften Punkt des Kegelschnittes mit *A*, *B*, *C* und *D* durch Gerade verbunden, so bilden diese Verbindungslinien nach Satz 4, 2. Abschnitt einen Strahlenbüschel, welcher den erwähnten harmonischen Büscheln projectivisch verwandt ist, er muss demnach ebenfalls harmonisch sein. Die Verbindungslinien der Eckpunkte des eingeschriebenen Viereckes *ABCD* mit irgend einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes bilden also einen harmonischen Strahlenbüschel, wenn die Diagonalen dieses Viereckes durch die Schnittpunkte *G* und *H* der Gegenseiten des umschriebenen Viereckes *JMLN* gehen.

Vier Punkte eines Kegelschnittes, welche eine solche Lage gegen einander haben, dass die Verbindungslinien derselben mit irgend einem fünften Punkte des Kegelschnittes einen harmonischen Strahlenbüschel bilden, nennt man in Bezug auf den Kegelschnitt harmonische Punkte und den Kegelschnitt in Bezug auf das durch vier harmonische Punkte bestimmte Viereck, den umschriebenen harmonischen Kegelschnitt.

Die Lösung folgender Aufgaben ist nun, auf Grundlage der vorausgehenden Erklärungen, leicht zu finden:

Es soll zu irgend drei gegebenen Tangenten *abc* eines Kegelschnittes die vierte harmonische bestimmt werden.

Es soll zu irgend drei gegebenen Punkten *ABC* eines Kegelschnittes der vierte harmonische bestimmt werden.

Eine Auflösung der Aufgabe links ist folgende:

Man verbindet den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten a und b mit dem Berührungspunkte von c und construirt im zweiten Durchschnittspunkte dieser Verbindungslinie mit dem Kegelschnitte eine Tangente an letzteren. Die so erhaltene Tangente ist dann eine vierte harmonische zu den drei gegebenen, nachdem das von den vier Tangenten gebildete umschriebene Viereck die Eigenschaft hat, dass die Diagonalen des Viereckes, welches durch die Berührungspunkte bestimmt wird, gegen die Schnittpunkte der Gegenseiten des ersteren convergiren.

Wird statt des Durchschnittspunktes von a und b jener der Tangenten a und c mit den Berührungspunkte der dritten gegebenen Tangente verbunden, so ergibt sich im zweiten Durchschnitte dieser Verbindungslinie mit dem Kegelschnitte der Berührungspunkt einer Tangente, welche ebenfalls die vierte harmonische zu ab und c ist. Eine dritte Auflösung resultirt, wenn man den Schnittpunkt von b und c mit dem Berührungspunkte von a verbindet. Es gibt demnach drei Auflösungen der obigen Aufgabe, also drei Tangenten des gegebenen Kegelschnittes, deren jede eine vierte harmonische zu den drei gegebenen ist.

Werden vier harmonische Tangenten $abcd$ von einer beliebigen fünften Tangente des Kegelschnittes beziehungsweise in den Punkten $ABCD$ geschnitten und sind A und C, sowie B und D einander zugeordnete Punkte, so nennt man a und c, sowie b und d einander **zugeordnete** oder **conjugirte harmonische Tangenten**.

Wie leicht einzusehen, werden bei obigen drei Auflösungen der in Rede stehenden Aufgabe einmal a und b, dann a und c, endlich b und c einander zugeordnet; man kann daher auch sagen, dass die eine oder die andere dieser Auflösungen sich ergibt, je nachdem man a und b, a und c, oder b und c als einander zugeordnete Tangenten betrachtet.

Die Aufgabe rechts wird gelöst, indem man in zweien von den gegebenen drei Punkten die Tangenten zieht und den Durchschnitt der letzteren mit dem dritten gegebenen Punkte verbindet; der zweite Schnittpunkt der so erhaltenen Verbindungslinie mit dem Kegelschnitte ist dann der gesuchte vierte harmonische Punkt. Auch hier sind drei Auflösungen möglich, da je nachdem man die Tangenten in A und B, in A und C, oder in B und C zieht, verschiedene vierte harmonische Punkte sich ergeben. Man nennt im ersteren Falle A und B, im zweiten A und C, im dritten B und C einander zugeordnete oder conjugirte harmonische Punkte des Kegelschnittes.

Ohne weitere Begründung dürften nun auch die folgenden zwei Sätze leicht einzusehen sein:

Der Durchschnittspunkt von je zwei einander zugeordneten harmonischen Tangenten eines Kegelschnittes

Die Verbindungslinie von je zwei einander zugeordneten harmonischen Punkten eines Kegelschnittes und die

und die Berührungspunkte der zwei übrigen harmonischen Tangenten liegen in ein und derselben Geraden.

in den zwei übrigen harmonischen Punkten gezogenen Tangenten schneiden sich in ein und demselben Punkte.

Ist ein Viereck gegeben, dessen Seiten wir *abcd* nennen wollen, und es wäre ein demselben eingeschriebener harmonischer Kegelschnitt zu construiren, so bestimmen wir zunächst die Berührungspunkte *ABCD* der Seiten dieses Viereckes, indem wir den Durchschnitt seiner Diagonalen mit den zwei Schnittpunkten der Gegenseiten verbinden. Diese Verbindungslinien schneiden *abcd* in den Berührungspunkten *ABCD*. Man hat nun vier Tangenten des zu construirenden Kegelschnittes mit ihren Berührungspunkten und kann auf die bereits erklärte Weise beliebig viele andere Punkte und Tangenten desselben ermitteln. — Nachdem es gestattet ist *a* und *b*, *a* und *c*, oder auch *b* und *c* als Gegenseiten zu betrachten, so kann man durch die angegebene Construction drei, aber auch nicht mehr, von einander verschiedene harmonische Kegelschnitte, welche demselben Viereck eingeschrieben sind, erhalten.

Wenn einem gegebenen Vierecke *ABCD* ein harmonischer Kegelschnitt umschrieben werden soll, so verbindet man die zwei Durchschnittspunkte der Gegenseiten durch eine Gerade, bestimmt die zwei Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den beiden Diagonalen und verbindet letztere Punkte mit den Ecken des gegebenen Viereckes. Die so erhaltenen Verbindungslinien, selbstverständlich jene, welche nicht Diagonalen sind, bilden ein dem zu construirenden Kegelschnitte umschriebenes Viereck, dessen Seiten den Kegelschnitt in *ABCD* berühren. Der letztere erscheint somit durch vier Tangenten und die Berührungspunkte derselben bestimmt. — Da man entweder *A* und *B* oder *A* und *C*, oder auch *B* und *C* als gegenüberliegende Ecken des gegebenen Viereckes betrachten kann, und jede dieser Annahmen einem andern Kegelschnitte entspricht, so hat die in Rede stehende Aufgabe ebenfalls drei Auflösungen. Die zwei zuletzt betrachteten Aufgaben kann man demnach in folgender Form geben:

Es sollen die drei einem gegebenen Vierecke eingeschriebenen harmonischen Kegelschnitte construirt werden.

Es sollen die drei einem gegebenen Vierecke umschriebenen harmonischen Kegelschnitte construirt werden.

Wir haben, um zu den Sätzen und Aufgaben über die einem Kegelschnitte umschriebenen und eingeschriebenen Vierecke zu gelangen, den Pascal'schen Satz als Ausgangspunkt gewählt. Dieselben Resultate würden sich auch ergeben haben, wenn wir vom Brianchon'schen Satze ausgegangen wären. Es erscheint daher überflüssig, den speciellen Fall zu betrachten, in welchem bei einem Sechsecke, das einem Kegelschnitte umschrieben ist, zwei Paare von Seiten coincidiren.

Nimmt man an, dass bei einem Pascal'schen Sechsecke drei Paare von Eckpunkten zusammenfallen, so geht letzteres in ein dem Kegelschnitte eingeschriebenes Dreieck über. Die Seiten des Sechseckes werden dann von den Seiten des eingeschriebenen Dreieckes und den in den Eckpunkten dieses Dreieckes gezogenen Tangenten gebildet. Mit Rücksicht auf den Pascal'schen Satz kann man demnach behaupten:

15. Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben, so liegen die drei Durchschnittspunkte seiner Seiten mit den in den gegenüberliegenden Ecken gezogenen Tangenten auf ein und derselben Geraden.

Coincidiren drei Paare von Seiten eines Sechseckes, das einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so geht dieses Sechseck in ein dem Kegelschnitte umschriebenes Dreieck über. — Wir haben diesen Fall bereits betrachtet (siehe Fig. 32) und von dem hierauf bezüglichen Satze Gebrauch gemacht, welcher lautet:

16. Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte umschrieben, so schneiden sich die Verbindungslinien seiner Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten in ein und demselben Punkte.

Wie man mit Benützung der letzteren zwei Sätze die folgenden Aufgaben löst, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung:

Zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und ein dritter Punkt eines Kegelschnittes sind gegeben es soll die Tangente in dem gegebenen dritten Punkte bestimmt werden.

Zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und eine dritte Tangente eines Kegelschnittes sind gegeben, es soll der Berührungspunkt der gegebenen dritten Tangente bestimmt werden.

Es wurden oben die Aufgaben gelöst: Wenn fünf Punkte oder Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, beliebig viele andere Punkte beziehungsweise Tangenten desselben zu construiren. Nimmt man an, dass bei der ersteren dieser Aufgaben zwei Paare der gegebenen Punkte, bei der letzteren zwei Paare der gegebenen Tangenten coincidiren, so kann man die in Rede stehenden Aufgaben wie folgt, ausdrücken:

Zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und ein dritter Punkt eines Kegelschnittes sind gegeben, es sollen beliebig viele andere Punkte des letzteren bestimmt werden.

Zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und eine dritte Tangente eines Kegelschnittes sind gegeben, es sollen beliebig viele andere Tangenten des letzteren bestimmt werden.

Die Lösung dieser Aufgaben kann ganz in derselben Weise geschehen, wie wir die allgemeinen Aufgaben gelöst haben, deren specielle Fälle sie sind.

Es dürfte daher nicht nöthig sein, die betreffenden Constructionen besonders zu erklären.

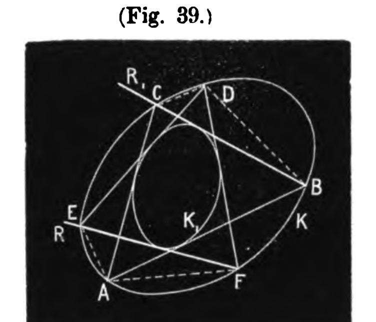
Die Sätze und Aufgaben, welche in diesem Kapitel bisher betrachtet wurden, fanden alle ihre Begründung, beziehungsweise Lösung, in dem Pascal'schen und Brianchon'schen Satze. Wir gehen nun zu anderen Sätzen und Aufgaben über, bei welchen die Entstehung der Kegelschnitte durch projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel vorzugsweise in Betracht kommt.

17. Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben, so sind sie zugleich einem andern Kegelschnitte umschrieben.

Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte umschrieben, so sind sie zugleich einem anderen Kegelschnitte eingeschrieben.

In Fig. 39 seien ABC und DEF zwei beliebige einem Kegelschnitte eingeschriebene Dreiecke. Die Verbindungslinien des Punktes A mit ECB und F bilden einen Strahlenbüschel S, welcher dem Büschel S_1 projectivisch verwandt ist, der von den Verbindungslinien des Punktes D mit ECB und F gebildet wird. Die Punktreihe R, welche als Schnitt von S mit der Dreieckseite EF zu Stande kommt und jene Reihe R_1, in der die Seite BC den Büschel S_1 schneidet, sind demnach ebenfalls projectivisch. Da nun die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte dieser zwei Reihen zugleich Dreieckseiten sind, so müssen letztere Tangenten eines und desselben Kegelschnittes sein.

(Fig. 39.)



Der Beweis für den Satz rechts kann wie folgt geführt werden:

Die vier Tangenten AB, AC, DE DF schneiden nach Satz 1 die Tangenten EF und BC in zwei projectivischen Punktreihen R und R_1, somit sind die zwei Strahlenbüschel, welche entstehen, wenn man die Punkte von R mit A und jene von R_1 mit D verbindet, ebenfalls projectivisch, woraus folgt, dass die Punkte A und D, sowie die vier Durchschnitte $BCEF$ von je zwei sich entsprechenden Strahlen, nämlich die Eckpunkte der umschriebenen Dreiecke, in einem Kegelschnitte liegen müssen.

Mit Hilfe des einen oder des anderen dieser Sätze lässt sich nun der folgende leicht nachweisen:

18. Haben zwei Kegelschnitte eine solche Lage, dass dem einen ein Dreieck umschrieben werden kann, welches zugleich dem anderen eingeschrieben ist, so gibt es unendlich viele Dreiecke, welche dieselbe Bedingung erfüllen. Jeder Punkt des umschriebenen Kegelschnittes,

welcher ausserhalb des eingeschriebenen liegt, kann nämlich Eckpunkt eines solchen Dreieckes sein.

Ist ABC (Fig. 39) ein die angegebene Bedingung erfüllendes Dreieck und man zieht aus irgend einem Punkte D des umschriebenen Kegelschnittes K zwei Tangenten DE und DF an den eingeschriebenen K_1, so bilden der Punkt D und die Durchschnittspunkte E und F der zwei Tangenten mit K die Eckpunkte eines zweiten Dreieckes, welchem nach Satz 17 ein Kegelschnitt eingeschrieben werden kann, der auch dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist. Dieser Kegelschnitt kann kein anderer sein als K_1, nachdem derselbe durch fünf Tangenten von K_1, nämlich die Seiten des Dreieckes ABC und die Geraden DE und DF vollkommen bestimmt erscheint. — Dass jene Punkte von K, welche innerhalb K_1 liegen, keine Eckpunkte eines Dreieckes bilden können, dessen Seiten K_1 berühren, ist selbstverständlich.

Zwei wichtige Sätze, welche ihre Begründung ebenfalls in den Eigenschaften projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel finden, sind folgende:

19. Wenn ein Viereck einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so steht das Product der Entfernungen irgend eines Punktes der Curve von zwei gegenüberliegenden Seiten des Viereckes zum Producte der Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern Seiten in einem constanten Verhältnisse.*)

Wenn ein Viereck einem Kegelschnitte umschrieben ist, so steht das Product der Entfernungen irgend einer Tangente der Curve von zwei gegenüberliegenden Ecken des Viereckes zum Producte der Entfernungen derselben Tangente von den beiden andern Ecken in einem constanten Verhältnisse.

Der Satz links lässt sich wie folgt nachweisen: Die Ecken des eingeschriebenen Viereckes seien $ABCD$ und P heisse irgend ein Punkt des Kegelschnittes. Verbindet man den Punkt A mit B, C, D und P durch gerade Linien, so entsteht ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte A, welcher jenem Büschel projectivisch verwandt ist, dessen Mittelpunkt sich in C befindet und der von der Tangente in C und den Geraden CB, CD, CP gebildet wird. Für diese beiden Strahlenbüschel besteht, wenn man die Tangente in C durch CT bezeichnet, die Gleichung:

$$\frac{\sin BAP}{\sin DAP} : \frac{\sin BAC}{\sin DAC} = \frac{\sin BCP}{\sin DCP} : \frac{\sin BCT}{\sin DCT},$$

aus welcher sich ergibt:

$$\frac{\sin BAP \,.\, \sin DCP}{\sin DAP \,.\, \sin BCP} = \frac{\sin DAC \,.\, \sin DCT}{\sin BAC \,.\, \sin BCT}.$$

*) Dieser Satz wurde zuerst von Pappus (gegen Ende des 4. Jahrhundert n. Chr.) aufgestellt und wird desshalb der Satz des Pappus genannt.

Da nun $\frac{\sin BAP}{\sin DAP}$ gleich dem Verhältnisse der Perpendikel ist, welche man von P auf die Seiten AB und AD fällen kann, und $\frac{\sin DCP}{\sin BCP}$ gleich dem Verhältnisse der von P auf die Seiten CD und BC gefällten Perpendikel, so gibt der Theil links vom Gleichheitszeichen an, in welchem Verhältnisse das Product der Entfernungen des Punktes P von AB und DC zu dem Producte der Entfernungen desselben Punktes von den Seiten AD und BC steht. Nachdem ferner der Werth des Theiles rechts vom Gleichheitszeichen eine von der Lage des Punktes P unabhängige constante Grösse hat, so erscheint obiger Satz gerechtfertigt.

Um den Satz rechts zu begründen, nehmen wir ein einem Kegelschnitte umschriebenes Viereck $ABCD$ und irgend eine Tangente t des ersteren an. Der Schnittpunkt der gegenüberliegenden Seiten AB und CD heisse E, der Berührungspunkt von CD sei F und die Schnittpunkte von AB und CD mit der Tangente t nennen wir beziehungsweise P und Q.

Auf den Seiten AB und CD kommen durch den Schnitt derselben mit den Tangenten BC, CD und t zwei projectivische Punktreihen zu Stande, nämlich die Reihen $ABPE$ und $DCQF$. Es gilt somit die Gleichung:

$$\frac{AP}{BP} : \frac{AE}{BE} = \frac{DQ}{CQ} : \frac{DF}{CF},$$

aus welcher folgt:

$$\frac{AP \,.\, CQ}{BP \,.\, DQ} = \frac{BE \,.\, CF}{AE \,.\, DF}.$$

Da $\frac{AP}{BP}$ gleich dem Verhältnisse der Entfernungen der Punkte A und B von der Tangente t ist und $\frac{CQ}{DQ}$ das Verhältniss der Entfernungen der Punkte C und D von derselben Tangente t angibt, so kann aus letzterer Gleichung obiger Satz (rechts) gefolgert werden, nachdem der Theil rechts vom Gleichheitszeichen einen von der Lage der Tangente t unabhängigen Werth hat.

Aus den Sätzen 19 ergeben sich einige andere — deren Aufstellung uns wohl zu weit führen würde — wenn man ein oder zwei Paare von Ecken des eingeschriebenen, beziehungsweise von Seiten des umschriebenen Viereckes coincidiren lässt.

20. Wenn ein Viereck einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so bilden die Durchschnittspunkte irgend einer in der Ebene des Kegelschnittes gelegenen Geraden mit den Seiten des

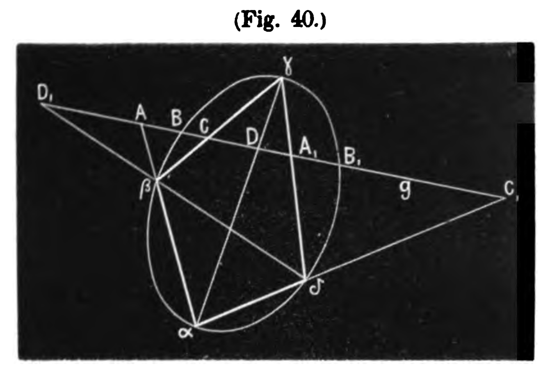
Wenn ein Viereck einem Kegelschnitte umschrieben ist, so bilden die Verbindungslinien irgend eines in der Ebene des Kegelschnittes gelegenen Punktes mit den Ecken des Viereckes und

Viereckes und die Durchschnittspunkte derselben Geraden mit dem Kegelschnitte eine involutorische Punktreihe. Entsprechende Punkte der letzteren sind die zwei Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte, sowie je zwei Punkte, welche sich in gegenüberliegenden Seiten befinden.*)

die Tangenten, welche von demselben Punkte an den Kegelschnitt gezogen werden können, einen involutorischen Strahlenbüschel. Entsprechende Strahlen des letzteren sind die zwei Tangenten, sowie je zwei Gerade, welche gegenüberliegende Ecken verbinden.

Das eingeschriebene Viereck sei $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 40) und die schneidende Gerade heisse g. Die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte nennen wir B, B_1, jene mit den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ und $\alpha\delta$ beziehungsweise A, C, A_1 und C_1.

(Fig. 40.)



Wie leicht einzusehen sind die Punktreihen ABC_1B_1 und CBA_1B_1 projectivisch, nachdem sie Schnitte der Geraden g mit den zwei projectivischen Strahlenbüscheln sind, welche durch die Verbindungslinien der Punkte α und γ mit den Curvenpunkten $\beta B\delta B_1$ gebildet werden; man hat also:

$$(ABC_1B_1) = (CBA_1B_1).$$

Betrachtet man die Punkte β und δ als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, deren Strahlen durch die Curvenpunkte $\alpha B\gamma B_1$ gehen, so kann man sich leicht überzeugen, dass die Gleichung besteht:

$$(ABCB_1) = (C_1BA_1B_1).$$

Es ist somit:

$$\frac{AC_1}{BC_1} : \frac{AB_1}{BB_1} = \frac{CA_1}{BA_1} : \frac{CB_1}{BB_1}$$

und

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AB_1}{BB_1} = \frac{C_1A_1}{BA_1} : \frac{C_1B_1}{BB_1}.$$

*) Desargues stellte dieses Theorem zuerst auf, dasselbe wird daher der Satz des Desargues genannt.

Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so ergibt sich:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{C_1A_1}{CA_1} : \frac{C_1B_1}{CB_1}.$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1C}{B_1C}$$

Aus der symbolischen Form

$$(ABCC_1) = (A_1B_1C_1C)$$

der zuletzt aufgestellten Gleichung ist leicht zu erkennen, dass die sechs Punkte $ABC\ A_1B_1C_1$ in der That eine Involution bilden. Die Punktreihe $ABCC_1$ ist nämlich, wie aus dieser Gleichung und dem Satze 3, 1. Abschnitt, folgt, der Reihe $A_1B_1C_1C$ projectivisch verwandt und beide Reihen haben eine solche Lage, dass der Punkt C dem Punkte C_1 entspricht, ob man C als Punkt der einen oder der andern Reihe betrachtet, woraus sich nach Satz 51, 1. Abschnitt, ergibt, dass die zwei Reihen involutorisch liegen. Entsprechende Punkte dieser Involution sind A und A_1, B und B_1, sowie C und C_1. Obiger Satz links erscheint somit gerechtfertigt.

Selbstverständlich gilt derselbe auch für die Vierecke $\alpha\gamma\beta\delta$ und $\alpha\gamma\delta\beta$, deren Seiten aus den Diagonalen und zwei gegenüberliegenden Seiten des zuerst betrachteten Viereckes gebildet werden. In dem Vierecke $\alpha\gamma\delta\beta$ sind $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ und $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ zwei Paare gegenüberliegender Seiten. Heissen D und D_1 die Schnittpunkte der zuletzt genannten Seiten mit g, so bilden AA_1, BB_1 und DD_1 obigem Satze zufolge drei Paare entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe, diese Reihe ist, wie aus Satz 58, 1. Abschnitt, geschlossen werden kann, mit der durch die Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1 bestimmten involutorischen Reihe identisch, es bilden also auch die Schnittpunkte der Diagonalen des eingeschriebenen Viereckes $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Paar sich entsprechender Punkte der in obigem Satze (links) erwähnten involutorischen Reihe.

Mit Hilfe des Satzes 20 (links) ist man auch im Stande beliebig viele Punkte eines Kegelschnittes zu bestimmen, wenn fünf Punkte desselben gegeben sind. Man zeichnet ein Viereck, dessen Ecken vier der gegebenen Punkte bilden und zieht aus dem fünften Punkte eine beliebige Gerade; der zweite Durchschnitt dieser Geraden mit dem Kegelschnitte erscheint nach Satz 58, 1. Abschnitt, durch die übrigen Punkte der involutorischen Reihe bestimmt, welche obigem Satze zufolge auf der in Rede stehenden Geraden liegen, und kann durch eine einfache Construction ermittelt werden.

Trifft g den Kegelschnitt nicht, so werden zwei sich entsprechende Punkte der Involution, nämlich die Schnittpunkte von g mit der Curve, imaginär.

Berührt die Gerade g den Kegelschnitt so coincidiren die Schnittpunkte B und B_1 und bilden einen Doppelpunkt der Involution. Daraus ergibt sich eine Lösung der folgenden Aufgabe:

Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn vier Punkte desselben und eine Tangente, welche durch keinen dieser Punkte geht, gegeben sind.

Der Berührungspunkt der gegebenen Tangente ist nämlich einer der zwei Doppelpunkte jener involutorischen Punktreihe, in welcher die Tangente von den Seiten des Viereckes geschnitten wird, dessen Eckpunkte die gegebenen vier Punkte bilden. Da eine involutorische Reihe durch zwei Paare sich entsprechender Punkte vollkommen bestimmt wird, so lassen sich die beiden Doppelpunkte aus den Angaben unzweideutig ermitteln. Der Umstand, dass in einstimmig verlaufenden involutorischen Reihen keine Doppelpunkte vorhanden sind, in entgegengesetzt verlaufenden aber stets zwei Doppelpunkte vorkommen beweist, dass obige Bedingungen entweder von keinem oder von zwei verschiedenen Kegelschnitten erfüllt werden. Denn verläuft die auf der gegebenen Tangente entstehende Reihe einstimmig, so hat erstere keinen reellen Berührungspunkt, es gibt also umgekehrt keinen reellen Kegelschnitt, welcher der Aufgabe entsprechen würde, verläuft jedoch die erwähnte Reihe entgegengesetzt, so ergeben sich immer zwei reelle Berührungspunkte, woraus zu schliessen ist, dass dann zwei verschiedene Kegelschnitte die gestellten Anforderungen erfüllen.

Nachdem der Beweis für den obigen Satz rechts in analoger Weise gegeben werden kann, wie jener für den Satz links, so unterlassen wir es, denselben durchzuführen. Wir bemerken nur, dass auch die Verbindungslinien des beliebig gewählten Punktes mit den zwei Schnittpunkten der gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Viereckes ein Paar sich entsprechender Strahlen des in diesem Satze erwähnten involutorischen Büschels sind. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man berücksichtigt, dass der in Rede stehende Satz nicht nur für ein umschriebenes Viereck gilt, dessen Seiten *abcd* sind (und so aufeinander folgen, wie sie genannt wurden), sondern auch für das Viereck *acdb*.

Liegt der Punkt, von welchem aus gegen die Ecken des umschriebenen Viereckes Gerade gezogen sind, innerhalb des Kegelschnittes, so werden zwei Strahlen des involutorischen Büschels, der sich dem Satze rechts zufolge ergibt, imaginär. Es sind dies jene Strahlen, welche den Kegelschnitt tangiren. Ist der Mittelpunkt des involutorischen Büschels ein Punkt des Kegelschnittes, so coincidiren die zwei Strahlen, welche Tangenten des Kegelschnittes sind und bilden einen Doppelstrahl der Involution. Dieses Ergebniss führt uns zur Lösung folgender Aufgabe:

Ein Kegelschnitt soll construirt werden, wenn vier Tangenten und ein Punkt desselben, welcher in keiner dieser Tangenten liegt, gegeben sind.

Die Tangente in dem gegebenen Punkte ist einer der zwei Doppelstrahlen jenes involutorischen Büschels, dessen Strahlen die Verbindungslinien des gegebenen Punktes mit den Ecken des von den gegebenen Tangenten gebildeten Viereckes sind. Nach Satz 58, 1. Abschnitt, werden die zwei Doppelstrahlen durch die übrigen bekannten Strahlen des in Rede stehenden Büschels vollkommen bestimmt. Aus dem Umstande jedoch, dass wenn der involutorische Büschel einstimmig verläuft, keine reellen Doppelstrahlen vorhanden sind und im Falle er entgegengesetzt verläuft, stets zwei reelle Doppelstrahlen vorkommen, folgt, dass die Bedingungen obiger Aufgabe entweder von keinem Kegelschnitte oder von zwei verschiedenen Kegelschnitten erfüllt werden.

Coincidiren zwei Eckpunkte des dem Kegelschnitte eingeschriebenen Viereckes, und zwei Seiten des umschriebenen, so kann man obige Sätze in folgender Weise ausdrücken:

21. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so bilden die Durchschnittspunkte irgend einer in der Ebene des Kegelschnittes gelegenen Geraden mit den Seiten des Dreieckes, mit der in einem beliebigen Eckpunkte gezogenen Tangente und mit dem Kegelschnitte eine involutorische Punktreihe. Entsprechende Punkte der letzteren sind die zwei Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte, die Durchschnitte der zwei Dreieckseiten, welche sich im Berührungspunkte der erwähnten Tangente treffen, und die zwei übrigen Schnittpunkte.

Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitte umschrieben ist, so bilden die Verbindungslinien irgend eines Punktes der Ebene des Kegelschnittes mit den Ecken des Dreieckes und mit dem Berührungspunkte einer beliebigen Dreieckseite, ferner die aus demselben Punkte gezogenen Tangenten einen involutorischen Strahlenbüschel. Entsprechende Strahlen des letzteren sind die zwei Tangenten, die Verbindungslinien mit den Endpunkten jener Seite, in welcher der erwähnte Berührungspunkt liegt, und die zwei übrigen Verbindungslinien.

Nimmt man an, dass in dem eingeschriebenen Vierecke (Satz 20) zwei Paare von Ecken, in dem umschriebenen zwei Paare von Seiten coincidiren, so ergeben sich folgende Sätze:

22. Wenn ein Winkel einem Kegelschnitte umschrieben ist, so bilden die Durchschnittspunkte irgend einer

Wenn ein Winkel einem Kegelschnitte umschrieben ist, so bilden die Verbindungslinien irgend eines Punktes

in der Ebene des Kegelschnittes gelegenen Geraden mit den Schenkeln des Winkels, mit der Verbindungslinie der Berührungspunkte der Schenkel und mit dem Kegelschnitte eine involutorische Punktreihe. Entsprechende Punkte der letzteren sind die Schnittpunkte mit der Curve und die in den Schenkeln gelegenen, während der Durchschnitt mit der erwähnten Verbindungslinie einen Doppelpunkt bildet.

der Ebene des Kegelschnittes mit den Berührungspunkten der Schenkel und mit dem Scheitel des Winkels, ferner die aus demselben Punkte gezogenen Tangenten einen involutorischen Strahlenbüschel. Entsprechende Strahlen des letzteren sind die zwei Tangenten und jene Strahlen, welche durch die Berührungspunkte der Schenkel gehen, während die durch den Scheitel gehende Verbindungslinie einen Doppelstrahl bildet.

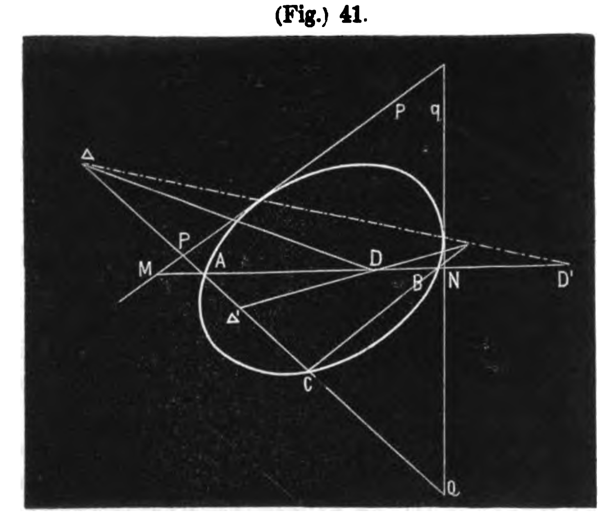
Aus diesen Sätzen lassen sich die Auflösungen nachstehender Aufgaben leicht folgern:

Ein Kegelschnitt soll construirt werden, wenn zwei Tangenten und drei Punkte desselben, welche ausserhalb den zwei Tangenten liegen, bekannt sind.

Ein Kegelschnitt soll construirt werden, wenn zwei Punkte und drei Tangenten desselben, welche durch keinen der drei Punkte gehen, bekannt sind.

Heissen p, q (Fig. 41) die Tangenten und A, B, C die gegebenen drei Punkte, so verbindet man, um die Aufgabe links zu lösen, A mit B, welche Verbindungslinie p, q in zwei Punkten M und N schneidet, und ermittelt die Doppelpunkte D und D' der durch die vier Punkte A, B, M, N bestimmten involutorischen Reihe. D, ebenso wie D' gehört, dann, dem obigen Satze zufolge, einer Geraden an, welche die Berührungspunkte der Tangenten p und q verbindet. Um einen zweiten Punkt einer solchen Geraden zu erhalten verbindet man A mit C, welche Verbindungslinie p, q in den Punkten P und Q

(Fig.) 41.



trifft, und ermittelt die Doppelpunkte Δ und Δ' der involutorischen Reihe $ACPQ$. Der Punkt Δ gehört nun ebenfalls, sowie auch Δ' einer Geraden an, welche die Berührungspunkte von p und q verbindet; jede von den vier Geraden $D\Delta$, $D\Delta'$, $D'\Delta$, $D'\Delta'$ muss demnach durch die Berührungspunkte von p und q mit einem Kegelschnitte gehen, welcher die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. — Man könnte meinen, dass es ausser den genannten vier Geraden noch andere geben müsse, welche die Berührungspunkte von p und q verbinden, nachdem man auch in der auf BC zu Stande kommenden involutorischen Reihe Doppelpunkte erhält. Indess zeigt eine einfache Betrachtung, dass jeder dieser Doppelpunkte einer der vier Geraden angehört. Man braucht sich nur zu erinnern, dass durch die Doppelpunkte einer jeden involutorischen Reihe je zwei sich entsprechende Punkte harmonisch getrennt werden (Satz 56, 1. Abschnitt), dass ferner zwei harmonische Reihen stets projectivisch verwandt sind und dass endlich je zwei von den sich auf AB, AC und BC ergebenden harmonischen Reihen perspectivisch liegen. — Wir deuten diese Beziehungen nur an, da uns die vollständige Durchführung des betreffenden Beweises, welcher übrigens keine Schwierigkeiten bietet, wohl zu weit führen würde.

Um die obige Aufgabe rechts zu lösen, verbindet man den Durchschnittspunkt S zweier von den drei gegebenen Tangenten a, b, c, etwa a und b mit den gegebenen zwei Punkten P und Q, und ermittelt die Doppelstrahlen d, d' des durch a, b, SP, SQ bestimmten involutorischen Büschels. Jeder dieser Doppelstrahlen geht nach obigem Satze durch einen Punkt, in welchem sich die in P und Q berührenden Tangenten treffen. Wählt man statt a und b zwei andere Tangenten, etwa a und c, verbindet ihren Durchschnittspunkt S' mit P und Q, und ermittelt die Doppelstrahlen $\delta\delta'$ des durch a, c, $S'P$, $S'Q$ gebildeten involutorischen Strahlenbüschels, so hat man vier Gerade d, d', δ, δ', welche in ihren Durchschnitten vier Punkte bestimmen, deren jeder als Schnittpunkt der in P und Q berührenden Tangenten betrachtet werden kann. Sind diese Tangenten ermittelt, so ist die in Rede stehende Aufgabe auf eine bereits früher gelöste zurückgeführt.

Liegen zwei Punkte bei der obigen Aufgabe (links) derart, dass sie von jenen Punkten, in welchen ihre Verbindungslinie die zwei gegebenen Tangenten schneidet, getrennt werden, so erhält man keine reellen Doppelpunkte. Es verlaufen nämlich dann zwei der in Betracht kommenden involutorischen Reihen einstimmig, da in ihnen ein Paar sich entsprechender Punkte durch ein zweites solches Paar getrennt wird, folglich gibt es in diesem Falle keine reellen Doppelpunkte, also auch keinen reellen Kegelschnitt, der die Aufgabe erfüllen würde. Letzteres ist auch bei der Aufgabe links der Fall, wenn die gegebenen Punkte und Tangenten eine solche Lage haben, dass zwei der erwähnten involutorischen Strahlenbüschel einstimmig verlaufen.

Aus den Auflösungen obiger Aufgaben können wir schliessen, **dass den Bedingungen derselben entweder kein Kegelschnitt, oder vier verschiedene Kegelschnitte entsprechen.**

Nimmt man an, dass bei den in Rede stehenden Aufgaben einer der gegebenen Punkte in einer von den gegebenen Tangenten gelegen ist, also zum Berührungspunkte dieser Tangente wird, so hat man folgende Aufgaben:

Ein Kegelschnitt soll construirt werden, wenn zwei seiner Tangenten, der Berührungspunkt von einer derselben und zwei Curvenpunkte, welche ausserhalb den gegebenen Tangenten liegen, bekannt sind.

Ein Kegelschnitt soll construirt werden, wenn zwei seiner Punkte, die Tangente in einem derselben und zwei Tangenten, wovon keine durch einen der gegebenen Punkte geht, bekannt sind.

Man verbindet, um die Aufgabe links zu lösen, die zwei ausserhalb den gegebenen Tangenten p und q befindlichen Punkte A und B, ermittelt in der involutorischen Reihe, welche auf der Geraden AB zu Stande kommt, die Doppelpunkte DD' und verbindet letztere mit dem gegebenen Berührungspunkte C. Der Durchschnitt von CD sowohl, als auch jener von CD' mit der Tangente, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist, muss ein Berührungspunkt eben dieser Tangente sein.

Die Aufgabe rechts wird gelöst, indem man den Durchschnittspunkt S der beiden Tangenten p und q, deren Berührungspunkte nicht bekannt sind, mit den beiden gegebenen Curvenpunkten A, B verbindet und die Doppelstrahlen d, d' des involutorischen Büschels p, q, SA, SB sucht. Sowohl d, als auch d' schneiden dann die dritte gegebene Tangente r in einem Punkte, welcher der in B berührenden Tangente angehört, vorausgesetzt, dass A der Berührungspunkt von r ist. Die Tangente in B erscheint somit bestimmt, da durch die angeführte Construction ein zweiter Punkt derselben gefunden wird.

Aus den Lösungen der beiden zuletzt behandelten Aufgaben kann man schliessen, dass den Bedingungen dieser Aufgabe entweder kein Kegelschnitt oder zwei verschiedene Kegelschnitte entsprechen. Ersteres ist dann der Fall, wenn die involutorische Reihe, beziehungsweise der involutorische Strahlenbüschel, deren Doppelelemente zu ermitteln sind, einstimmig verlaufen, was man aus der Lage der gegebenen Bestimmungsstücke sofort zu erkennen im Stande ist.

Wir kehren nun wieder zu den Sätzen 20 zurück. Es ergeben sich aus denselben unmittelbar die folgenden:

23. Sind zwei Vierecke einem Kegelschnitte eingeschrieben und schneiden drei Seiten des einen drei Seiten des anderen in drei Punkten, welche in ein und derselben Geraden liegen, so befindet

Sind zwei Vierecke einem Kegelschnitte umschrieben und gehen die Verbindungslinien von drei Ecken des einen mit drei Ecken des andern durch ein und denselben Punkt, so geht auch die

sich auch der Durchschnitt der übrigen zwei Seiten auf dieser Geraden.

Verbindungslinie der übrigen zwei Ecken durch diesen Punkt.

Der Durchschnittspunkt der vierten Seite des einen Viereckes mit der erwähnten Geraden (Satz links) erscheint nämlich als Element einer involutorischen Reihe, von welcher fünf Punkte gegeben sind, nach Satz 58, 1. Abschnitt, vollkommen bestimmt. Dasselbe gilt auch bezüglich des Durchschnittspunktes der vierten Seite des zweiten Viereckes. Die fünf Punkte sind, aber dieselben für jede der beiden involutorischen Reihen, welche durch die zwei Vierecke zu Stande kommen, daher müssen auch die beiden in Frage stehenden Durchschnittspunkte coincidiren. — Der Satz rechts kann in ganz analoger Weise begründet werden.

Aus diesen Sätzen folgen die nachstehenden:

24. Wird ein Viereck, das einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, derart verändert, dass es dem Kegelschnitte eingeschrieben bleibt und drei seiner Seiten sich um drei ihrer Punkte drehen, welche derselben Geraden angehören, so dreht sich die vierte Seite ebenfalls um einen Punkt dieser Geraden.

Wird ein Viereck, das einem Kegelschnitte umschrieben ist, derart verändert, dass es dem Kegelschnitte umschrieben bleibt und drei seiner Ecken sich in drei Geraden bewegen, welche gegen denselben Punkt convergiren, so bewegt sich die vierte Ecke ebenfalls in einer durch diesen Punkt gehenden Geraden.

Coincidiren in dem eingeschriebenen Vierecke (Satz links) zwei auf einander folgende Eckpunkte, so geht die durch letztere bestimmte Seite in eine Tangente und das Viereck in ein Dreieck über, dessen Seiten dieselben Punkte enthalten, um welche sich drei Seiten des Viereckes drehen. Fallen zwei aufeinander folgende Seiten des umschriebenen Viereckes (Satz rechts) zusammen, so wird der Durchschnittspunkt dieser Seiten ein Berührungspunkt und das Viereck verwandelt sich in ein Dreieck, dessen Ecken in denselben Geraden liegen, welche die Ecken des Viereckes enthalten. — Diese Bemerkungen führen zu einer einfachen Lösung folgender Aufgaben:

Einem Kegelschnitte soll ein Dreieck eingeschrieben werden, dessen Seiten durch drei bestimmte Punkte einer Geraden gehen.

Einem Kegelschnitte soll ein Dreieck umschrieben werden, dessen Ecken in drei bestimmten, durch denselben Punkt gehenden Geraden liegen.

Man construirt irgend ein dem Kegelschnitte eingeschriebenes Viereck, von welchem drei Seiten durch die drei gegebenen Punkte gehen und zieht aus dem

Durchschnitte der vierten Seite mit der durch die drei Punkte bestimmten Geraden eine Tangente an den Kegelschnitt. Der Berührungspunkt dieser Tangente ist ein Eckpunkt des verlangten eingeschriebenen Dreieckes. — Das umschriebene Dreieck (Aufgabe rechts) wird durch folgende Construction erhalten: Man zeichnet irgend ein dem Kegelschnitte umschriebenes Viereck, von welchem drei Ecken in den gegebenen drei Geraden liegen, und verbindet die vierte Ecke mit dem Durchschnitte der drei Geraden. Diese Verbindungslinie trifft den Kegelschnitt in zwei Punkten, welche so gelegen sind, dass die in ihnen gezogenen Tangenten Seiten zweier Dreiecke werden, deren jedes die verlangte Bedingung erfüllt.

Wir schliessen aus diesen Lösungen, dass obigen Aufgaben entweder kein Dreieck, oder zwei verschiedene Dreiecke entsprechen, —

Specialitäten der Sätze 20 sind auch die folgenden:

25. Die Durchschnittspunkte irgend einer Geraden, welche sich in der Ebene eines einfachen Viereckes befindet, mit den Seiten und Diagonalen des letzteren bilden eine involutorische Punktreihe. Entsprechende Punkte dieser Reihe sind je zwei in gegenüberliegenden Seiten befindliche, sowie die Schnittpunkte mit den Diagonalen.

Die Verbindungslinien irgend eines Punktes, welcher der Ebene eines einfachen Viereckes angehört, mit den Ecken des letzteren und den zwei Durchschnittspunkten der gegenüberliegenden Seiten bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. Entsprechende Strahlen dieses Büschels sind je zwei durch gegenüberliegende Ecken gehende Verbindungslinien, sowie jene, welche die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten enthalten.

Dass diese Sätze nur Specialitäten der Sätze 20 bilden, leuchtet ein, wenn man die beiden Diagonalen, beziehungsweise die zwei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten, als einen Kegelschnitt betrachtet. Zwei sich schneidende Gerade, sowie zwei Punkte, können ja bekanntlich als ein Kegelschnitt aufgefasst werden. Bilden zwei solche Gerade die Diagonalen eines Viereckes, so erscheint letzteres dem durch diese Geraden repräsentirten Kegelschnitte eingeschrieben. Fasst man hingegen die beiden Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Viereckes als einen Kegelschnitt auf, so erscheint das Viereck diesem Kegelschnitte umschrieben.

Geht die schneidende Gerade (Satz links) durch den Schnittpunkt zweier gegenüberliegender Seiten oder der Diagonalen, so ist dieser Punkt ein Doppelelement der involutorischen Reihe. Verbindet die schneidende Gerade beide Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten, so geht die involutorische Reihe

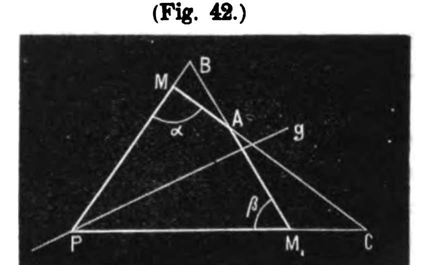
in eine harmonische über, nachdem die genannten Schnittpunkte Doppelelemente bilden. Es zeigt sich also, dass der Satz 37, 1. Abschnitt auch eine Specialität des obigen Satzes ist.

26. **Bleiben zwei gegenüberliegende Winkel eines veränderlichen vollständigen Vierseits ihrer Grösse nach constant, während sie sich um ihre Scheitel drehen und eine dritte Ecke irgend eine bestimmte Gerade durchläuft, so beschreiben die drei übrigen Ecken je einen Kegelschnitt, der durch die erwähnten zwei Scheitel geht.*)**

Bleiben zwei gegenüberliegende Seiten eines veränderlichen, vollständigen Vierecks ihrer Grösse nach constant, während sie sich in den Geraden, auf welchen sie liegen, fortbewegen und eine dritte Seite sich um irgend einen ihrer Punkte dreht, so bilden die drei übrigen Seiten Tangenten je eines Kegelschnittes, der auch die erwähnten zwei Geraden berührt.

(Satz links.) Die Ecken des vollständigen Vierseits nennen wir $PMAM_1BC$ (Fig. 42), die Scheitel der Winkel α und β, deren Grösse constant bleiben soll, seien M und M_1 und die Ecke, welche sich in einer bestimmten Geraden g bewegt, heisse P. Jeder Schenkel der genannten beiden Winkel beschreibt während der Drehung einen Strahlenbüschel, es kommen somit vier Strahlenbüschel zu Stande, von welchen die durch MP, M_1P erzeugten perspectivisch liegen, weil die Durchschnittspunkte von je zwei sich entsprechenden Strahlen derselben sich auf der Geraden g befinden. Diese zwei Büschel sind daher auch projectivisch verwandt. Nachdem nun die durch MP und MA entstehenden Büschel, sowie die Büschel, welche durch M_1P und M_1A zu Stande kommen, congruent sind, so müssen alle vier Strahlenbüschel untereinander projectivisch verwandt sein. Daraus folgt, dass je zwei von ihnen, welche nicht perspectivisch liegen, einen Kegelschnitt erzeugen, also die Schenkel MA und M_1A, ferner MP und M_1A, endlich MA und M_1P. Die Ecken A, B, C, in denen sich diese Paare von Schenkeln schneiden, beschreiben somit je einen Kegelschnitt, der durch M und M_1 hindurchgeht. — Gibt es eine Stellung des Vierseits, in welcher die Seiten MA, M_1A coincidiren, so beschreibt der Punkt A ebenfalls eine gerade Linie, da in diesem Falle die von den genannten Schenkeln erzeugten Strahlenbüschel perspectivisch liegen.

(Fig. 42.)



*) Newton stellte dieses Theorem unter dem Titel: „Organische Beschreibung der Kegelschnitte“ zuerst auf (Enumeratio linearum tertii ordinis. 1706).

(Satz rechts.) Sind $ABCD$ Ecken des vollständigen Vierecks und bewegen sich die Seiten von constanter Grösse AB und CD in den Geraden, auf welchen sie liegen, derart, dass die Verbindungslinie der Punkte A und D stets durch ein und denselben Punkt geht, so bilden die einzelnen Stellungen von A und D Elemente zweier perspectivisch liegender Reihen. Da nun die Reihe, welche B durchläuft, der durch A erzeugten congruent ist und ebenso die durch C erzeugte jener, welche durch D zu Stande kommt, congruent sein muss, so sind alle vier durch die Punkte A, B, C, D entstehenden Reihen unter einander projectivisch verwandt. Daraus folgt, dass die Projectionsstrahlen von je zwei dieser Reihen, welche nicht perspectivisch liegen, Tangenten eines Kegelschnittes bilden, der auch die Geraden, in denen sich AB und CD bewegen, tangirt. — Wenn bei irgend einer Lage des Vierecks die Punkte B und C mit dem Durchschnitte der Seiten AB und CD coincidiren, so schneiden sich die sämmtlichen Verbindungslinien von B und C in einem einzigen Punkte, nachdem in diesem Falle die von den genannten Punkten erzeugten Reihen perspectivisch liegen.

Wie man zu verfahren hat, um mit Benützung obiger Sätze beliebig viele Punkte, beziehungsweise beliebig viele Tangenten eines Kegelschnittes zu erhalten, wenn fünf Punkte, oder fünf Tangenten des letzteren gegeben sind, bedarf wohl keiner eingehenden Erklärung. Das wesentliche dabei ist im ersteren Falle die Ermittlung der Geraden, welche von einer Ecke des Vierseits durchlaufen wird, im zweiten die Auffindung jenes Punktes, um welchen sich eine Seite des Vierecks dreht.

27. Bleibt die Grundlinie eines veränderlichen Dreieckes der Grösse nach constant, während sie sich in irgend einer bestimmten Geraden fortbewegt und die beiden übrigen Seiten sich um zwei ihrer Punkte drehen, so beschreibt die Spitze des Dreiecks einen Kegelschnitt, welcher durch die zwei erwähnten Punkte geht.

Bleibt der Winkel an der Spitze eines veränderlichen Dreiecks der Grösse nach constant, während er sich um seinen Scheitel dreht und die beiden übrigen Ecken sich in zwei Geraden fortbewegen, so tangirt die Grundlinie stets denselben Kegelschnitt, welcher auch die zwei erwähnten Geraden berührt.

(Satz links.) Das Dreieck heisse ABC, die Grundlinie desselben sei BC und die Punkte, um welche sich AB und AC drehen, nennen wir M und M_1. Bei dieser Drehung beschreiben die Seiten AB und AC zwei projectivische Strahlenbüschel. Die Punktreihen, welche B und C während der Bewegung der Grundlinie durchlaufen, sind nämlich wegen der constanten Grösse der letzteren congruent und da die zwei Strahlenbüschel Scheine der zwei Reihen bilden, so müssen sie projectivisch verwandt sein, woraus eben folgt, dass der Punkt A, als

Durchschnittspunkt je eines Paares sich entsprechender Strahlen, einen Kegelschnitt beschreibt. Dass dieser Kegelschnitt durch die Mittelpunkte M und M_1 der erzeugenden Strahlenbüschel geht, bedarf keines Beweises mehr.

(Satz rechts.) Ist ABC das veränderliche Dreieck, A seine Spitze und bewegen sich die Punkte B und C beziehungsweise in den Geraden g und g_1, während der Winkel bei A seine Grösse nicht ändert, so beschreiben die Seiten AB und AC offenbar zwei congruente Strahlenbüschel, daher müssen die auf g und g_1 als Schnitte dieser Büschel sich ergebenden Punktreihen projectivisch verwandt sein. Nachdem nun die Grundlinie des Dreieckes stets je zwei entsprechende Punkte der genannten Reihen verbindet, so tangirt sie beständig ein und denselben Kegelschnitt.

28. Drehen sich die Seiten $a_1, a_2 \dots a_n$ eines veränderlichen einfachen $n$ecks der Reihe nach um n ihrer Punkte $M_1, M_2 \dots M_n$, während $n-1$ Eckpunkte $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ derselben sich beziehungsweise auf den Geraden $g_1, g_2 \dots g_{n-1}$ bewegen, so beschreibt die letzte Ecke und jeder Schnittpunkt zweier nicht unmittelbar aufeinander folgender Seiten des $n$ecks je einen Kegelschnitt. Jeder dieser Kegelschnitte geht durch jene zwei Punkte, um welche sich die beiden Seiten drehen, deren Durchschnitt eben den Kegelschnitt beschreibt.*)

Durchlaufen die Ecken $A_1, A_2 \dots A_n$ eines veränderlichen einfachen $n$ecks der Reihe nach n Gerade $g_1, g_2 \dots g_n$, während $n-1$ Seiten $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ desselben sich beziehungsweise um ihre Punkte $M_1, M_2 \dots M_{n-1}$ drehen, so tangirt die letzte Seite und jede Diagonale des $n$ecks stets je einen Kegelschnitt. Jeder dieser Kegelschnitte berührt auch jene zwei Geraden, welche die beiden Ecken durchlaufen, deren Verbindungslinie eben den Kegelschnitt tangirt.

(Satz links.) Um den Beweis für diesen Satz herzustellen hat man nur zu zeigen, dass die von den Seiten während ihrer Drehung beschriebenen Strahlenbüschel alle untereinander projectivisch verwandt sind. — Dass der Büschel, welchen die Seite a_1 (Fig. 43) bei ihrer Drehung um M_1 beschreibt, jenem Büschel projectivisch ist, der durch die Seite a_2 während ihrer Drehung um M_2 zu Stande kommt, folgt aus dem Umstande, dass die beiden Büschel perspectivisch liegen, nachdem der Durchschnittspunkt A_1 von je zwei ihrer Strahlen stets auf der Geraden g_1 gelegen ist. Ebenso lässt sich nachweisen, dass je zwei

*) Braikenridge und Mac-Laurin fanden diesen Satz fast gleichzeitig. Derselbe wurde zuerst in einem Werke von Braikenridge veröffentlicht, welches 1733 erschien.

Büschel, die von zwei beliebigen, sich in einer Ecke des Polygons schneidenden Geraden erzeugt werden, perspectivisch liegen. Daraus folgt, dass alle von den Seiten beschriebenen Strahlenbüschel projectivisch verwandt sind und damit erscheint auch obiger Satz gerechtfertigt.

(Fig. 43.)

Der Beweis für den Satz rechts kann in ganz analoger Weise gegeben werden. Es handelt sich nur darum, zu zeigen, dass je zwei von unmittelbar aufeinander folgenden Ecken während ihrer Bewegung zwei perspectivisch liegende Punktreihen erzeugen, dass also alle durch die Bewegung der Ecken des Polygons sich ergebende Punktreihen projectivisch verwandt sind.

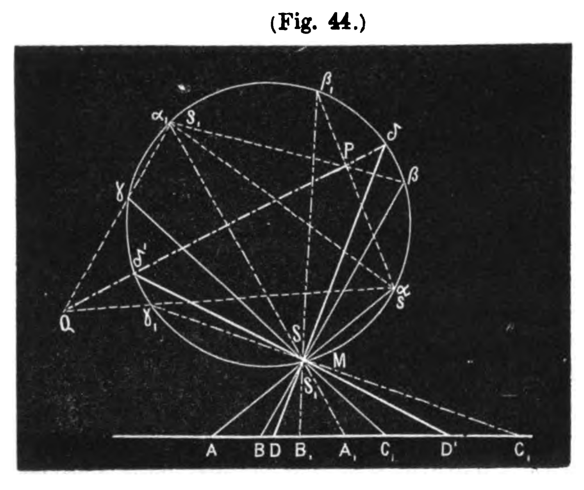
Zum Schlusse dieses Capitels betrachten wir nochmals folgende Aufgaben:

Die Doppelpunkte zweier conjectivischer Punktreihen sollen bestimmt werden.

Die Doppelstrahlen zweier concentrisch liegender, projectivischer Strahlenbüschel sollen bestimmt werden.

AA_1, BB_1 und CC_1 (Fig. 44) seien drei Paare sich entsprechender Punkte zweier conjectivischer Reihen, deren Doppelpunkte ermittelt werden sollen. Man beschreibt einen beliebigen Kreis und verbindet irgend einen Punkt M desselben mit den genannten sechs Punkten der beiden Reihen. Die Durchschnitte dieser Verbindungslinien, nämlich die Geraden, welche durch ABC, $A_1B_1C_1$ gehen, mit dem Kreise nennen wir beziehungsweise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Nun verbindet man α mit β_1 und γ_1, dann α_1 mit β und γ, wodurch sich im Schnitte von $\alpha\beta_1$ und $\alpha_1\beta$ der Punkt P, im Schnitte von $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\gamma$ der Punkt Q ergibt. Die Gerade PQ trifft den Kreis in zwei Punkten δ und δ', welche mit M verbunden Linien geben, deren Durchschnitte D und D' mit dem Träger der conjectivischen Reihen die gesuchten Doppelpunkte sind.

(Fig. 44.)



Der Beweis für diese Auflösung ist folgender: Die Verbindungslinien des Punktes M mit $ABC \ldots$, $A_1 B_1 C_1 \ldots$ bilden zwei projectivisch verwandte Strahlenbüschel, welche wir durch S und S_1 bezeichnen wollen. Die beiden Strahlenbüschel, welche aus den Verbindungslinien des Punktes α mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots$ und des Punktes α_1 mit $\alpha\beta\gamma \ldots$ bestehen, nennen wir s und s_1. Da nun S mit s_1 und S_1 mit s projectivisch verwandt ist, nachdem je zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel sich in einem Punkte des Kreises schneiden, so müssen auch s und s_1 projectivisch verwandt sein. Wie leicht einzusehen, entsprechen den Strahlen $\alpha\alpha_1$, $\alpha\beta_1$, $\alpha\gamma_1$ im Büschel s die Strahlen $\alpha_1\alpha$, $\alpha_1\beta$, $\alpha_1\gamma$ im Büschel s_1, woraus hervorgeht, dass diese zwei Büschel perspectivisch liegen, da sie den Strahl $\alpha\alpha_1$ entsprechend gemein haben. Der geradlinige Durchschnitt von s und s_1 ist die Verbindungslinie der Punkte P und Q. Wird nun irgend ein Punkt der Geraden PQ mit α und α_1 verbunden und verbindet man ferner die Punkte, in welchen die beiden so erhaltenen Geraden den Kreis schneiden, mit M, so sind letztere zwei Verbindungslinien offenbar sich entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1. Daraus folgt, dass die Geraden $M\delta$ und $M\delta'$ Doppelstrahlen dieser Büschel sein müssen, dass also auch D und D' Doppelpunkte der gegebenen conjectivischen Reihen sind.

Schneidet PQ den Kreis nicht, so haben die beiden Reihen keine reellen Doppelpunkte; berührt PQ den Kreis, so ist nur ein reeller Doppelpunkt vorhanden.

Die Aufgabe rechts wird wohl am einfachsten dadurch gelöst, dass man beide Strahlenbüschel durch irgend eine Gerade schneidet, die Doppelpunkte der auf dieser Geraden entstehenden conjectivischen Reihen bestimmt und dieselben mit dem Mittelpunkte der Büschel verbindet. Letzteres entfällt, wenn man den Kreis so annimmt, dass er durch den genannten Mittelpunkt hindurchgeht.

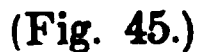
g) Pol und Polare eines Kegelschnittes.

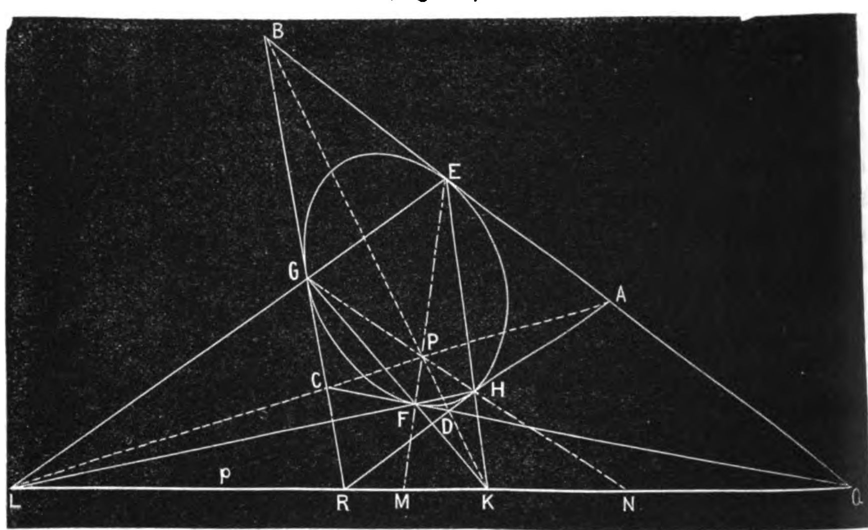
Aus dem Satze 14, 2. Abschnitt kann eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Kegelschnitte gefolgert werden, von welchen wir nun die hauptsächlichsten in Betracht ziehen wollen.

$ABCD$ (Fig. 45 und 46) *) seien die Eckpunkte eines einem Kegelschnitte umschriebenen Viereckes, Q und R die Durchschnitte von je zwei Gegenseiten desselben und P der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Nach Satz 14 gehen auch die Verbindungslinien der Berührungspunkte E, F und G, H je zweier gegenüberliegenden Seiten durch den Punkt P und die Schnittpunkte K, L der gegenüberliegenden Seiten des eingeschriebenen Vierecks $GEHF$ befinden sich im Durchschnitte von QR beziehungsweise mit BD und AC. Die Diagonale

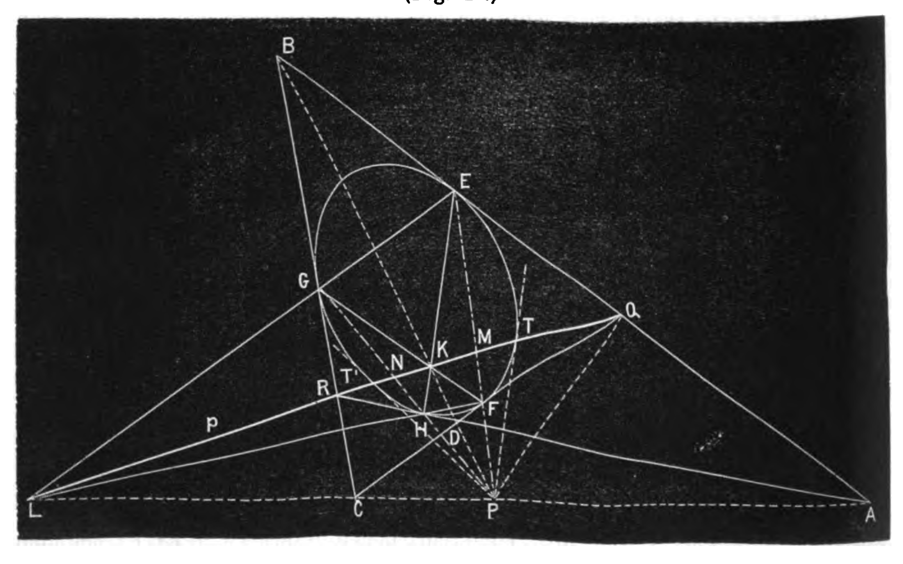
*) Die obigen Erklärungen beziehen sich auf beide Figuren zugleich. Letztere unterscheiden sich wesentlich nur dadurch, dass in der einen die Gerade QR ganz ausserhalb des Kegelschnittes liegt, während sie in der anderen die Curve schneidet.

EF des eingeschriebenen Vierecks wird von ihrem Schnittpunkte M mit KL und dem Punkte P harmonisch getheilt. (Satz 37, 1. Abschnitt). Daraus folgt,


(Fig. 45.)



(Fig. 46.)



dass der Punkt P seinen Ort nicht ändert, wenn die Punkte M, F und E, mit denen er eine harmonische Reihe bildet, an ihrer Stelle bleiben. Letzteres ist der Fall, wenn die in Q sich schneidenden Tangenten fix bleiben, während die beiden anderen Tangenten, welche sich in R treffen, ihre Lage derart ändern,

dass R sich beständig auf der Geraden MQ befindet. Die Berührungspunkte aller Paare von Tangenten, welche sich in irgend einem Punkte R der Geraden MQ treffen, gehen somit durch ein und denselben Punkt P.

Der Punkt P wird der Pol der Geraden MQ und diese die Polare des Punktes P genannt.

Die Diagonale GH des eingeschriebenen Vierecks wird von P und dem Schnittpunkte N derselben mit MQ ebenfalls harmonisch getheilt. Nachdem nun diese Diagonale mit der Berührungssehne der beiden Tangenten identisch ist, welche sich in R schneiden, und letzterer Punkt ganz beliebig in MQ angenommen werden kann, so muss, was für die Sehne GH gilt auch für jede andere durch P gehende Sehne gelten, woraus der Satz folgt:

29. Pol und Polare theilen jede durch ersteren gehende Sehne harmonisch.

Aus diesem Satze geht hervor, dass der Pol ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegt, je nachdem letzterer von der Polaren geschnitten wird, oder nicht.

Berührt die Polare den Kegelschnitt, so ist ihr Berührungspunkt der Pol. Denn in diesem Falle ist der Berührungspunkt zugleich der Durchschnitt aller Berührungssehnen von je zwei Tangenten, welche sich in einem Punkte der Polaren schneiden.

Ist p irgend eine in der Ebene eines Kegelschnittes gelegene Gerade, so kann der Pol P dieser Geraden in verschiedener Weise ermittelt werden, wie folgt:

1. Man zieht aus zwei beliebigen Punkten Q und R der Geraden p je ein Paar von Tangenten. Der Durchschnitt der zwei Berührungssehnen EF und GH ist der gesuchte Punkt.

2. Man zeichnet irgend ein dem Kegelschnitte umschriebenes Viereck $ABCD$, bei welchem je zwei gegenüberliegende Seiten sich in einem Punkte der Geraden p schneiden. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Viereckes ist der Pol von p.

3. Man zieht aus einem beliebigen Punkte Q von p zwei Tangenten an den Kegelschnitt und ermittelt jene Gerade, die mit p und den zwei Tangenten einen harmonischen Strahlenbüschel bildet, in welchem die Tangenten einander zugeordnet sind. Der Schnittpunkt der so erhaltenen Linie mit der Berührungssehne der beiden Tangenten ist der Punkt P.

4. Man zieht aus zwei beliebigen Punkten Q und R der Geraden p je ein Tangentenpaar an den Kegelschnitt und bestimmt zu jedem dieser Paare und der Geraden p den vierten harmonischen Strahl derart, dass die Tangenten einander zugeordnete Strahlen werden. Die zwei so erhaltenen Strahlen schneiden sich in P.

5. Wenn p die Curve schneidet (Fig. 46), so ergibt sich P einfach als Durchschnitt der beiden Tangenten, welche in den Schnittpunkten T und T' der Geraden p mit dem Kegelschnitte an letzteren gezogen werden können.

Die unter 3 und 4 angegebenen Constructionen finden ihre Begründung darin, dass jede durch P gehende Sehne des Kegelschnittes von P und p harmonisch getheilt wird.

Der Beweis für die letzte der angeführten Constructionen geht aus der unter 1 angegebenen hervor. Wenn nämlich Q und R mit T und T' coincidiren, so fallen auch die Berührungssehnen der von Q und R ausgehenden Tangentenpaare mit den in T und T' gezogenen Tangenten zusammen; letztere müssen sich also in P schneiden.

Um zu einem in der Ebene eines Kegelschnittes befindlichen Punkte P die Polare p zu finden, kann man auf folgende Arten verfahren:

1'. Man zieht durch P zwei beliebige Gerade, welche den Kegelschnitt schneiden, betrachtet dieselben als Diagonalen eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Viereckes $EGFH$ und bestimmt die Schnittpunkte K und L der Gegenseiten dieses Viereckes. Die Verbindungslinie der Punkte K und L ist die gesuchte Polare.

2'. Man zeichnet irgend ein dem Kegelschnitte umschriebenes Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich in P schneiden. Die Verbindungslinien der zwei Punkte Q und R, in welchen sich je zwei Gegenseiten dieses Viereckes treffen, ist die Polare von P.

3'. Man zieht durch P irgend eine die Curve schneidende Gerade, bestimmt auf dieser Geraden jenen Punkt M, welcher von P durch die Curvenpunkte E und F harmonisch getrennt wird, und verbindet M mit dem Schnittpunkte Q der in E und F gezogenen Tangenten. Letztere Verbindungslinie ist die gesuchte Polare.

4'. Man zieht durch P zwei beliebige, die Curve schneidende Gerade, bestimmt in jeder dieser Geraden jenen Punkt M, beziehungsweise N, welcher von P durch die betreffenden Schnittpunkte E, F und G, H harmonisch getrennt wird, und verbindet M mit N. Letztere Verbindungslinie ist die gesuchte Polare.

5'. Liegt P ausserhalb dem Kegelschnitte (Fig. 46), so ist die Berührungssehne TT' der aus P an die Curve gezogenen Tangenten zugleich die Polare von P.

Alle diese Constructionen finden ihre einfache Begründung in den vorausgehenden Erklärungen.

30. Die Polaren aller Punkte einer Geraden p gehen durch den Pol P dieser Geraden und umgekehrt liegen die Pole aller durch ein und denselben Punkt P gehenden Geraden auf der Polaren p des Punktes P

Dieser Satz kann auch in folgender Form ausgedrückt werden:

Bewegt sich ein Punkt in einer Geraden *p*, so dreht sich seine Polare um den Pol *P* dieser Geraden, indem sie beständig durch letzteren hindurchgeht.

Dreht sich eine Gerade um einen in ihr liegenden Punkt *P*, so bewegt sich ihr Pol auf der Polaren *p* dieses Punktes.

Dass die Polaren aller Punkte einer Geraden *p* (Fig. 45 und 46), welche ausserhalb des Kegelschnittes liegen, durch den Pol *P* dieser Geraden gehen, ergibt sich einfach daraus, dass die Berührungssehne (z. B. *EF* oder *GH*) irgend eines Paares von Tangenten die Polare jenes Punktes (*Q* oder *R*) ist, in welchem sich die beiden Tangenten schneiden. (Siehe obige Construction 5'). Von diesen Berührungssehnen wurde ja nachgewiesen, dass sie alle durch den Punkt *P* gehen. — Der Beweis dafür, das die Polaren jener Punkte von *p*, welche innerhalb des Kegelschnittes liegen, ebenfalls durch *P* gehen müssen, kann wie folgt gegeben werden: Ist *M* (Fig. 46) ein beliebiger, innerhalb der Curve gelegener Punkt von *p* und man will die Polare von *M* ermitteln, so geschieht dies dadurch, dass man zwei beliebige sich in *M* schneidende Sehnen *TT'* und *EF* zieht und die Schnittpunkte jener zwei Tangentenpaare, welche den Kegelschnitt in den Endpunkten der beiden Sehnen berühren, durch eine Gerade verbindet. Letztere ist dann die Polare von *M*. (Siehe Construction 4'). Da nun eine der Sehnen *TT'* so gewählt werden kann, dass sie mit der Polaren *p* coincidirt, so muss die Polare von *M* durch den Schnittpunkt der in *T* und *T'* gezogenen Tangenten, nämlich durch den Pol *P* gehen.

Dass die Pole aller durch ein und denselben Punkt *P* gehender Geraden, welche die Curve schneiden, in der Polaren *p* von *P* gelegen sind, leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass der Durchschnittspunkt zweier Tangenten zugleich der Pol der Berührungssehne dieser Tangenten ist (Construction 5) und dass die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare, deren Berührungssehnen durch ein und denselben Punkt *P* gehen, sich auf der Polaren von *P* befinden. — Um einzusehen, dass die Pole auch jener durch *P* gehenden Geraden, welche die Curve nicht schneiden, in der Polaren von *P* liegen müssen, erinnere man sich an die unter 1 angeführte Construction zur Ermittlung des Poles, wenn die Polare gegeben ist. Wollte man z. B. für die Gerade *PQ* (Fig. 46) den Pol durch diese Construction ermitteln, so hätte man aus zwei beliebigen Punkten von *PQ* je ein Tangentenpaar zu ziehen und den Schnittpunkt der Berührungssehnen dieser Tangentenpaare zu bestimmen. Nachdem nun als Schnittpunkt eines der zwei Paare von Tangenten immer der Punkt *P* gewählt werden kann und die Berührungssehne der sich in *P* schneidenden Tangenten zugleich die Polare von *P* ist, so muss der Pol von *PQ* in dieser Polaren liegen.

Aus obigem Satze 30 ergibt sich unmittelbar der folgende:

31. Die Polare des Durchschnittes zweier Geraden ist die Verbindungslinie der Pole dieser zwei Geraden und

der Pol der Verbindungslinie zweier Punkte ist der Schnittpunkt der Polaren dieser zwei Punkte.

Da nämlich die Polare eines Punktes, welcher auf zwei Geraden zugleich liegt, durch den Pol einer jeden der zwei Geraden gehen muss, so kann sie nur die Verbindungslinie der Pole dieser Geraden sein. Umgekehrt ist der Pol der Verbindungslinie zweier Punkte kein anderer Punkt, als der Durchschnitt der Polaren dieser zwei Punkte, weil der Pol einer Geraden, welche durch zwei bestimmte Punkte geht, nach Satz 30 in jeder der zwei Polaren dieser Punkte liegen muss.

Ist p irgend eine Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes und P ihr Pol, so sagt man, dass P und irgend ein Punkt von p conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind, während die Gerade p und irgend eine durch P gehende Gerade der Ebene des Kegelschnittes conjugirte Gerade in Bezug auf die Curve genannt werden. Nachdem die Polare eines jeden Punktes von p durch P geht, und umgekehrt der Pol einer jeden durch P gehenden Geraden in p gelegen ist, so kann man auch sagen:

Zwei conjugirte Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes sind solche, deren jeder in der Polaren des anderen liegt.

Zwei conjugirte Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes sind solche, deren jede durch den Pol der andern geht.

Wenn die Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte den Kegelschnitt schneidet, so folgt aus Satz 29, 2. Abschnitt, dass diese Punkte durch die Schnittpunkte der Verbindungslinie mit der Curve harmonisch getrennt werden. Auch ergibt sich, dass die aus dem Durchschnittspunkte zweier conjugirter Geraden gezogenen Tangenten diese Geraden harmonisch trennen.

Der Berührungspunkt jeder Tangente eines Kegelschnittes ist den obigen Erklärungen zufolge allen Punkten dieser Tangente, also auch sich selbst conjugirt und jede Tangente ist allen durch ihren Berührungspunkt gehenden Geraden der Ebene des Kegelschnittes, also auch sich selbst conjugirt.

32. Jeder Strahlenbüschel, welcher durch die Polaren der Punkte einer Punktreihe gebildet wird, ist mit dieser Reihe projectivisch verwandt und liegt gegen dieselbe involutorisch. Entsprechende Elemente sind je ein Punkt und seine Polare.

Um diesen Satz zu rechtfertigen, nehmen wir an, p (Fig. 45 und 46) sei der Träger irgend einer in der Ebene eines Kegelschnittes gelegenen Punktreihe R, und P heisse der Pol von p. Bestimmt man zu beliebig vielen Punkten ABC . . . von R die Polaren so gehen letztere nach Satz 30 alle durch P und bilden somit einen Strahlenbüschel abc . . . ., von welchem wir zu beweisen haben, dass er mit der Reihe ABC . . . . . projectivisch verwandt ist. Nach der unter 1′ angegebenen Construction wird zu irgend einem Punkte L der

Geraden p die Polare erhalten, wenn man aus L zwei die Curve schneidende Gerade, LE und LF zieht, dieselben als Diagonalen eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Viereckes $EFGH$ betrachtet und die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten K und P des letzteren verbindet. KP ist dann die Polare von L. Geht die Sehne EF durch den Pol von p, so muss K in p liegen, denn würde man nach 1′ die Polare von P construiren und dabei EF und GH als die zwei durch P beliebig zu ziehenden Geraden wählen, so müsste sich p als Verbindungslinie der Punkte K und L ergeben. Verbindet man also irgend einen Punkt L der Reihe R mit dem Endpunkte E einer durch P gehenden Sehne EF und heisst der Schnittpunkt von LE mit dem Kegelschnitte G, so trifft die Gerade GF den Träger von R in einem Punkte K, welcher der Polaren von L angehört. Alle Geraden EG und FG bilden nun zwei projectivische Strahlenbüschel s und s_1 mit den Mittelpunkten E und F, da je zwei Strahlen EG und FG derselben, welche man als einander entsprechend betrachten kann, sich in einem Punkte G des Kegelschnittes treffen. Von diesen Büscheln liegt der eine, nämlich s_1, gegen jenen Büschel S perspectivisch, welcher von den Polaren KP aller Punkte L gebildet wird. Es sind also S und s_1, folglich auch S und s projectivisch verwandt und daraus ergibt sich, dass auch die von den Punkten L gebildete Reihe R, welche ein Schnitt des Büschels s ist, mit dem Büschel S projectivisch verwandt sein muss.

Nachdem S gegen die von allen Punkten K gebildete Reihe perspectivisch liegt, so müssen auch die durch K und L entstehenden Reihen projectivisch verwandt sein. Die Punkte K und L sind nun, da jeder in der Polaren des andern liegt, conjugirte Punkte, man kann also sagen, dass die Reihen, welche von allen Paaren conjugirter Punkte ein und derselben Geraden gebildet werden, conjectivische Reihen sind, in denen sich je zwei conjugirte Punkte entsprechen. Aus dem Umstande, dass dem Punkte L der Punkt K entspricht, ob man L als Punkt der einen, oder der andern Reihe betrachtet, folgt aber auch, dass die von allen Punkten K und L gebildeten Reihen involutorisch liegen.

Wie leicht einzusehen bilden auch alle Geraden PK und PL (welche einander conjugirt sind) einen involutorischen Strahlenbüschel, da letzterer ein Schein der involutorischen Reihe ist. Wir können somit den Satz aufstellen:

33. Alle Paare conjugirter Punkte ein und derselben Geraden bilden eine involutorische Reihe, in welcher je zwei conjugirte Punkte sich entsprechen.

Alle durch ein und denselben Punkt gehenden Paare conjugirter Geraden bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, in welchem sich je zwei conjugirte Gerade entsprechen.

Schneidet der Träger der involutorischen Reihe den Kegelschnitt, so sind die Schnittpunkte zugleich reelle Doppelpunkte der Reihe.

Liegt der Mittelpunkt des involutorischen Strahlenbüschels ausserhalb des Kegelschnittes, so bilden jene Strahlen, welche den Kegelschnitt berühren, zugleich die reellen Doppelstrahlen des Büschels.

Diese Behauptungen finden ihre Rechtfertigung darin, dass jeder Punkt, beziehungsweise jede Tangente eines Kegelschnittes sich selbst conjugirt ist.

34. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so wird jede Gerade, welche durch den Pol einer Seite geht, von den beiden andern Seiten in conjugirten Punkten geschnitten.

Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitte umschrieben ist, so bilden die Verbindungslinien irgend eines Punktes, welcher auf der Polaren eines Eckpunktes liegt, mit den beiden andern Eckpunkten conjugirte Strahlen.

Man nehme an, um den Satz links einzusehen, das eingeschriebene Dreieck sei EFG (Fig. 45 oder 46). Der Pol der Seite EF ist Q und die Gerade p kann als eine beliebige durch Q gezogene Gerade betrachtet werden. Von den Punkten K und L, in welchen p von den Dreieckseiten GE und GF geschnitten wird, haben wir bereits nachgewiesen, dass sie einander conjugirt sind, es erscheint somit der in Rede stehende Satz gerechtfertigt.

Der Beweis für den Satz links ergibt sich ebenfalls aus den vorhergehenden Untersuchungen, wenn man annimmt, das umschriebene Dreieck sei BCQ (Fig. 45 oder 46). Die Polare von Q ist die Gerade EF und P kann als ein beliebiger Punkt von EF angesehen werden. Dass nun die Verbindungslinien des Punktes P mit den Punkten B und C (nämlich die Geraden PK und PL) einander conjugirt sind, wurde bereits bewiesen.

Aus diesen Sätzen ergeben sich durch Umkehrung die folgenden:

35. Wenn eine Gerade (p) von zwei Seiten eines Dreieckes (EFG), welches einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, in conjugirten Punkten (K und L) geschnitten wird, so geht diese Gerade durch den Pol (Q) der dritten Seite.

Wenn die Verbindungslinie eines Punktes (P) mit zwei Eckpunkten eines Dreieckes (BCQ), welches einem Kegelschnitte umschrieben ist, conjugirte Gerade bilden, so liegt dieser Punkt in der Polaren des dritten Eckpunktes.

Mit Rücksicht auf die Resultate unserer vorhergehenden Untersuchungen erscheint ein besonderer Beweis hiefür kaum nothwendig.

36. Wenn beliebig viele Sehnen (GH) eines Kegelschnittes durch ein und denselben Punkt (P) gehen, so bilden die Verbindungslinien

Wenn die Durchschnittspunkte (R) beliebig vieler Tangentenpaare eines Kegelschnittes auf ein und derselben Geraden (p) liegen, so

irgend eines bestimmten Curvenpunktes (E) mit den Endpunkten dieser Sehnen einen involutorischen Strahlenbüschel. Entsprechende Strahlen des letzteren sind je zwei, welche durch die Endpunkte ein und derselben Sehne gehen.

bilden die Schnittpunkte irgend einer bestimmten Tangente mit diesen Tangentenpaaren eine involutorische Punktreihe. Entsprechende Punkte der letzteren sind je zwei, welche ein und demselben Tangentenpaare angehören.

Denkt man sich die Sehne GH (Fig 45 oder 46) um P gedreht und ihre Endpunkte stets mit demselben Curvenpunkte E verbunden, so gehen diese Verbindungslinien durch zwei conjugirte Punkte K, L der Polaren von P. Nachdem nun die Punkte K und L ein Paar sich entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe sind (Satz 33), welche als Schnitt des in Rede stehenden Strahlenbüschels betrachtet werden kann, so ist obiger Satz (links) hiemit gerechtfertigt. — Der Satz rechts ist leicht einzusehen, wenn man sich erinnert, dass die Geraden KP und KL, oder was dasselbe ist, BP und AP ein Paar conjugirter Strahlen sind, also ein Paar sich entsprechender Strahlen eines involutorischen Büschels bilden, woraus folgt, dass die Tangente AB von diesem Büschel in einer involutorischen Reihe geschnitten wird.

Drei Punkte, von denen je zwei in Bezug auf ein und denselben Kegelschnitt conjugirt sind, nennt man ein **Tripel conjugirter Punkte**, und drei Gerade, von denen je zwei in Bezug auf ein und denselben Kegelschnitt conjugirt sind, bilden ein **Tripel conjugirter Geraden**. Das Dreieck, dessen Ecken von einem Tripel conjugirter Punkte, oder dessen Seiten von einem Tripel conjugirter Geraden gebildet werden, wird ein **Polardreieck** genannt. In den Figuren 45 und 46 bilden K, L und P ein Tripel conjugirter Punkte, KL, KP und LP ein Tripel conjugirter Geraden.

Um ein Tripel conjugirter Punkte zu erhalten, kann man einen Punkt in der Ebene des Kegelschnittes, z. B. P, ganz beliebig wählen, ein zweiter, etwa K, darf selbstverständlich nur in der Polaren p des Punktes P gewählt werden und der dritte ergibt sich dann im Durchschnitte L der Polaren von P und K. — Ein Tripel conjugirter Geraden kommt wie folgt zu Stande: Man nimmt eine beliebige Gerade p in der Ebene des Kegelschnittes an, bestimmt ihren Pol P, zieht durch P eine beliebige zweite Gerade, z. B. PK und ermittelt den Pol L von PK, welcher, wie bekannt, auf p gelegen sein muss. Die Verbindungslinie der Punkte P und L bildet dann mit den Geraden p und PK ein Tripel conjugirter Geraden.

Aus dieser Erklärung folgt, dass es zu jedem beliebigen Punkte P in der Ebene eines Kegelschnittes **unendlich viele Paare von Punkten gibt**, welche mit P ein Tripel conjugirter Punkte bilden. **Alle diese Paare liegen auf der Polaren von P und sind entsprechende Punkte einer**

involutorischen Reihe. Liegt der Punkt P auf der Curve, so ist er bekanntlich sich selbst und jedem anderen Punkte der in ihm gezogenen Tangente conjugirt. Daher ist in diesem Falle das Tripel unbestimmt. Zwei Punkte desselben coincidiren in P und der dritte kann jeder Punkt der in P tangirenden Geraden sein. — Zu jeder beliebigen, in der Ebene eines Kegelschnittes gelegenen Geraden p gibt es unendlich viele Paare von Geraden, welche mit p ein Tripel conjugirter Geraden bilden. Alle diese Paare gehen durch den Pol von p und sind entsprechende Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels. Berührt p die Curve, so ist p sich selbst und jeder durch den Berührungspunkt gehenden Geraden conjugirt und das Tripel ist dann unbestimmt.

Aus diesen Erklärungen folgt unmittelbar:

Die Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken ein Tripel conjugirter Punkte sind, bilden ein Tripel conjugirter Geraden. Jede Seite ist die Polare der ihr gegenüberliegenden Ecke.

Die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten ein Tripel conjugirter Geraden sind, bilden ein Tripel conjugirter Punkte. Jede Ecke ist der Pol der ihr gegenüberliegenden Seite.

Nachdem die Polare eines Punktes P ganz ausserhalb des Kegelschnittes liegt, wenn P sich innerhalb der Curve befindet, jedoch die letztere schneidet, sobald P ausserhalb gelegen ist, so befindet sich bei einem Tripel conjugirter Punkte ein Punkt stets innerhalb der Curve, während die beiden andern ausserhalb liegen.

Aus den obigen Erklärungen folgen auch unmittelbar die Sätze:

37. In jedem vollständigen Vierecke ($EFGH$), das einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, bilden die Durchschnittspunkte (K, L, P) der gegenüberliegenden Seiten ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt.

In jedem vollständigen Vierseit ($ABCD$), das einem Kegelschnitte umschrieben ist, bilden die Diagonalen (KL, KP, LP), ein Tripel conjugirter Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt.

Wir reihen hier noch einige Sätze an, welche sich aus den zwischen Pol und Polare bestehenden Beziehungen ergeben:

38. Sind K_1 und K_2 zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte und construirt man zu den Tangenten von K_2 die Pole in Bezug auf K_1, so liegen alle

Sind K_1 und K_2 zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte und construirt man zu den Punkten von K_2 die Polaren in Bezug auf K_1, so berühren alle diese

diese Pole auf einem dritten Kegelschnitte.

Polaren einen dritten Kegelschnitt.

Um die Richtigkeit des Satzes links einzusehen, denke man sich K_2 als ein Erzeugniss zweier Punktreihen R und R_1, deren Träger zwei beliebige Tangenten sein können. Bestimmt man zu den Punkten von R sowohl, als von R_1 die Polaren, so bilden letztere zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1, nachdem R mit R_1, S mit R und S_1 mit R_1 projectivisch verwandt sind. Entsprechende Strahlen dieser Büschel können offenbar nur die Polaren von zwei sich entsprechenden Punkten der genannten Reihen sein. S und S_1 erzeugen demnach einen Kegelschnitt, in welchem die Pole sämmtlicher Tangenten von K_2 liegen, da nach Satz 31, 2. Abschnitt, der Durchschnitt von je zwei sich entsprechenden Strahlen der beiden Büschel zugleich der Pol der Verbindungslinie je zwei sich entsprechender Punkte von R und R_1 ist und jede solche Verbindungslinie K_2 berührt.

Der Satz rechts lässt sich auf ganz ähnliche Art nachweisen.

39. Sind in der Ebene eines Kegelschnittes ein Punkt A und eine nicht durch A gehende Gerade a gegeben, und bestimmt man in jeder durch A gehenden Geraden jenen Punkt, welcher dem Schnittpunkte dieser Geraden mit a conjugirt ist, so liegen alle dadurch erhaltenen Punkte auf einem Kegelschnitte. Derselbe geht durch den Pol von a, durch A und die Berührungspunkte der von A an die gegebene Curve gezogenen Tangenten, wenn solche vorhanden sind.

Sind in der Ebene eines Kegelschnittes eine Gerade a und ein nicht in a gelegener Punkt A gegeben, und bestimmt man für jeden Punkt von a jene durch ihn gehende Gerade, welche der Verbindungslinie dieses Punktes mit A conjugirt ist, so umhüllen alle dadurch erhaltenen Geraden einen Kegelschnitt. Derselbe berührt die Polare von A, die Gerade a und die in den Schnittpunkten der Curve mit a gezogenen Tangenten, wenn solche vorhanden sind.

Um uns von der Richtigkeit des Satzes links zu überzeugen, denken wir uns a als den Träger einer Punktreihe R und A als den Mittelpunkt eines Strahlenbüschels S, welcher gegen R perspectivisch liegt. Soll in irgend einem Strahle q von S jener Punkt bestimmt werden, der dem in R gelegenen Punkte Q dieses Strahles conjugirt ist, so hat man die Polare von Q zu ermitteln; sie schneidet q in dem gesuchten Punkte. Da nun die Polaren aller Punkte von R durch den Pol des Trägers von R gehen und einen mit R projectivisch verwandten Strahlenbüschel S_1 bilden, so hat man zwei projectivische Büschel S und S_1, welche einen Kegelschnitt erzeugen, der die Eigenschaft hat, dass jedem

Schnittpunkte desselben mit irgend einem Strahle des Büschels S der Schnittpunkt dieses Strahles mit a conjugirt ist.

Der Beweis für den Satz rechts kann wie folgt geführt werden: Wir betrachten a wieder als den Träger einer Punktreihe R und A als Mittelpunkt eines gegen R perspectivisch liegenden Strahlenbüschels S. Die Pole aller Strahlen dieses Büschels liegen auf ein und derselben Geraden und bilden eine Punktreihe R_1, welche mit S, also auch mit R projectivisch verwandt ist. Daher erzeugen R und R_1 einen Kegelschnitt, welcher jede Gerade berührt, die irgend einem Strahle von S conjugirt ist und diesen Strahl in einem Punkte von R schneidet.

Wir überlassen es dem Leser jene speciellen Fälle obiger Sätze zu untersuchen, in welchen entweder A oder a unendlich ferne gelegen ist. —

Die Sätze 30, 31, 32 und 38 dieses Abschnittes geben uns Aufschluss über jene eigenthümliche Beziehung zwischen Punkt und gerader Linie, Punktreihe und Strahlenbüschel, Strecke und Winkel, Punkten eines Kegelschnittes und Tangenten einer zweiten solchen Curve u. s. w., welche sich in den bisher aufgestellten Doppelsätzen ausspricht. Ist irgend ein ebenes System (speciell eine ebene Figur) gegeben, und denkt man sich zu jedem Punkte dieses Systems die Polaren in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt construirt, so bilden alle diese Polaren ein anderes ebenes System (eine andere ebene Figur) von welchem man sagt, dass es mit ersterem reciprok verwandt sei. Der Zusammenhang, welcher zwischen zwei reciproken Gebilden besteht, findet in dem Gesetze der Reciprocität seinen Ausdruck. — Wir begnügen uns vorläufig mit diesen Bemerkungen, da in einem folgenden Abschnitte die Beziehungen reciproker Gebilde besonders untersucht werden.

Auch die zuletzt aufgestellten Sätze (39) lassen eine Art von Verwandtschaft erkennen, welche zwischen ebenen Systemen, speciell zwischen ebenen Figuren bestehen kann. Bleibt nämlich der Punkt A fest, während die Gerade a ihren Ort ändert, so entspricht jeder Geraden a in der Ebene des gegebenen Kegelschnittes ein anderer Kegelschnitt; bleibt a fest, während A seinen Ort ändert, so entspricht jedem Punkte A in der genannten Ebene ein besonderer Kegelschnitt. Diese Art von Verwandtschaft, bei welcher jedem Punkte oder jeder Geraden ein Kegelschnitt entspricht, wird als eine Verwandschaft zweiten Grades bezeichnet zum Unterschiede der zwischen projectivischen oder reciproken Gebilden bestehenden, welche eine Verwandtschaft des ersten Grades genannt wird.

h) Durchmesser, Axen und Brennpunkte eines Kegelschnittes.

Ist P ein unendlich ferner Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes und p seine Polare, so geht letztere durch den Halbirungspunkt jeder Sehne, welche gegen P convergirt. Denn nach Satz 29, 2. Abschnitt, werden alle durch P

gehenden Sehnen von P und seiner Polaren harmonisch getheilt; nachdem nun P in unendlicher Ferne gelegen ist, so muss p eine jede solche Sehne halbiren. (Satz 33, 1. Abschnitt). Da ferner alle gegen P convergirenden Sehnen parallel sind, so folgt:

40. Die Halbirungspunkte aller Sehnen eines Kegelschnittes, welche in irgend einer Richtung parallel zu einander gezogen werden, liegen auf ein und derselben Geraden, welche ein Durchmesser des Kegelschnitts genannt wird. Ein Durchmesser ist somit die Polare eines unendlich fernen Punktes und halbirt jede demselben conjugirte Sehne.

Die Richtung eines Durchmessers und jene der ihm conjugirten Geraden werden conjugirte Richtungen genannt. Unter der Länge eines Durchmessers, welcher den Kegelschnitt in reellen Punkten schneidet, versteht man die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte.

Da man die Polare von P auch erhält, wenn man aus P an die Curve Tangenten zieht und ihre Berührungspunkte verbindet, so kann man schliessen, dass die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers zu den Sehnen parallel sind, welche von diesem Durchmesser halbirt werden und dass die Berührungssehne zweier paralleler Tangenten immer ein Durchmesser sein muss.

Nimmt man einen zweiten unendlich fernen Punkt in der Curvenebene an und construirt seine Polare, so erhält man einen zweiten Durchmesser, welcher ersteren im Pole der Verbindungslinie beider unendlich ferner Punkte schneidet (Satz 31, 2. Abschnitt). Diese Verbindungslinie ist nichts anderes, als die unendlich ferne Gerade der Ebene des Kegelschnittes; ihre sämmtlichen Punkte liegen nämlich in unendlicher Entfernung, daher muss die Polare eines jeden ihrer Punkte ein Durchmesser sein. Aus dem Umstande, dass die Polaren aller Punkte ein und derselben Geraden durch den Pol dieser Geraden gehen folgt:

Alle Durchmesser eines Kegelschnittes schneiden sich in demselben Punkte nämlich im Pole der unendlich fernen Geraden. Dieser Punkt wird der Mittelpunkt des Kegelschnittes genannt, da er jeden Durchmesser halbirt.

Letztere Behauptung findet ihre Rechtfertigung darin, dass die Polare des Mittelpunktes unendlich entfernt ist und dass Pol und Polare jede durch ersteren gehende Sehne harmonisch theilt.

Zwei conjugirte Durchmesser, also zwei Durchmesser, deren jeder durch den Pol des andern geht, haben die Eigenschaft, dass jeder alle Sehnen halbirt, welche mit dem andern parallel laufen. Denn ist p irgend ein Durchmesser, so halbirt er alle Sehnen, welche gegen seinen Pol convergiren. Nachdem nun der dem Durchmesser p conjugirte, welchen wir q nennen wollen, ebenfalls gegen den unendlich fernen Pol von p

convergirt, so müssen die genannten Sehnen parallel zu q sein. Da ferner q alle gegen seinen Pol gerichteten Sehnen halbirt, dieser Pol aber der unendlich ferne Punkt des conjugirten Durchmessers p ist, so sind alle von q halbirten Sehnen parallel zu p.

Um zu einem gegebenen Durchmesser den ihm conjugirten zu erhalten, construirt man in einem Endpunkte des ersteren die Tangente und zieht durch den Curvenmittelpunkt eine zu ihr parallele Gerade. Wie aus den obigen Erklärungen folgt, ist diese Gerade der verlangte, dem gegebenen conjugirte Durchmesser.

Der einem gegebenen conjugirte Durchmesser wird auch erhalten, wenn man zu dem gegebenen Durchmesser eine parallele Sehne zieht und den Halbirungspunkt derselben mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes verbindet.

41. **Die Diagonalen eines einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes bilden zwei conjugirte Durchmesser.**

Um dies einzusehen, betrachten wir die Figur 45 oder 46. Nehmen wir an, das dem Kegelschnitte umschriebene Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, so liegen die Schnittpunkte Q und R der gegenüberliegenden Seiten in unendlicher Entfernung, daher ist der Schnittpunkt P der Diagonalen des Parallelogramms als Pol der unendlich fernen Geraden QR zugleich der Mittelpunkt der Curve. Von den Diagonalen KP und LP haben wir für den allgemeinen Fall bereits nachgewiesen, dass sie einander conjugirt sind, daher müssen es auch die Diagonalen des umschriebenen Parallelogramms sein, und nachdem letztere durch den Curvenmittelpunkt gehen, so sind sie conjugirte Durchmesser.

Aus der Betrachtung der Figur 45 oder 46 ergibt sich auch, wenn man annimmt, dass die Punkte K und L, in denen sich je zwei gegenüberliegende Seiten des eingeschriebenen Vierecks $EGFH$ schneiden, in unendlicher Entfernung liegen:

42. **Die Seiten eines jeden einem Kegelschnitte eingeschriebenen Parallelogrammes sind parallel zu zwei conjugirten Durchmessern. Die Diagonalen desselben schneiden sich im Mittelpunkte der Curve.**

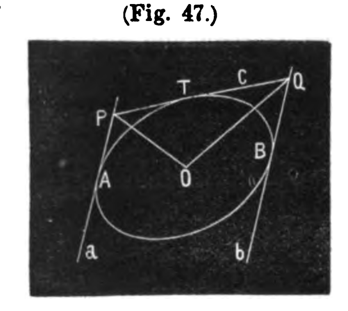
Dieser Satz kann auch in folgender Weise ausgedrückt werden; er repräsentirt dann einen speciellen Fall des allgemeinen Satzes 34, 2. Abschnitt:

Zwei Sehnen, welche irgend einen Punkt eines Kegelschnittes mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, sind parallel zu zwei conjugirten Durchmessern dieses Kegelschnittes.

Sind a und b (Fig. 47) zwei beliebige parallele Tangenten eines Kegelschnittes, welche von einer dritten Tangente c in den Punkten P und Q geschnitten werden, so kann man sich vorstellen, letztere Punkte seien Ecken eines dem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes. Die Halbmesser OP und OQ müssen demnach einander conjugirt sein. (Satz 41, 2. Abschnitt). Lässt man die parallelen Tangenten ihre Lage ändern, während c fest bleibt,

so bilden je zwei Punkte P und Q entsprechende Punkte einer involutorischen Reihe, deren Träger c ist. Denn diese Reihe entsteht durch den Schnitt des involutorischen Strahlenbüschels, welchen die conjugirten Halbmesser bilden, mit der Tangente c. (Satz 33, 2. Abschnitt). Wie leicht einzusehen, ist der Berührungspunkt T von c zugleich das Involutionscentrum, da dem Punkte T ein unendlich ferner Punkt entspricht. $PT \cdot TQ$ ist somit eine constante Grösse, welche Lage auch a und b haben mögen. Für den Fall als a und b zu jenem Durchmesser parallel sind, welcher der Tangente c conjugirt ist, wird $PT = TQ$, es gilt also der Satz:

(Fig. 47.)



43. Das Product der zwei Stücke, welche zwei veränderliche parallele Tangenten auf einer beliebigen festen Tangente eines Kegelschnittes vom Berührungspunkte der letzteren aus gemessen, abschneiden, ist gleich dem Quadrate des der festen Tangente parallelen Halbmessers.

Denkt man sich a und b fest, die Tangente c aber veränderlich, so entstehen durch die Punkte P und Q zwei projectivische Punktreihen auf a und b, deren Gegenpunkte die Berührungspunkte von a und b sind. Es ist somit das Product $AP \cdot BQ$ für alle Lagen von c constant und gleich dem Quadrate des zu a und b parallelen Halbmessers. Daraus ergibt sich:

44. Das Product der zwei Stücke, welche eine veränderliche Tangente auf irgend zwei parallelen festen Tagenten eines Kegelschnittes, vom Berührungspunkte der letzteren aus gemessen, abschneiden, ist gleich dem Quadrate des zu den festen Tangenten parallelen Halbmessers.

Aus dem Umstande, dass der Pol eines jeden Durchmessers in unendlicher Entfernung gelegen ist, folgt, dass die Polaren aller Punkte eines Durchmessers unter einander parallel sind. Zieht man demnach aus beliebig vielen Punkten eines Durchmessers je ein Tangentenpaar an den Kegelschnitt und verbindet dessen Berührungspunkte, so erhält man eine Reihe paralleler Sehnen der Curve. Jede derselben wird von dem erwähnten Durchmesser halbirt. Daraus kann man schliessen, dass die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes zweier beliebiger Tangenten eines Kegelschnittes mit dem Halbirungspunkte der Berührungssehne dieser beiden Tangenten jener Durchmesser der Curve sein muss, welcher der Berührungssehne conjugirt ist. —

45. Die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers und irgend einer ihm conjugirten Sehne bilden vier harmonische Punkte des Kegelschnittes.

Dies ist leicht einzusehen, wenn man sich erinnert, dass die Berührungspunkte eines Tangentenpaares und die Endpunkte irgend einer durch den Schnittpunkt dieser Tangenten gehenden Sehne immer vier harmonische Punkte des Kegelschnittes sind. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden sich nämlich im Pole des letzteren; gegen diesen Pol convergirt aber auch jede Sehne, welche dem Durchmesser conjugirt ist, es erscheint somit obiger Satz gerechtfertigt.

Alle Paare conjugirter Durchmesser bilden sich entsprechende Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels (Satz 33, 2. Abschnitt). Da nun jeder involutorische Büschel zwei oder unendlich viele auf einander senkrecht stehende, sich entsprechende Strahlen hat (Satz 55, 1. Abschnitt), so gibt es unter allen Paaren conjugirter Durchmesser entweder nur ein Paar oder unendlich viele auf einander senkrecht stehende Durchmesser.

Jeder von zwei auf einander senkrecht stehenden conjugirten Durchmessern wird eine Axe des Kegelschnittes genannt. Der Fall, in welchem unendlich viele Axen vorhanden sind, ist ein specieller und tritt nur dann ein, wenn der durch die conjugirten Durchmesser gebildete involutorische Büschel aus zwei congruenten Büscheln besteht. (Satz 55, 1. Abschnitt). Wie leicht einzusehen, kann ein Kegelschnitt mit unendlich vielen Paaren von Axen nur ein Kreis sein.

Die Endpunkte der Axen nennt man Scheitelpunkte oder Scheitel des Kegelschnittes.

Der Pol einer Geraden, die einen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, ergibt sich bekanntlich im Durchschnitte der Tangenten, welche die Curve in diesen zwei Punkten berühren, es muss also der Durchschnitt jener zwei Tangenten, welche die Hyperbel in ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden berühren, der Pol der letzteren Geraden, nämlich der Mittelpunkt sein. Diese beiden Tangenten heissen die Asymptoten der Hyperbel; wir können also sagen:

Die Asymptoten einer Hyperbel schneiden sich im Mittelpunkte der Curve.

Aus dem Umstande, dass bei der Hyperbel zwei Tangenten durch den Mittelpunkt gehen, folgt, dass der Mittelpunkt der Hyperbel ausserhalb der Curve liegt. Bei der Ellipse befindet sich der Mittelpunkt innerhalb, da seine Polare ganz ausserhalb der Curve gelegen ist und bei der Parabel liegt der Mittelpunkt in unendlicher Entfernung; er ist nämlich jener Punkt, in welchem die Curve von der unendlich fernen Geraden tangirt wird. Der Berührungspunkt einer Tangente ist ja immer zugleich ihr Pol.

Die unendlich grosse Entfernung des Mittelpunktes einer Parabel hat zur Folge, dass alle Durchmesser dieser Curve untereinander parallel sind. Sie convergiren gegen den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden mit der Parabel.

Bekanntlich sind die Doppelstrahlen eines durch conjugirte Gerade gebildeten involutorischen Strahlenbüschels nichts anderes als die Tangenten, welche von dem Mittelpunkte des Büschels an den Kegelschnitt gezogen werden können. Daraus folgt:

Die Asymptoten eines Kegelschnittes sind die (reellen oder imaginären) Doppelstrahlen des von den conjugirten Durchmessern gebildeten involutorischen Strahlenbüschels.

Aus dem Vorhandensein von reellen Asymptoten kann man schliessen, dass dieser involutorische Büschel entgegengesetzt verläuft. (Sätze 53, 54, 1. Abschnitt).

Bei der Ellipse sind keine durch den Mittelpunkt gehenden reellen Tangenten möglich, daher kann man behaupten, dass der von den conjugirten Durchmessern einer Ellipse gebildete involutorische Strahlenbüschel einstimmig verläuft und dass die Asymptoten einer Ellipse imaginär sind.

Für den Kreis gilt dasselbe, wie für die Ellipse. Bemerkenswerth ist jedoch, dass in jedem involutorischen Strahlenbüschel, welcher von den conjugirten Durchmessern eines Kreises gebildet wird, je zwei entsprechende Strahlen auf einander senkrecht stehen. Liegen daher zwei Kreise in derselben Ebene, so ergeben sich auf der unendlich fernen Geraden dieser Ebene als Schnitte mit den zwei von den Durchmessern der Kreise gebildeten involutorischen Strahlenbüschel S und S_1 zwei Punktreihen R und R_1, welche identisch sein müssen. Denn jedem in R und R_1 zugleich gelegenen Schnittpunkte zweier (paralleler) Strahlen von S und S_1 entspricht ein ebenfalls in beiden Reihen zugleich befindlicher Punkt, nämlich der Durchschnitt jener Strahlen, welche auf den ersteren zwei Strahlen senkrecht stehen. Aus dem Umstande, dass R und R_1 nur eine Reihe bilden, folgt, dass auch ihre imaginären Doppelpunkte D und D' coincidiren und dass, nachdem diese Punkte die unendlich fernen Punkte der imaginären Asymptoten beider Kreise sind, D und D' den zwei Kreisen zugleich angehören. Hieraus ergibt sich ferner, dass alle in ein und derselben Ebene befindliche Kreise zwei unendlich ferne imaginäre Punkte gemein haben. Man nennt diese Punkte unendlich ferne imaginäre Kreispunkte.

Nachdem die aus dem Mittelpunkte einer Parabel an diese Curve gezogenen Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so kann man sagen: Die Asymptoten einer Parabel liegen in unendlicher Entfernung.

Die Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels trennen bekanntlich zwei sich entsprechende Strahlen des letzteren harmonisch; aus dem Satze 33, 2. Abschnitt, folgt somit:

46. Je zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnittes werden durch dessen Asymptoten (reellen oder imaginären) harmonisch getrennt.

Hieraus ergibt sich, dass von zwei conjugirten Durchmessern einer Hyperbel der eine die Curve schneidet, der andere nicht.

Diesen Satz kann man offenbar in folgender Weise umkehren: Werden zwei Durchmesser eines Kegelschnittes durch die Asymptoten des letzteren harmonisch getrennt, so sind sie einander conjugirt. Zwei Durchmesser, welche die von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel halbiren, bilden mit den Asymptoten nach Satz 35, 1. Abschnitt, einen harmonischen Strahlenbüschel, sie sind also conjugirt und da dieselben auch auf einander senkrecht stehen, so können sie nur die Axen des Kegelschnittes sein. Daraus folgt:

47. Die Axen eines Kegelschnittes halbiren die von seinen Asymptoten gebildeten Winkel.

In dem Falle, wenn die Asymptoten auf einander senkrecht stehen, halbiren sie jeden von zwei conjugirten Durchmessern gebildeten Winkel, wie nach den vorausgehenden Erklärungen leicht einzusehen ist. — Eine Hyperbel, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen, wird bekanntlich eine gleichseitige genannt. —

Ist ein Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes so gelegen, dass alle durch ihn gehenden Paare conjugirter Geraden auf einander senkrecht stehen, so nennt man diesen Punkt einen Brennpunkt des Kegelschnittes. Aus dieser Erklärung folgt, dass ein Brennpunkt nur innerhalb des Kegelschnittes liegen kann, denn ein involutorischer Büschel, bei welchem je zwei sich entsprechende Strahlen aufeinander senkrecht stehen, ist immer einstimmig verlaufend und hat somit keine reellen Doppelstrahlen; ein Brennpunkt muss demnach so gelegen sein, dass sich aus demselben keine reellen Tangenten an die Curve ziehen lassen, nämlich innerhalb der Curve. Ein Brennpunkt kann ferner nur auf einer Axe liegen, denn nimmt man an, F sei irgend ein ausserhalb der Axen gelegener Punkt der Curvenebene, so bilden der durch F gehende Durchmesser d und eine durch F gezogene Gerade, welche dem conjugirten Durchmesser von d parallel ist, zwei conjugirte Strahlen. Letztere stehen nun nicht senkrecht aufeinander, denn sonst müssten auch die beiden conjugirten Durchmesser einen rechten Winkel bilden, was nur bei Axen der Fall ist.

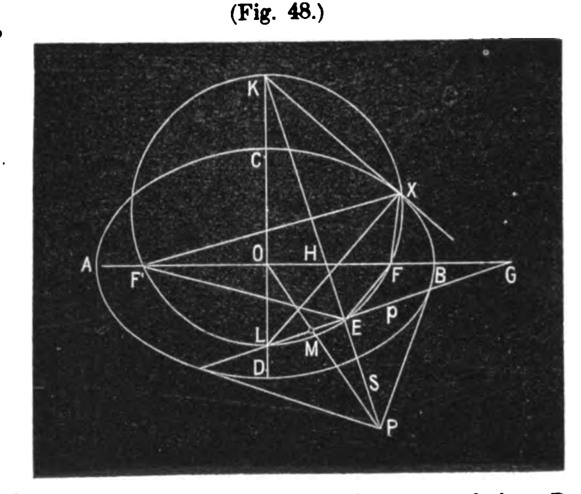
Die Brennpunkte ergeben sich als Doppelpunkte einer involutorischen Reihe, deren Träger eine der Axen ist, wie aus folgenden Betrachtungen hervorgeht:

In Fig. 48 sei P irgend ein Punkt der Ebene eines Kegelschnittes und p seine Polare. Die von P auf p gefällte Senkrechte nennen wir s, ihren Fusspunkt E, die Schnittpunkte von p und s mit der Axe AB seien beziehungsweise G und H, endlich bezeichnen wir die Schnittpunkte von p und s mit der andern Axe CD beziehungsweise durch L und K. Verbindet man P mit dem Mittelpunkte O des Kegelschnittes, so erhält man einen Durchmesser, welcher der Geraden p conjugirt ist, nachdem er durch ihren Pol hindurch geht. Es ist somit

jede zu p parallel gezogene Gerade dem Durchmesser OP conjugirt und der Pol einer jeden solchen Parallelen liegt auf OP.

Der Durchschnittspunkt M von p und OP ist dem Punkte P conjugirt; M und P bilden also nach Satz 33, 2. Abschnitt, ein Paar sich entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe, deren Träger OP ist. Je zwei entsprechende Punkte dieser Reihe werden erhalten, wenn man zu p eine Parallele zieht und den Pol derselben ermittelt. Letzterer ist der dem Durchschnitte von OP mit der genannten Parallelen entsprechende Punkt. — Der Kürze des Ausdruckes wegen nennen wir jede zu p parallel gezogene Gerade ebenfalls p, jeder Durchschnittspunkt einer solchen Geraden mit OP heisse M, jeder Pol einer Geraden p heisse P und durch s bezeichnen wir die aus irgend einem Punkte P auf p gefällte Senkrechte. — Da jeder Punkt M und der ihm conjugirte P ein Paar sich entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe sind, so bilden alle Punkte M eine Punktreihe, welche der von den Punkten P gebildeten projectivisch verwandt ist. Es muss also auch der aus den Geraden p bestehende Parallel-Strahlenbüschel S dem durch die Senkrechten s gebildeten Parallel-Strahlenbüschel S_1 projectivisch verwandt sein, nachdem S gegen die Reihe M und S_1 gegen die Reihe P perspectivisch liegt. Die Strahlenbüschel S und S_1 werden nun von der Axe AB in conjectivischen Punktreihen geschnitten. Die eine Reihe wird durch alle Punkte G, die andere durch alle Punkte H gebildet. Diese beiden Reihen liegen involutorisch, nachdem ihre Gegenpunkte im Mittelpunkte O des Kegelschnittes coincidiren. Dies ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass sobald p, also auch G in unendliche Entfernung kommt, der Punkt P, also auch H mit O zusammenfällt, und dass wenn s, also auch H unendlich ferne liegt, die Gerade p ein Durchmesser wird und AB in O schneidet.

(Fig. 48.)



Dasselbe was wir für die auf AB liegenden Punktreihen nachgewiesen haben, gilt auch für die auf der andern Axe CD gelegenen, welche durch die Punkte K und L zu Stande kommen, in denen CD von den Geraden p und s geschnitten wird. Auch die Axe CD ist der Träger einer involutorischen Reihe, deren Centralpunkt O ist. Von den in Rede stehenden involutorischen Reihen, welche auf AB und CD zu Stande kommen, ist nun stets eine entgegen-

gesetzt, die andere einstimmig verlaufend, wie aus der Lage der Punkte *G*, *H* und *K*, *L* gegen den Centralpunkt *O* beider Reihen leicht zu erkennen, ist. Man hat nämlich zwei rechte Winkel *COB* und *KEL*, deren Schenkel sich in *G*, *H*, *K* und *L* schneiden; mögen nun diese rechten Winkel wie immer angenommen werden, stets liegen entweder *K* und *L* oder *G* und *H* zu verschiedenen Seiten von *O* und niemals können beide Punktpaare zugleich zu verschiedenen Seiten, oder zugleich auf derselben Seite von *O* liegen. Daraus folgt nach Satz 49, 1. Abschnitt, dass eine, aber auch nur eine von den auf *AB* und *CD* gelegenen involutorischen Reihen reelle Doppelpunkte hat. — In unserer Figur ist es jene, deren Träger *AB* bildet. Diese Doppelpunkte sind Brennpunkte des Kegelschnittes. In ihnen vereinigen sich nämlich zwei entsprechende Punkte *G* und *H*, sie sind also die Durchschnittspunkte zweier sich entsprechender Geraden *p* und *s* und da diese Geraden einander conjugirt sind und aufeinander senkrecht stehen, so gehen durch einen solchen Doppelpunkt ausser der Axe und einer ihr conjugirten Sehne noch ein zweites Paar von aufeinander senkrecht stehenden Geraden. Wenn nun in einem involutorischen Strahlenbüschel zwei Paare von aufeinander senkrecht stehenden conjugirte Strahlen vorkommen, so müssen alle Paare conjugirter Strahlen rechte Winkel bilden (Satz 55, 1. Abschnitt), woraus folgt, dass die in Rede stehenden Doppelpunkte zugleich Brennpunkte sind.

Mit Rücksicht auf obige Untersuchungen und auf den Umstand, dass in jeder involutorischen Reihe die Doppelpunkte gleich weit vom Centralpunkte abstehen, ergibt sich der Satz:

48. Jeder Kegelschnitt hat zwei reelle Brennpunkte; dieselben liegen auf einer Axe innerhalb der Curve und sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

Denkt man sich den Mittelpunkt eines Kegelschnittes von dem einen Brennpunkte immer mehr und mehr entfernt, bis er in unendliche Entfernung gelangt, so muss auch der zweite Brennpunkt dem eben aufgestellten Satze zufolge in unendliche Entfernung zu liegen kommen. Da nun ein Kegelschnitt mit unendlich fernem Mittelpunkte eine Parabel ist, so ergibt sich, dass bei der Parabel einer der Brennpunkte in unendlicher Entfernung liegt.

Jene Axe, in welcher die Brennpunkte liegen, nennt man Hauptaxe, die andere Nebenaxe. Die Entfernung der Brennpunkte von einander heisst die lineare Excentricität, während man unter der numerischen Excentricität das Verhältniss der Entfernung der Brennpunkte zur Länge der Hauptaxe versteht. Jede Gerade, welche einen Curvenpunkt mit einem Brennpunkte verbindet, wird ein Leitstrahl genannt; die durch einen Brennpunkt gehende Sehne, welche senkrecht auf der Hauptaxe steht, heisst Parameter und die Polare eines Brennpunktes nennt man eine Directrix oder Leitlinie, des Kegelschnittes. Nachdem die Hauptaxe der Directrix con-

jugirt ist, so **stehen Hauptaxe und Directrix auf einander senkrecht.**

Wir kehren nun wieder zur Betrachtung der Figur 47 zurück.

Sind F und F' die Doppelpunkte der involutorischen Reihe, welche durch G und H zu Stande kommt, also die Brennpunkte, so hat man nach Satz 17, 1. Abschnitt,

$$OG \,.\, OH = OF^2.$$

Ebenso ist das Product der Abstände OK und OL gleich einer bestimmten Grösse, welche für alle sich entsprechenden Punkte der auf CD gelegenen involutorischen Reihe constant bleibt. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke GOL und KOH ergibt sich nun:

$$\frac{OG}{OL} = \frac{OK}{OH},$$

also

$$OG \,.\, OH = OK \,.\, OL\,,$$

woraus mit Rücksicht auf obige Gleichung folgt:

$$OK \,.\, OL = OF^2.$$

Letztere Gleichung zeigt, dass **die Schnittpunkte eines über KL als Durchmesser beschriebenen Kreises mit der Hauptaxe AB die Brennpunkte des Kegelschnittes sein müssen.** Denn das Quadrat der halben Entfernung dieser Schnittpunkte ist gleich $OK.\ OL$, also gleich OF^2.

Die Brennpunkte können demnach in folgender Weise ermittelt werden: Man zieht irgend eine Gerade p in der Ebene des Kegelschnittes, bestimmt ihren Pol P, fällt von P eine Senkrechte s auf p und sucht die Schnittpunkte K und L von p und s mit jener Axe, auf welcher diese Schnittpunkte zu verschiedenen Seiten des Mittelpunktes liegen. Der über KL als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet dann die andere Axe in den beiden Brennpunkten.

Betrachtet man irgend einen Punkt X des Kreises KFL als Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, dessen entsprechende Strahlen conjugirte Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt sind, und bestimmt die Normalstrahlen dieses Büschels, so gehen letztere durch die Punkte K und L. Denkt man sich nämlich die Normalstrahlen bestimmt und einen Kreis gezeichnet, welcher durch die Schnittpunkte dieser Strahlen mit CD hindurchgeht, und seinen Mittelpunkt in CD hat, so muss derselbe durch F gehen, wie soeben bewiesen wurde. Der in Rede stehende Kreis geht aber auch durch X, er muss daher mit dem Kreise KFL identisch sein, nachdem es nur einen Kreis gibt, der durch X und F geht, und seinen Mittelpunkt in CD hat. Hieraus folgt, dass die durch X gehenden Normalstrahlen die Axe CD in K und L schneiden.

Da der Kreis KFL offenbar als ein beliebiger durch F und F' gehender Kreis betrachtet werden kann, so ergibt sich der Satz:

49. **Verbindet man die Schnittpunkte irgend eines durch die beiden Brennpunkte gehenden Kreises und der Nebenaxe mit einem beliebigen Punkte dieses Kreises, so sind diese Verbindungslinien die Normalstrahlen jenes involutorischen Büschels, dessen entsprechende Strahlen je zwei in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirte Gerade bilden.**

Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht für jeden beliebigen Punkt X der Ebene des Kegelschnittes die zugehörigen Normalstrahlen construiren. Man beschreibt einen Kreis, welcher durch X und die beiden Brennpunkte geht und verbindet X mit den Schnittpunkten des so erhaltenen Kreises und der Nebenaxe. Die sich ergebenden Verbindungslinien sind die gesuchten Normalstrahlen.

Nachdem jede Tangente eines Kegelschnittes allen durch ihren Berührungspunkt gehenden Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt ist, so bilden irgend eine Tangente und die auf ihr senkrecht stehende Gerade, welche durch den Berührungspunkt geht, die Normalstrahlen jenes involutorischen Büschels, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt ist. Jede solche Gerade, die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkte senkrecht steht, nennt man bekanntlich eine Normale, man kann daher mit Rücksicht auf obigen Satz behaupten:

50. **Tangente und Normale für irgend einen Punkt X eines Kegelschnittes werden erhalten, wenn man die Schnittpunkte eines durch X und die Brennpunkte gehenden Kreises und der Nebenaxe mit X verbindet.**

Der Schnittpunkt E der Geraden p und s kann als ein ganz beliebig in der Curvenebene gewählter Punkt betrachtet werden. Denkt man sich denselben mit allen Punkten der auf AB gelegenen involutorischen Reihe, in welcher F und F' die Doppelpunkte sind, verbunden, so hat man einen involutorischen Strahlenbüschel. Die Normalstrahlen desselben sind EG und EH; seine Doppelstrahlen werden durch die Verbindungslinien des Punktes E mit F und F' gebildet. Die von den Doppelstrahlen eines involutorischen Büschels gebildeten Winkel werden nun bekanntlich durch die Normalstrahlen halbirt, es gilt somit der Satz:

51. **Die Winkel, deren Schenkel von zwei Geraden gebildet werden, welche irgend einen Punkt E (Fig. 47) der Ebene eines Kegelschnittes mit den Brennpunkten des letzteren verbinden, werden durch die Normalstrahlen jenes involutorischen Büschels halbirt, der seinen Mittelpunkt in E hat und dessen entsprechende Strahlen conjugirte Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt sind.**

Für den Fall, als der Punkt E in der Curve gelegen ist folgt hieraus:

52. **Tangente und Normale für irgend einen Punkt eines Kegelschnittes halbiren die Winkel, welche von den beiden Leitstrahlen dieses Punktes gebildet werden.**

Durch diesen Satz erscheint die Bezeichnung „Brennpunkt“ gerechtfertigt. Wird nämlich ein Kegelschnitt von Licht oder Wärmestrahlen getroffen, welche in seiner Ebene liegen und gegen einen der Brennpunkte convergiren, so reflectirt der Kegelschnitt alle diese Strahlen gegen den zweiten Brennpunkt. —

Zieht man durch einen Brennpunkt irgend eine Sehne und construirt in den Endpunkten derselben die Tangenten, so schneiden sich letztere in einem Punkte, welcher der diesem Brennpunkte zugehörigen Leitlinie angehört (Satz 30, 2. Abschnitt). Da nun die Gerade, welche den Schnittpunkt der zwei Tangenten mit dem Brennpunkte verbindet, der erwähnten Sehne conjugirt ist, so muss diese Verbindungslinie auf der Sehne senkrecht stehen, nachdem zwei durch einen Brennpunkt gehende conjugirte Gerade stets einen rechten Winkel bilden. Man hat also den Satz:

53. Zwei durch denselben Brennpunkt gehende Gerade, wovon die eine durch den Berührungspunkt irgend einer Tangente des Kegelschnittes, die andere durch den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Polaren des genannten Brennpunktes geht, stehen aufeinander senkrecht.

Die Tangenten, welche aus irgend einem Punkte M an einen Kegelschnitt gezogen werden können, bilden die Doppelstrahlen eines involutorischen Büschels, dessen entsprechende Strahlen conjugirte Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt sind. Die Normalstrahlen eines solchen Büschels, wie jedes involutorischen Büschels überhaupt, halbiren den von den Doppelstrahlen gebildeten Winkel; nach Satz 51, 2. Abschnitt, halbiren die Normalstrahlen aber auch jene Winkel, deren Schenkel die Verbindungslinien des Punktes M mit den Brennpunkten sind, wir können demnach behaupten:

54. Die Halbirungslinien der von zwei beliebigen Tangenten eines Kegelschnittes gebildeten Winkel halbiren auch jene Winkel, deren Schenkel die Verbindungslinien des Durchschnittes dieser Tangenten mit den Brennpunkten sind. Der Winkel, welchen die eine Tangente mit der einen Verbindungslinie einschliesst, ist daher ebenso gross als der von der andern Tangente und der andern Verbindungslinie gebildete Winkel.

Denken wir uns die eine Tangente und die beiden Brennpunkte als gegeben und nehmen wir irgend einen Punkt M dieser Tangente als Schnittpunkt der zweiten Tangente an, so ergibt sich letztere nach vorstehendem Satze in sehr einfacher Weise. Für jeden Punkt M erhält man sonach eine neue Tangente, welche durch die Angaben unzweideutig bestimmt erscheint. Daraus folgt:

55. Ein Kegelschnitt ist unzweideutig bestimmt, wenn seine Brennpunkte und eine Tangente desselben gegeben sind.

Ist statt der Tangente ein Curvenpunkt gegeben, so erscheint der Kegelschnitt nicht vollkommen bestimmt, denn verbindet man den gegebenen Punkt

mit den Brennpunkten und halbirt die dadurch erhaltenen Winkel, so bilden nach Satz 50, 2. Abschnitt, diese Halbirungslinien Tangente und Normale des zu construirenden Kegelschnittes. Es bleibt jedoch zweifelhaft, welche von den Halbirungslinien Tangente und welche die Normale bildet. Wir können daraus schliessen:

56. Durch die Brennpunkte und einen Punkt des Umfanges eines Kegelschnittes ist letzterer nicht vollkommen bestimmt. Es entsprechen diesen Angaben zwei verschiedene Kegelschnitte, welche sich rechtwinklig durchschneiden.

Der Durchschnittspunkt beider Kegelschnitte ist nämlich der gegebene Punkt und die Tangente des einen Kegelschnittes in diesem Punkte ist eine Normale des anderen.

Zwei in derselben Ebene liegende Kegelschnitte, deren Brennpunkte coincidiren nennt man hommofocale oder confocale Kegelschnitte. Aus dem eben aufgestellten Satze folgt:

57. Haben zwei confocale Kegelschnitte einen Punkt gemein, so schneiden sie sich rechtwinklig.

Zwei sich schneidende confocale Kegelschnitte können nicht zugleich Ellipsen oder Hyperbeln sein.

Da nämlich Tangente und Normale den Winkel der von ihrem Durchschnittspunkte ausgehenden Leitstrahlen harmonisch theilen, so werden die Schnittpunkte der Hauptaxe mit der Tangente und Normale durch die Brennpunkte getrennt und es können somit niemals beide Schnittpunkte zugleich ausserhalb oder zwischen den Brennpunkten liegen. Dies müsste aber der Fall sein, wenn die beiden sich schneidenden confocalen Kegelschnitte zugleich Ellipsen oder Hyperbeln wären. Denn bei der Ellipse liegen die Schnittpunkte aller Tangenten mit der Hauptaxe ausserhalb der von den Brennpunkten begrenzten endlichen Strecke, bei der Hyperbel innerhalb derselben.

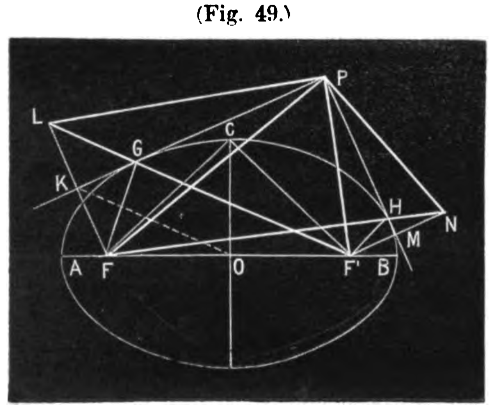
Um sich davon zu überzeugen, hat man zu berücksichtigen, dass der Mittelpunkt bei der Ellipse innerhalb, bei der Hyperbel ausserhalb der Curve gelegen ist, während die Brennpunkte sich stets innerhalb befinden, wie oben gezeigt wurde.

58. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Curvenpunktes, gleich der Länge der Hauptaxe.

Um diesen Satz insoferne er sich auf die Ellipse bezieht nachzuweisen, betrachten wir die Fig. 49. In derselben sind A, B die Endpunkte der Hauptaxe, F, F' die Brennpunkte und G, H zwei beliebige Punkte des Umfanges einer Ellipse. Verbindet man G mit F und F', trägt von G aus auf dem verlängerten Leitstrahl GF' das Stück $GL = GF$ auf und verbindet L mit F, so erhält man ein gleichschenkeliges Dreieck FGL, dessen Höhe GK die Tangente im Punkte G sein muss. Denn die Winkel, welche GK mit den Leitstrahlen FG

und $F'G$ einschliesst, sind einander gleich und der Schnittpunkt von GK mit der Hauptaxe liegt ausserhalb der von den Brennpunkten begrenzten endlichen Strecke. Ganz dieselben Beziehungen finden bezüglich des Punktes H statt. Die Tangente in H coincidirt mit der Höhe HM jenes gleichschenkeligen Dreieckes HNF', welches man erhält, wenn man FH über H hinaus um das Stück $F'H$ verlängert und den sich ergebenden Endpunkt N mit F' verbindet. Ist P der Durchschnittspunkt der Tangenten in G und H und verbindet man P mit den Punkten L, F, F' und N, so ergeben sich zwei gleichschenkelige Dreiecke, nämlich PLF und $PF'N$. Dieselben sind einander ähnlich, da nach Satz 54 die Winkel FPK und $F'PM$, also auch die Winkel FPL und $F'PN$ einander gleich sind. Daraus ergibt sich, dass die Dreiecke FPN und $F'PL$ congruent sein müssen, nachdem $PF = PL$, $PF' = PN$ und Winkel $LPF' = FPN$ ist.

(Fig. 49.)



Aus der Gleichheit der Seiten $F'L$ und FN dieser Dreiecke folgt nun, weil wir $GL = GF$ und $HN = HF'$ gemacht haben:

$$GF + GF' = HF + HF',$$

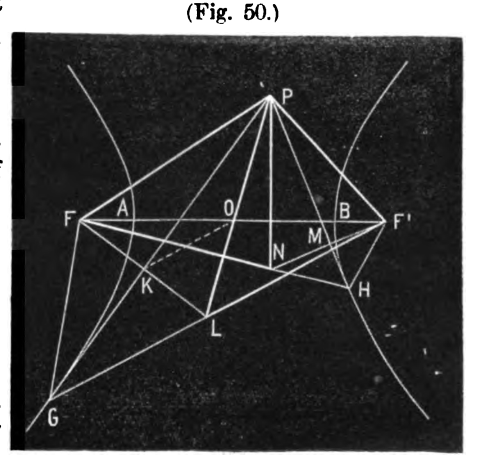
d. h. die Summe der Leitstrahlen der beliebig gewählten Punkte G und H sind einander gleich.

Denkt man sich G unverändert, während man H die Ellipse durchlaufen lässt, so wird klar, dass die Summe der Leitstrahlen für jeden Ellipsenpunkt eine constante Grösse haben muss. D a s s d i e s e G r ö s s e g l e i c h d e r L ä n g e d e r H a u p t a x e i s t, sieht man leicht ein, wenn angenommen wird, H befinde sich in einem Endpunkte der Hauptaxe.

Der Beweis für jenen Theil des obigen Satzes, welcher sich auf die Hyperbel bezieht, kann in folgender Weise gegeben werden:

In Fig. 50 sind A, B die Endpunkte der Hauptaxe, F, F' die Brennpunkte und G, H zwei beliebige Punkte des Umfanges einer Hyperbel. Verbindet man G mit F und F', trägt von G aus auf dem Leitstrahle GF'

(Fig. 50.)



gegen F' hin das Stück $GL = GF$ auf, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe GK die Tangente im Punkte G sein muss. Denn die Winkel, welche GK mit den Leitstrahlen FG und $F'G$ einschliesst, sind einander gleich und der Schnittpunkt von GK mit der Hauptaxe liegt innerhalb der von den Brennpunkten begrenzten endlichen Strecke. — Ganz analoge Beziehungen finden bezüglich des Punktes H statt. Die Tangente in H coincidirt mit der Höhe jenes gleichschenkligen Dreieckes HNF', welches erhalten wird, wenn man auf FH von H aus gegen F hin das Stück $F'H$ aufträgt und den sich ergebenden Endpunkt N mit F' verbindet. Nennen wir den Schnittpunkt der in G und H berührenden Tangenten P, so lässt sich in derselben Weise wie bei der Ellipse zeigen, dass die Dreiecke FPN und $F'PL$ congruent sind, woraus folgt, $F'L = FN$, oder was dasselbe ist:

$$GF' - GF = HF - HF',$$

d. h. die Differenzen der Leitstrahlen der beliebig gewählten Punkte G und H sind einander gleich.

Stellt man sich vor, H durchlaufe die Hyperbel, während G an seiner Stelle bleibt, so ist leicht einzusehen, dass die Differenz der Leitstrahlen für jeden Punkt der Hyperbel eine constante Grösse haben muss. Dass diese Grösse gleich der Länge der Hauptaxe ist wird klar, wenn man annimmt, H falle mit A oder B zusammen. Der Satz 58 erscheint somit gerechtfertigt.

Aus der Betrachtung der Figuren 49 und 50 ergibt sich eine einfache Lösung folgender Aufgaben:

Es sollen an eine Ellipse oder Hyperbel jene Tangenten gezogen werden, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen.

Beschreibt man aus P mit dem Halbmesser PF einen Kreis und durchschneidet denselben durch einen zweiten aus F' mit dem Halbmesser AB beschriebenen, so ergibt sich den obigen Erklärungen zufolge der Punkt L; daher ist die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Halbirungspunkte K der Strecke FL eine der gesuchten Tangenten. Den Berührungspunkt G erhält man im Durchschnitte von PK mit LF'. — Wie man die zweite Tangente PM findet, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Auch die Lösung folgender Aufgabe ist mit Benützung der vorausgegangenen Erklärungen leicht zu finden:

Es sollen an eine Ellipse oder Hyperbel jene Tangenten construirt werden, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.

Fällt man von F auf die gegebene Gerade eine Senkrechte und durchschneidet letztere durch einen aus F' beschriebenen Kreis vom Halbmesser AB, so ergibt sich der Punkt L, u. s. w.

Verbindet man in Fig. 49 oder 50 den Mittelpunkt O mit K, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke FLF' und FKO, bei welchen die Seiten des einen

doppelt so gross sind als die ensprechenden des andern. Denn OK halbirt sowohl FF', als auch FL; man hat also $\frac{F'L}{2} = OK$. Nun ist aber $\frac{F'L}{2} = OA$, folglich liegt der Punkt K in einem aus dem Mittelpunkte O beschriebenen Kreise, dessen Halbmesser gleich der halben Hauptaxe ist. Diesen Kreis nennt man den der Ellipse, beziehungsweise der Hyperbel umschriebenen Kreis. Nachdem K der Fusspunkt jener Senkrechten ist, welche aus einem Brennpunkte F auf eine beliebige Tangente PK gefällt wurde, so kann man behaupten:

59. Die Fusspunkte der aus den Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten der Curve gefällten Senkrechten liegen auf dem umschriebenen Kreise.

Aus der Congruenz der Dreiecke FPN und $F'PL$ (Fig. 49 und 50) folgt, dass die Winkel PLF' und PFN einander gleich sind. Nun ist aber $\sphericalangle PLF' = PFG$, man hat also

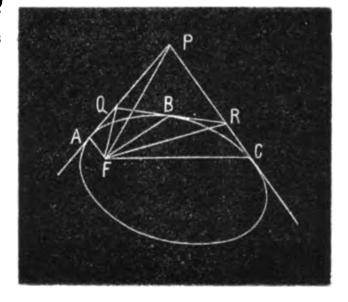
$$\sphericalangle PFG = PFN.$$

Dieses Resultat gilt auch, wenn F' sich von F immer mehr entfernt und in unendliche Entfernung gelangt, d. h. auch wenn der Kegelschnitt in eine Parabel übergeht. Wir können somit behaupten: Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Durchschnittspunkte zweier beliebiger Tangenten eines Kegelschnittes halbirt den Winkel, welcher von den Verbindungslinien dieses Brennpunktes mit den Berührungspunkten der beiden Tangenten gebildet wird.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ergibt sich aus folgenden Betrachtungen:

In Fig. 51 sei F ein Brennpunkt irgend eines Kegelschnittes. Letzterer wird von zwei sich in P schneidenden Tangenten in den Punkten A und C berührt; eine dritte Tangente, deren Berührungspunkt B ist, schneidet die beiden ersteren in Q und R. Die Punkte A, B, C, P, Q, R, sind alle durch Gerade mit F verbunden. Nun ist

(Fig. 51.)



$$\sphericalangle QFR = QFB + BFR$$

und da dem zuletzt aufgestellten Satze zufolge

$$\sphericalangle QFB = \tfrac{1}{2} AFB,$$

ferner

$$\sphericalangle BFR = \tfrac{1}{2} BFC$$

ist, so hat man $\sphericalangle QFR = \frac{1}{2} AFC = AFP = CFP$, woraus wir schliessen:

60. Sind a und b zwei feste Tangenten eines Kegelschnittes, welche von einer dritten veränderlichen Tangente in den Punkten Q und R geschnitten werden, so hat der Winkel, welcher durch die Verbindungslinien der Punkte Q und R mit einem Brennpunkte F gebildet wird,

eine constante Grösse. Dieser Winkel ist nämlich halb so gross als jener, der von den Verbindungslinien des Brennpunktes F mit den Berührungspunkten der Tangenten a und b gebildet wird.

Construirt man über der linearen Excentricität einer Ellipse (Fig. 49) als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck FCF', bei welchem jede der gleichen Seiten gleich der halben Hauptaxe ist, so coincidirt die Spitze C dieses Dreieckes mit einem Endpunkte der Nebenaxe, da die Gleichung besteht $CF + CF' = AB$. Nachdem nun die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreieckes CFO gleich OA ist, so hat man

$$OA^2 - OC^2 = OF^2, \text{ d. h.}$$

die Differenz der Quadrate der Halbaxen einer Ellipse ist gleich dem Quadrate der halben linearen Excentricität.

Die zuletzt aufgestellte Gleichung zeigt, dass bei der Ellipse die Hauptaxe immer grösser ist als die Nebenaxe, man nennt desshalb auch erstere die grosse, letztere die kleine Axe.

Wir haben bereits bemerkt, dass bei der Hyperbel von zwei conjugirten Durchmessern immer der eine die Curve in reellen Punkten schneidet, während dies bei dem andern nicht der Fall ist. Da die Hauptaxe einer Hyperbel von der Curve in reellen Punkten getroffen wird, so sind demnach die Durchschnittspunkte der Nebenaxe mit der Curve imaginär; es frägt sich nun, was man unter der Länge von Durchmessern einer Hyperbel versteht, welche die Curve nicht in reellen Punkten schneiden. Solche Durchmesser werden imaginäre oder besser uneigentliche Durchmesser genannt, zum Unterschiede von den reellen oder eigentlichen Durchmessern, deren Schnittpunkte mit der Curve reell sind. Unter der Länge eines uneigentlichen Durchmessers einer Hyperbel versteht man die Grösse des zwischen den Asymptoten gelegenen Stückes einer Tangente, welche diesem Durchmesser parallel ist. Die Länge der Nebenaxe einer Hyperbel ist daher gleich der Länge des zwischen den Asymptoten gelegenen Stückes einer Scheiteltangente (einer Tangente, welche den Kegelschnitt in einem seiner Scheitel berührt).

Sind A, B die Scheitel und F, F' die Brennpunkte einer Hyperbel (Fig. 52) gegeben, so kann man die Asympto ten wie folgt bestimmen. Man zeichnet den der Hyperbel umschriebenen Kreis, zieht an denselben von F aus eine Tangente und verbindet deren Berührungspunkt E mit dem Halbirungspunkte O der Hauptaxe AB. Diese Verbindungslinie bildet eine der Asymptoten. Die zweite ergibt sich, indem man durch O eine Gerade zieht, welche mit OA einen eben so grossen Winkel einschliesst als OE. Dass OE eine Tangente der Hyperbel sein muss geht aus dem Satze 59, 2. Abschnitt, hervor. Nachdem aber eine Tangente, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes geht, diesen in unendlicher Entfernung berührt, so ist OE eine Asymptote.

Ziehen wir im Scheitel A eine Tangente, deren Schnittpunkte mit den Asymptoten G und H heissen mögen, so wird GH selbstverständlich von A halbirt. AG ist also halb so lang als die Nebenaxe CD der Hyperbel. Im rechtwinkligen Dreiecke GOA ist nun

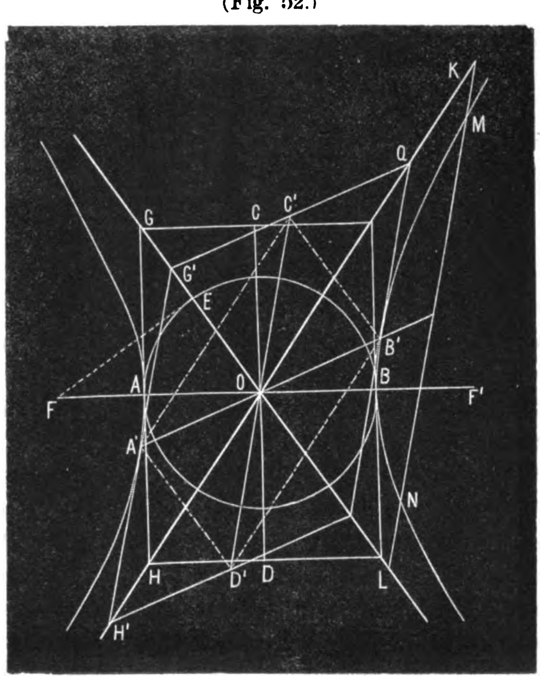
$$OA^2 + AG^2 = OG^2.$$

Da aber, wie aus der Congruenz der Dreiecke FEO und GOA hervorgeht $OG = OF$ ist, so hat man

$$OA^2 + OC^2 = OF^2, \text{ d. h.}$$

Die Summe der Quadrate der Halbaxen einer Hyperbel ist gleich dem Quadrate der halben linearen Excentricität.

(Fig. 52.)



Die Endpunkte C und D der Nebenaxe einer Hyperbel werden also auch erhalten, wenn man die in O auf AB errichtete Senkrechte mit einem aus A beschriebenen Kreise durchschneidet, dessen Halbmesser gleich OF ist.

Construirt man in irgend einem Punkte A' der Hyperbel die Tangente und zieht den zu ihr parallelen Durchmesser $C'D'$, so ist letzterer bekanntlich dem Durchmesser, welcher durch A' geht, conjugirt. Die Asymptoten bilden demnach mit den Geraden OA' und OC' einen harmonischen Strahlenbüschel (Satz 46, 2. Abschnitt). Da nun die Tangente in A' zum Strahle OC' parallel ist, so wird das zwischen den Asymptoten gelegene Stück $G'H'$ dieser Tangente vom Punkte A' halbirt. (Satz 33, 1. Abschnitt). Wir schliessen daraus:

61. **Das zwischen den Asymptoten einer Hyperbel gelegene Stück irgend einer Tangente dieser Curve wird von ihrem Berührungspunkte halbirt.**

Zieht man irgend eine zu $G'H'$ parallele Gerade, so wird das zwischen den Asymptoten gelegene Stück derselben KL, ebenfalls vom Durchmesser $A'B'$ halbirt. Dieser Durchmesser halbirt aber auch die Sehne MN, welche ein Stück der in Rede stehenden Geraden bildet, weil MN und $A'B'$ einander conjugirt sind. Daraus folgt, dass $KM = NL$ sein muss; es gilt somit der Satz:

62. **Auf jeder Secante einer Hyperbel sind die zwei Abschnitte, welche zwischen den Asymptoten und der Curve liegen, einander gleich.**

Denkt man sich die Tangente $G'H'$ veränderlich, so erzeugt sie auf den Asymptoten, da diese selbst Tangenten sind, zwei projectivische Punktreihen, deren Gegenpunkte im Mittelpunkte O coincidiren. Nach Satz 17, 1. Abschnitt, ist demnach das Product $OG'.\ OH'$ constant für alle Lagen der Tangente $G'H'$. Daraus folgt, weil $\frac{1}{2}\ OG'.\ OH'.\sin GOH$ gleich der Fläche des Dreieckes $G'OH'$ ist, der Satz:

63. **Das Dreieck, welches eine veränderliche Tangente einer Hyperbel zwischen den Asymptoten abschneidet, hat eine constante Grösse.**

Dieser Satz lässt uns schliessen, dass **der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes, dessen Diagonalen von den Asymptoten gebildet werden, und bei welchem zwei gegenüberliegende Seiten die Hyperbel berühren, gleich dem Producte der beiden Axen ist.**

Verbindet man die Endpunkte $A'B'C'D'$ zweier conjugirter Durchmesser einer Hyperbel derart, dass ein Parallelogramm entsteht, so sind die Seiten des letzteren, wie man sich leicht überzeugen kann, parallel zu den Asymptoten und der Flächeninhalt desselben ist ebenfalls constant, welche Lage auch die beiden conjugirten Durchmesser haben mögen. Dies folgt aus dem Umstande, dass die Fläche des Dreieckes $A'OC'$ immer halb so gross ist, als jene des Dreieckes $G'OH'$. Wir können also behaupten:

64. **Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes, dessen Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser einer Hyperbel bilden, ist gleich dem Flächeninhalte jenes Rhombus, dessen Diagonalen die beiden Axen dieser Hyperbel sind.**

Die durch G' zu $A'B'$ parallel gezogene Gerade schneidet die Asymptote OH in einem Punkte Q, welcher von O ebenso weit absteht, als H' von O. Nimmt man an die Tangente $G'H'$ sei veränderlich, so kommen demnach durch Q und H' zwei congruente Punktreihen zu Stande. Nachdem nun die Reihe G' der Reihe H' projectivisch verwandt ist, so sind auch die Reihen G' und Q projectivisch verwandt und die veränderliche Gerade $G'Q$ umhüllt somit einen

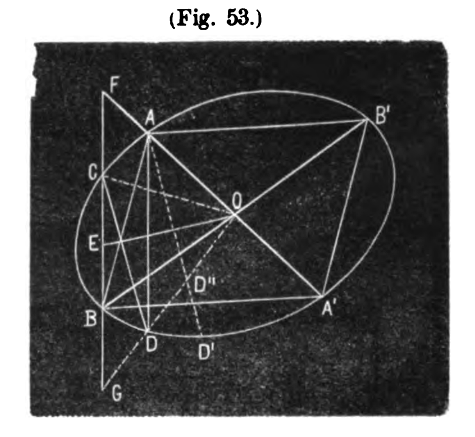
Kegelschnitt. Diese Curve ist eine Hyperbel, welche dieselben Asymptoten und conjugirten Durchmesser hat, wie die zuerst betrachtete, nur sind die eigentlichen Durchmesser der einen uneigentliche Durchmesser der anderen. Zwei Hyperbeln, welche solche gegenseitige Beziehungen zeigen, nennt man conjugirte Hyperbeln.

Aehnliche Sätze wie die zuletzt für die Hyperbel aufgestellten, können auch für die Ellipse nachgewiesen werden. Sind OA, OB und OC, OD (Fig. 53) zwei beliebige Paare conjugirter Halbmesser einer Ellipse und zieht man die Sehne BC, welche von OA und OD beziehungsweise in F und G geschnitten wird, so findet man, dass

$$FB = CG$$

ist. Da nämlich je zwei conjugirte Durchmesser entsprechende Strahlen eines involutorischen Büschels sind, so kommt auf der Sehne BC, indem sie von den genannten zwei Paaren conjugirter Halbmesser geschnitten wird, eine involutorische Punktreihe zu Stande. Das Centrum dieser Reihe ist der Halbirungspunkt E der Sehne BC; denn letztere ist dem Durchmesser OE conjugirt, sie muss also parallel zum conjugirten Durchmesser von OE sein, woraus folgt, dass E dem unendlich fernen Punkte von BC entspricht. Nachdem nun das Product der Abstände zweier entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe vom Involutionscentrum eine constante Grösse hat, so muss $FE \,.\, EB = CE \,.\, EG$ sein, aus welcher Gleichung, da $EB = CE$ ist, sich ergibt: $EF = EG$. Es ist somit auch $FB = CG$, wie oben behauptet wurde.

(Fig. 53.)



Zieht man durch A eine Parallele zu BC und nimmt man an, diese Parallele würde die Ellipse im Punkte D' schneiden, so halbirt OE die Sehne AD', weil OE dieser Sehne conjugirt ist. Nun halbirt aber OE auch das zwischen OF und OG gelegene Stück AD'' der Sehne AD', wie aus der gegenseitigen Lage der Dreiecke FOG und AOD'' hervorgeht, es müssen daher die Punkte D' und D'' coincidiren, was offenbar nur möglich ist, wenn sie mit D zusammenfallen. Die durch A parallel zu BC gezogene Gerade geht also durch den Punkt D, oder was dasselbe ausdrückt:

Die Sehnen BC und AD sind zu einander parallel.

Nachdem die Dreiecke FOB und COG eine gemeinschaftliche Spitze O und gleiche Grundlinien FB und CG haben, so sind ihre Flächeninhalte einander gleich. Zieht man von diesen Dreiecken die ebenfalls einander gleichen Dreiecke FAB und CDG ab, so ergibt sich:

$$\triangle\, AOB = COD.$$

Das Parallelogramm, dessen Diagonalen die conjugirten Durchmesser AA' und BB' bilden, ist an Fläche viermal so gross als das Dreieck AOB; ebenso hat das der Ellipse umschriebene Parallelogramm, dessen Diagonalen die conjugirten Durchmesser OC und OD sind, eine viermal so grosse Fläche, als das Dreieck COD. Mit Rücksicht auf die Gleichheit der beiden genannten Dreiecke und auf den Umstand, dass die zwei Paare conjugirter Halbmesser OA, OB und OC, OD ganz beliebig angenommen wurden, folgt hieraus:

65. Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes, dessen Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse bilden, ist gleich dem Flächeninhalte jenes Rhombus, dessen Diagonalen die beiden Axen dieser Ellipse sind.

Construirt man in den Endpunkten zweier beliebiger conjugirter Durchmesser einer Ellipse die Tangenten, so entsteht ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm, dessen Flächeninhalt, wie man sich leicht überzeugt, doppelt so gross ist, als der Flächeninhalt jenes Parallelogrammes, dessen Diagonalen die beiden conjugirten Durchmesser sind. Daraus und aus dem zuletzt nachgewiesenen Satze folgt:

66. Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes, dessen Seiten eine Ellipse in den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser berühren, ist gleich dem Flächeninhalte jenes Rechteckes, dessen Seiten diese Ellipse in den Scheiteln tangiren.

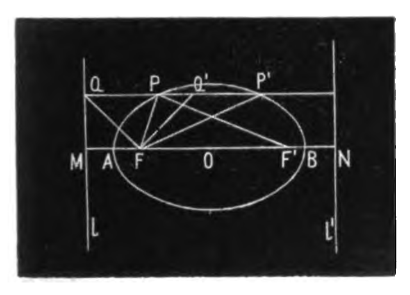
Aus dem Umstande, dass die Fusspunkte der Senkrechten, welche von den Brennpunkten auf eine Tangente einer Ellipse oder Hyperbel gefällt werden, in dem umschriebenen Kreise liegen (Satz 59, 2. Abschnitt) kann gefolgert werden, dass das Product der von den beiden Brennpunkten auf irgend eine Tangente gefällten Senkrechten eine constante Grösse hat. Ist nämlich F irgend ein Punkt in der Ebene eines Kreises und zieht man durch F beliebig viele Gerade, welche den Kreis schneiden, so ist bekanntlich für jede solche Gerade das Product der Abstände des Punktes F von den Schnittpunkten eine constante Grösse. — Mit Benützung dieser Andeutung dürfte es nicht schwer fallen nachstehenden Satz zu beweisen:

67. Das Product der aus den beiden Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel auf irgend eine Tangente dieser Curve gefällten Senkrechten ist gleich dem Quadrate der Nebenaxe.

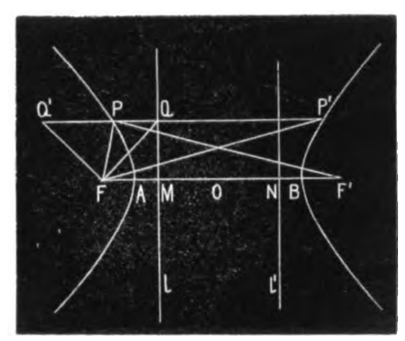
In den Figuren 54 und 55 seien F, F' die Brennpunkte, A, B die Endpunkte der Hauptaxe, O der Mittelpunkt und l, l' die beiden Leitlinien eines Kegelschnittes. — Wie aus der gegenseitigen Lage von F, F' gegen A, B zu ersehen ist, bezieht sich Fig. 54 auf die Ellipse, und Fig. 55 auf die Hyperbel. Parallel zur Hauptaxe ziehen wir eine Secante, welche den Kegelschnitt, in P, P', die Leitlinie l im Punkte Q schneidet, verbinden Q mit F

und errichten in F eine Senkrechte auf QF. Diese Senkrechte ist der Geraden QF conjugirt, weil je zwei beliebige auf einander senkrecht stehende Gerade,

(Fig. 54.)



(Fig. 55.)



die sich in F schneiden, conjugirt sind. Daraus folgt, dass Q dem Punkte Q' conjugirt ist, in welchem die erwähnte Senkrechte von PP' geschnitten wird.

Q und Q' bilden demnach entsprechende Punkte einer involutorischen Reihe, welche ihre Doppelpunkte in P und P' hat. Nach Satz 56, 1. Abschnitt, werden Q und Q' durch die Doppelpunkte P und P' harmonisch getrennt, mithin bilden die vier sich in F schneidenden Geraden FP, FP', FQ und FQ' einen harmonischen Strahlenbüschel und da FQ auf FQ' senkrecht steht, so halbiren diese beiden Strahlen die zwei von FP und FP' eingeschlossenen Winkel. Durch Anwendung eines bekannten Lehrsatzes der elementaren Geometrie auf das Dreieck FPP' ergibt sich demnach

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{P'F}{P'Q} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \alpha$$

Nun ist für die Ellipse (Fig. 54) $P'F = PF' = AB - PF$ und

$$P'Q = MN - PQ,$$

wenn M und N die Schnittpunkte der Hauptaxe AB mit den beiden Leitlinien bezeichnen; man hat also

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{AB - PF}{MN - PQ},$$

aus welcher Gleichung durch Reduction erhalten wird:

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{AB}{MN} = \frac{OA}{OM} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \beta$$

Die Punkte F und M sind einander in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt, sie bilden also entsprechende Punkte einer involutorischen Reihe, deren Träger die Hauptaxe ist. A und B sind die Doppelpunkte dieser Reihe, daher besteht die Gleichung:

$$OA^2 = OF \,.\, OM.$$

Substituirt man den aus letzterer Gleichung resultirenden Werth von OM in die Gleichung β, so ergibt sich

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{OF}{OA}.$$

Die Abstände eines beliebigen Punktes der Ellipse von der Leitlinie und dem zugehörigen Brennpunkte ist demnach gleich der numerischen Excentricität.

Ganz analoge Beziehungen ergeben sich für die Hyperbel: Bei dieser Curve ist

$$P'F = PF' = AB + PF \text{ und}$$
$$P'Q = MN + PQ,$$

wenn M, N wieder die Schnittpunkte der Hauptaxe mit den beiden Leitlinien bezeichnen. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung α und reducirt, so erhält man wieder:

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{AB}{MN} = \frac{OA}{OM},$$

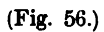
und da $OA^2 = OF.\, OM$ ist, so ergibt sich schliesslich

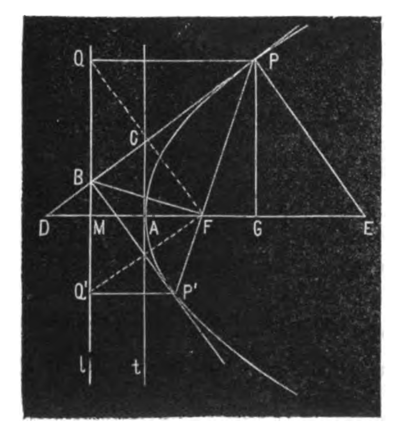
$$\frac{PF}{PQ} = \frac{OF}{OA}.$$

Wir können somit behaupten:

68. *Das Verhältniss der Abstände eines jeden Punktes einer Ellipse oder Hyperbel von einem der Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie ist gleich der numerischen Excentricität. Bei der Ellipse ist demnach dieses Verhältniss kleiner, bei der Hyperbel grösser als die Einheit.*

Bei der *Parabel* ist das in Rede stehende Verhältniss gleich der Einheit, wie wir nun zeigen wollen. A sei der Scheitel, F der Brennpunkt und l die Leitlinie einer Parabel (Fig. 56). Zieht man aus einem beliebigen Punkte P dieser Curve eine Tangente, welche l im Punkte B schneidet, verbindet F mit P und B, und fällt aus P eine Senkrechte auf l, deren Fusspunkt wir Q nennen, so entstehen zwei congruente Dreiecke PFB und PQB. Denn die Gerade PQ convergirt gegen den unendlich fernen Brennpunkt, es halbirt somit nach Satz 52, 2. Abschnitt, die Tangente in P den Winkel QPF, ferner ist BFP nach Satz 53, 2. Abschnitt, ein rechter Winkel, also gleich PQB und die Gerade BP bildet eine gemeinschaftliche Seite der genannten zwei Dreiecke. Aus der Congruenz der letzteren folgt, dass PF und PQ einander gleich sind; wir können also behaupten:


(Fig. 56.)



69. **Jeder Punkt einer Parabel ist vom Brennpunkte ebenso weit entfernt als von der Leitlinie.**

Ist M der Durchschnittspunkt der Axe mit der Leitlinie, so folgt aus diesem Satze, dass

$$AM = AF$$

ist. Demnach halbirt die in A gezogene Tangente t (die Scheiteltangente) die Gerade FQ und da FQ als Basis des gleichschenkligen Dreieckes FQP auch, von dessen Höhe PC, nämlich der in P gezogenen Tangente, halbirt wird, so schneiden sich t, FQ und PB in ein und demselben Punkte C. Letzterer ist nun auch der Fusspunkt einer von F auf die Tangente PB gefällten Senkrechten, es gilt also der Satz:

70. **Die Fusspunkte der aus dem Brennpunkte einer Parabel auf sämmtliche Tangenten dieser Curve gefällten Senkrechten liegen in der Scheiteltangente.**

Zieht man aus B eine zweite Tangente an die Parabel, so steht dieselbe auf der Tangente BP senkrecht. Ist nämlich P' der Berührungspunkt dieser zweiten Tangente und Q' der Fusspunkt der aus P' auf die Leitlinie gefällten Senkrechten, so sind die Dreiecke $P'FB$ und $P'Q'B$ aus ähnlichen Gründen congruent, welche für die Congruenz der Dreiecke PFB und PQB angeführt wurden. Man hat also

$$\sphericalangle\, PBQ = PBF \text{ und}$$
$$\sphericalangle\, P'BQ' = P'BF.$$

Da nun die Summe dieser vier Winkel gleich 180^0 ist, so muss $PBF + P'BF$, nämlich PBP' ein rechter Winkel sein. Wir schliessen daraus:

71. **Je zwei Tangenten einer Parabel, welche sich in einem Punkte der Leitlinie schneiden, stehen auf einander senkrecht und umgekehrt: Der Schnittpunkt von irgend zwei auf einander senkrecht stehenden Tangenten einer Parabel liegt in der Leitlinie.**

Nachdem die in P gezogene Tangente und Normale den von den Leitstrahlen PF und PQ eingeschlossenen Winkel halbiren, so bilden die Geraden PQ, PB, PF und die Normale einen harmonischen Strahlenbüschel. Nennen wir D und E beziehungsweise die Schnittpunkte der Tangente und Normale des Punktes P mit der Hauptaxe der Parabel, so bilden demnach D, F, E und der unendlich ferne Brennpunkt eine harmonische Punktreihe, in welcher wegen der unendlich grossen Entfernung des einen Punktes, $DF = FE$ sein muss. Beschreibt man über DE aus F einen Kreis, so geht derselbe durch P, weil DPE ein rechter Winkel ist, daher muss auch

$$FP = DF = FE$$

sein. D. h.

72. **Tangente, Leitstrahl und Normale irgend eines Punktes einer Parabel schneiden auf der Hauptaxe zwei**

Stücke ab, welche beide gleich dem Leitstrahle dieses Punktes sind.

Aus der Eigenschaft der Parabel, dass jeder ihrer Punkte von F und l gleich weit abstehen folgt, dass der Parameter doppelt so gross ist, als die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie. MF ist also gleich dem halben Parameter und AF gleich dem vierten Theile desselben.

Fällt man aus P eine Senkrechte auf die Axe und nennt ihren Fusspunkt G, so ist das entstehende Dreieck PGE dem Dreiecke QMF congruent, wie leicht bewiesen werden kann. Es ist somit $GE = MF$ gleich dem halben Parameter. Das Stück GE wird bekanntlich die Subnormale des Punktes P genannt, daher gilt der Satz:

73. **Die Subnormale eines jeden Parabelpunktes ist gleich dem halben Parameter.**

Das Dreieck QCP ist dem Dreiecke FCD, wie leicht einzusehen, congruent man hat also $DF = PQ = MG$. Zieht man von der Gleichung

$$DF = MG$$

die Gleichung $AF = AM$

ab, so ergibt sich $AD = AG$.

Nachdem nun DG die Subtangente des Punktes P genannt wird, so folgt hieraus:

74. **Die Subtangente eines jeden Parabelpunktes wird durch den Scheitel halbirt.**

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke DPE, in welchem PG das auf die Hypothenuse gefällte Perpendikel ist, erkennt man, dass

$$PG^2 = DG \,.\, GE = 2\,AG \,.\, GE$$

ist. Nimmt man an A sei der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, bei welchem die Parabelaxe zugleich die Abscissenaxe bildet, so drückt letztere Gleichung den Satz aus:

75. **Die Ordinate irgend eines Parabelpunktes ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Parameter und der Abscisse dieses Punktes.**

Schliesslich wollen wir noch die zwei Aufgaben betrachten:

Es sollen jene Tangenten einer Parabel construirt werden, welche durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen.

Es soll jene Tangente einer Parabel ermittelt werden, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Die erste Aufgabe wird in folgender Weise gelöst:

Man beschreibt aus dem gegebenen Punkte einen Kreis, welcher durch den Brennpunkt geht und zieht aus den Schnittpunkten dieses Kreises mit der Leitlinie je eine zur Axe parallele Gerade. Letztere treffen die Parabel in den Berührungspunkten der gesuchten Tangente. — Unabhängig von den Berührungs-

punkten werden die Tangenten auch erhalten, wenn man vom gegebenen Punkte auf die Verbindungslinie des Brennpunktes mit den erwähnten Schnittpunkten des Kreises senkrechte Gerade fällt. — Die Richtigkeit dieser Construction leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass jeder Punkt der beliebig gewählten Tangente PB (Fig. 56) von F und Q gleich weit entfernt ist und dass PB auf der Geraden FQ senkrecht steht.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, fällt man auf die gegebene Gerade vom Brennpunkte aus eine Senkrechte und zieht aus dem Durchschnittspunkte der letzteren mit der Scheiteltangente eine Parallele zur gegebenen Geraden. Diese Parallele muss die verlangte Tangente sein, wie aus dem Satze 70, 2. Abschnitt, folgt.

i) Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten. — Gemeinsames Polardreieck zweier Kegelschnitte.

Wir haben bisher, mit wenigen Ausnahmen, nur solche Eigenschaften eines Kegelschnittes untersucht, die an demselben ohne Bezugnahme auf einen zweiten Kegelschnitt in Betracht kommen. Es sollen nun die wichtigsten Beziehungen erörtert werden, welche zwischen zwei in derselben Ebene befindlichen Kegelschnitten bestehen.

Da ein Kegelschnitt durch fünf seiner Punkte oder Tangenten vollkommen bestimmt ist, so können zwei Kegelschnitte, wenn sie nicht identisch sein sollen, höchstens vier Punkte gemein haben. Schneiden sich zwei derselben Ebene angehörige Kegelschnitte in einem Punkte, so müssen sie sich noch in einem zweiten, oder noch in drei andern Punkten schneiden, wie aus Folgendem hervorgeht. Jeder Kegelschnitt theilt die Ebene, in welcher er liegt, in zwei Theile, wovon der eine sich innerhalb, der andere ausserhalb der Curve befindet. Jener Theil, in welchem sämmtliche Tangenten gelegen sind, wird bekanntlich der äussere genannt, während man den innern jenen Theil nennt, von dessen Punkten sich keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt ziehen lassen. Wenn nun zwei Kegelschnitte K und K_1, welche in derselben Ebene liegen, sich in einem Punkte schneiden, so haben sie wenigstens noch einen Punkt gemein, weil ein Punkt, der den einen Kegelschnitt K in einem bestimmten Sinne durchläuft und am Anfange seiner Bewegung sich ausserhalb der Curve K_1 befindet, in das innere und dann jedenfalls wieder in das äussere Gebiet gelangt, also K_1 mindestens zweimal übersetzen muss. Indess kann der bewegliche Punkt, nachdem zwei Kegelschnitte auch vier Punkte gemein haben können, auch viermal die Curve K_1 übersetzen, keinesfalls aber bloss dreimal, da er sonst, aus dem äusseren Gebiete von K_1 kommend, im Innern von K_1 stehen bleiben müsste, also nicht die ganze Curve K durchlaufen haben würde.

Haben zwei Kegelschnitte, welche sich in derselben Ebene befinden, eine gemeinschaftliche Tangente, so haben sie noch eine zweite oder noch drei

andere gemeinschaftliche Tangenten. Dies ergibt sich nach dem Gesetze der Reciprocität aus den vorstehenden Untersuchungen. Denkt man sich nämlich ausser den beiden Kegelschnitten K und K_1, deren gemeinschaftliche Tangente t heissen möge, noch einen dritten, beliebigen Kegelschnitt K_2 in der Ebene der ersteren angenommen und bestimmt man zu allen Tangenten von K und K_1 die Pole in Bezug auf K_2, so ergeben sich nach Satz 38, 2. Abschnitt, zwei neue Kegelschnitte k und k_1, welche sich offenbar in dem Pole T von t schneiden. Letztere Curven müssen nun ausser T noch einen zweiten, oder noch drei andere Punkte gemein haben und da die Polaren dieser Punkte gemeinsame Tangenten von K und K_1 sind, so erscheint unsere Behauptung gerechtfertigt. Wir können somit die Sätze aufstellen:

76. Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben entweder keine, zwei oder vier reelle Punkte gemein.

Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben entweder keine, zwei oder vier reelle Tangenten gemein.

Dass zwei Kegelschnitte auch imaginäre Durchschnittspunkte haben können, geht aus folgenden Betrachtungen hervor:

Auf jeder Geraden p, die einen Kegelschnitt in reellen Punkten A und B schneidet, bilden A und B die Doppelpunkte einer involutorischen Reihe R, bei welcher je zwei sich entsprechende Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt einander conjugirt sind (Satz 33, 2. Abschnitt). Die Schnittpunkte A und B erscheinen also auch durch zwei Paare conjugirter Punkte von p vollkommen bestimmt. Liegt nun p ganz ausserhalb des Kegelschnittes in der Ebene desselben, so werden A und B imaginär, sind jedoch ebenfalls durch die in Rede stehende involutorische Reihe R vollkommen bestimmt, nachdem sie auch in diesem Falle keine anderen Punkte von p sein können, als die imaginären Doppelpunkte der Reihe R. Ist demnach eine Gerade in der Ebene zweier Kegelschnitte K und K_1 so gelegen, dass je zwei in Bezug auf K conjugirte Punkte von p auch in Bezug auf K_1 conjugirt sind, so müssen K und K_1 die reellen oder imaginären Doppelpunkte jener involutorischen Reihe gemein haben, welche auf p durch alle Paare conjugirter Punkte gebildet wird. Solche imaginäre Doppelpunkte sind imaginäre Schnittpunkte von K und K_1.

Jeden Punkt M der Ebene eines Kegelschnittes kann man als den Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels S betrachten, bei welchem jedes Paar sich entsprechender Strahlen durch zwei in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirte Gerade gebildet werden. Die Doppelstrahlen von S sind bekanntlich jene zwei Tangenten a und b des Kegelschnittes, welche von M aus gezogen werden können. Befindet sich nun M innerhalb der Curve, so werden a und b imaginär, erscheinen jedoch durch die Strahlen des Büschels S vollkommen bestimmt, ebenso wie in dem Falle, wenn sie reell sind. Hat also ein Punkt M

eine solche Lage in der Ebene zweier Kegelschnitte K und K_1, dass je zwei durch M gehende Gerade, die in Bezug auf K conjugirt sind, auch bezüglich des Kegelschnittes K_1 conjugirte Gerade bilden, so müssen die Doppelstrahlen des Büschels, welcher durch alle Paare der durch M gehenden conjugirten Geraden zu Stande kommt, gemeinschaftliche Tangenten von K und K_1 sein. Sind diese Doppelstrahlen imaginär, so bilden sie imaginäre gemeinschaftliche Tangenten von K und K_1.

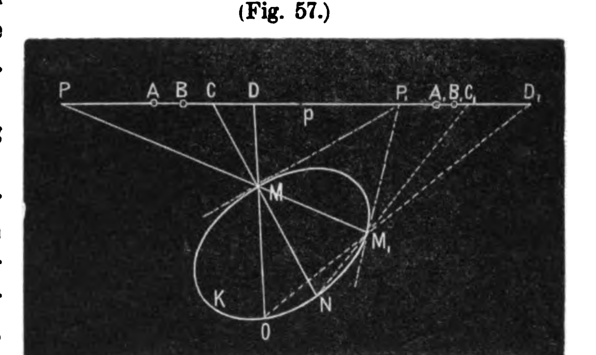
Aus dem Umstande, dass Doppelpunkte oder Doppelstrahlen immer paarweise vorkommen ergibt sich auch der obige Satz 76; zudem lässt uns derselbe schliessen, dass zwei Kegelschnitte nur eine gerade Anzahl imaginärer Schnittpunkte oder imaginärer gemeinschaftlicher Tangenten haben können. Diese Anzahl kann entweder zwei oder vier, nicht aber mehr betragen, wenn die beiden Curven nicht identisch sind. Um dies nachzuweisen, soll nun zunächst gezeigt werden, dass ein Kegelschnitt durch

zwei imaginäre und drei reelle, oder vier imaginäre Punkte und einen reellen Punkt	zwei imaginäre und drei reelle oder vier imaginäre Tangenten und eine reelle Tangente

vollkommen bestimmt ist.

M, N, O (Fig. 57) seien drei gegebene Punkte eines Kegelschnittes K, welcher so construirt werden soll, dass die ebenfalls gegebenen Punktpaare AA_1, BB_1 der Geraden p zwei Paare conjugirter Punkte in Bezug auf K werden. Die vier Punkte AA_1, BB_1 müssen dieser Forderung zufolge zwei Paare entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe bilden und die Doppelpunkte dieser Reihe werden reelle oder imaginäre Punkte von K sein, je nachdem die Strecken AB und A_1B_1 sich übergreifen oder nicht. Dass K durch die Angaben vollkommen bestimmt ist, wenn reelle Doppelpunkte vorhanden sind, ist selbstverständlich. Man braucht ja nur die Doppelpunkte zu ermitteln um einen vierten und fünften Punkt von K zu erhalten. Hat die gegebene involutorische Reihe imaginäre Doppelpunkte, so ist der Kegelschnitt ebenfalls vollkommen bestimmt, wie aus Folgendem hervorgeht. Er erscheint dann durch zwei imaginäre und drei reelle Punkte gegeben.

(Fig. 57.)



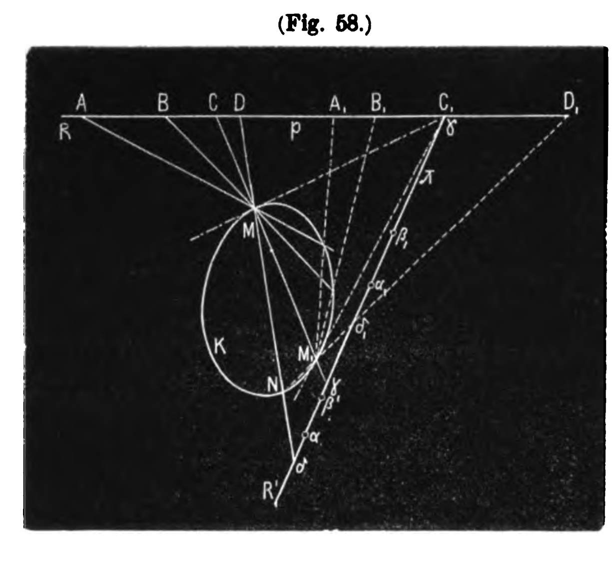
Man verbinde M mit N, wodurch im Schnittpunkte von p mit MN der Punkt C erhalten wird, ermittle jenen Punkt C_1, welcher dem Punkte C in der durch AA_1 BB_1-bestimmten involutorischen Reihe entspricht, und verbinde C_1

mit N. Dann ziehe man die Gerade MO, welche p in D schneidet, suche den entsprechenden Punkt D_1 von D und verbinde D_1 mit O. Die beiden Geraden NC_1 und OD_1 schneiden sich in einem Punkte, welchen wir M_1 nennen wollen.

Denkt man sich nun M mit allen Punkten $ABCD$ . . . . . . und M_1 mit den entsprechenden $A_1B_1C_1D_1$ . . . . . verbunden, so entstehen zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1, welche einen durch M, N, O und M_1 gehenden Kegelschnitt erzeugen. Dem Strahle M_1M des Büschels S_1 entspricht bekanntlich die Tangente in M, welche erhalten wird, wenn man zu dem Durchschnittspunkte P der Geraden MM_1 mit p den entsprechenden Punkt P_1 sucht und P_1 mit M verbindet. Die Tangente in M_1 ist die Gerade M_1P_1, nachdem im Büschel S dem Strahle MM_1 der Strahl M_1P_1 entspricht. Man sieht also, dass der Schnittpunkt der Tangenten in M und M_1 ein Punkt von p ist. Die gegebene Gerade geht somit durch den Pol P_1 der Sehne MM_1, woraus nach Satz 34 2. Abschnitt, geschlossen werden kann, dass jedes Paar sich entsprechender Punkte der auf p gelegenen involutorischen Reihe, ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den durch S und S_1 erzeugten Kegelschnitt sein müssen. Dieser Kegelschnitt erfüllt die oben gestellten Bedingungen und erscheint, da S und S_1 durch letztere bestimmt sind, ebenfalls vollkommen bestimmt, wie wir behauptet haben.

Um nachzuweisen, dass ein Kegelschnitt durch einen reellen und vier imaginäre Punkte vollkommen bestimmt ist, betrachten wir Fig. 58. In derselben seien p und π die Träger zweier involutorischer Reihen R und R', von welchen je zwei Paare sich entsprechender Punkte gegeben sind: auf p die Punkte AA_1, BB_1, auf π die Punkte $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$. Ein Kegelschnitt K soll so construirt werden, dass jedes Paar sich entsprechender Punkte sowohl von R als auch von R' zugleich ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf K bilden und dass K durch den gegebenen Punkt N hindurchgeht.

(Fig. 58.)



Verlaufen die beiden involutorischen Reihen entgegengesetzt, haben sie also reelle Doppelpunkte, so ist leicht einzusehen, dass K durch die Angaben vollkommen bestimmt ist, nachdem fünf reelle Punkte von K, nämlich N und die

vier Doppelpunkte der zwei Reihen gegeben erscheinen. Auch in dem Falle, wenn nur eine der Reihen reelle Doppelpunkte hat, ist K, wie sich aus der unmittelbar vorausgegangenen Untersuchung ergab, vollkommen bestimmt, denn es sind dann drei reelle und zwei imaginäre Punkte von K gegeben. Wir haben also nur den Fall zu untersuchen, in welchem beide involutorische Reihen imaginäre Doppelpunkte besitzen, wenn also nur ein reeller und vier imaginäre Punkte des Kegelschnittes K bekannt sind. Dass in diesem Falle sowohl p, als auch π ganz ausserhalb K liegen muss, ist selbstverständlich.

Um K zu construiren, kann man wie folgt verfahren:

Man bestimme in R und R' jene Punkte C und γ_1, welche den im Schnittpunkte von p und π vereinigten Punkten C_1 und γ der beiden Reihen entsprechen und verbinde C mit γ_1. Dann ermittle man in den zwei involutorischen Strahlenbüscheln, welche durch die Verbindungslinien des Punktes N mit den Punkten von R und R' gebildet werden, jene Strahlen $D\delta$, $D_1\delta_1$, die einander sowohl in dem einen als auch in dem andern Büschel entsprechen (Satz 59, 1. Abschnitt). Die Schnittpunkte M und M_1 von $C\gamma_1$ mit den Strahlen $D\delta$ und $D_1\delta_1$ betrachte man endlich als die Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel S und S_1, von welchen der eine ein Schein der Reihe ABC ..... (oder $\alpha\beta\gamma$ ....) der andere ein Schein der Reihe $A_1B_1C_1$ ..... (oder $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ .....) ist. Diese beiden Büschel erzeugen einen Kegelschnitt, welcher obigen Angaben entspricht, wie sich aus Folgendem ergibt:

Der Geraden M_1M im Strahlenbüschel S_1 entspricht die Gerade MC_1, da C und C_1 entsprechende Punkte von R sind, daher ist MC_1 die Tangente in M. Der Geraden MM_1 im Büschel S entspricht M_1C_1, also tangirt M_1C_1 den Kegelschnitt in M_1. Nachdem die Tangenten MC_1 und M_1C_1 sich in C_1 schneiden, so muss C_1 der Pol von MM_1 sein. Die Geraden p und π sind also der Sehne MM_1 conjugirt. Verbindet man nun irgend einen Punkt des durch S und S_1 erzeugten Kegelschnittes mit M und M_1, so schneiden die dadurch erhaltenen Geraden nach Satz 34, 2. Abschnitt, sowohl p, als auch π in conjugirten Punkten. Je zwei conjugirte Punkte von p oder π bilden entsprechende Punkte einer involutorischen Reihe. Die zwei auf p und π durch solche Punkte entstehenden involutorischen Reihen sind identisch mit den gegebenen R und R', denn die ersteren, sowie die letzteren dieser Reihen werden beziehungsweise durch die Punkte CC_1, DD_1 und $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ vollkommen bestimmt. Jener durch S und S_1 erzeugte Kegelschnitt entspricht also der Bedingung, dass AA_1, BB_1, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ in Bezug auf denselben conjugirt sein sollen und dass er den gegebenen Punkt N in sich enthalte, es ist demnach dieser Kegelschnitt der verlangte K.

Da nun S und S_1 durch die obigen Angaben vollkommen bestimmt sind, so erscheint auch K durch dieselben vollkommen bestimmt.

Es erübrigt jetzt noch um zu zeigen, dass zwei Kegelschnitte, wenn sie nicht identisch sind, nicht mehr als vier imaginäre Punkte gemein haben können, die Untersuchung der Aufgabe: Ein Kegelschnitt K ist zu construiren, welcher

die Bedingung erfüllt, dass je zwei sich entsprechende Punkte von drei gegebenen involutorischen Reihen R, R_1, und R_2 (Fig. 59) in Bezug auf K einander conjugirt sind. — Dass dadurch zu viel bedingt wird, sobald nur eine der drei Reihen reelle Doppelpunkte hat, folgt aus den obigen Betrachtungen unmittelbar. Wir setzen also voraus, jede der drei Reihen liege ganz ausserhalb des zu construirenden Kegelschnittes.

(Fig. 59.)

Sind A und a die im Schnittpunkte von R und R_1 vereinigten Punkte dieser Reihen und A_1, a_1 ihre entsprechenden beziehungsweise in R und R_1, so muss die Gerade $A_1 a_1$ die Polare des genannten Schnittpunktes sein. Denn A_1 sowohl, als auch a_1 liegen als conjugirte Punkte des Schnittpunktes Aa in der Polaren des letzteren, folglich muss die Verbindungslinie von A_1 und a_1 diese Polare selbst sein. Die Polaren $b_1 \beta_1$ und $B_1 \alpha_1$ der Schnittpunkte von R_1, R_2 und R, R_2 können in derselben Weise gefunden werden, wie $A_1 a_1$. Der Schnittpunkt P der Polaren $A_1 a_1$ und $B_1 \alpha_1$ ist, wie leicht einzusehen der Pol des Trägers von R, ebenso sind die Punkte P_1 und P_2, in denen $b_1 \beta_1$ die zwei anderen Polaren schneidet, die Pole der Träger von R_1 und R_2. Die Gerade AB, nämlich der Träger von R, ist der Geraden AP conjugirt, nachdem AP durch den Pol dieses Trägers geht. Aus analogem Grunde sind Ab, nämlich der Träger von R_1 und die Gerade AP_1 einander conjugirt. Ermittelt man die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels, welcher durch die genannten zwei sich in A schneidenden Paare conjugirter Geraden bestimmt wird, so erhält man zwei Tangenten des Kegelschnittes K. Auf gleiche Weise können die durch B und b gehenden Tangentenpaare ermittelt werden, es ergeben sich also sechs Tangenten des zu construirenden Kegelschnittes, durch welche derselbe jedenfalls vollkommen bestimmt ist. — Die Frage, ob es immer möglich ist, einen Kegelschnitt zu construiren der diese sechs Tangenten berührt, wollen wir, da sie mit dem Zwecke unserer Untersuchung nichts gemein hat, auch nicht weiter erörtern. — Wir sehen also, dass zwei von einander verschiedene Kegelschnitte nicht mehr als zwei Paare imaginärer Punkte gemein haben können.

Zur Entscheidung der Frage, wie viele gemeinschaftliche imaginäre Tangenten zwei Kegelschnitte besitzen können, führen ganz ähnliche Untersuchungen wie jene, welche wir bezüglich der gemeinschaftlichen imaginären Punkte vorgenommen haben. — Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass imaginäre Tangenten nichts anderes sind, als die imaginären Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels, bei welchem je zwei sich entsprechende Strahlen conjugirte Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt sind, und dass demnach imaginäre Tangenten immer paarweise vorkommen. — Man findet, dass ein

Kegelschnitt durch zwei imaginäre und drei reelle oder durch vier imaginäre Tangenten und eine reelle Tangente vollkommen bestimmt ist und dass zwei von einander verschiedene Kegelschnitte nicht mehr als vier imaginäre Tangenten gemein haben können.

Durch obige Untersuchungen erscheinen nun die Sätze gerechtfertigt:

77. Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben entweder keine, zwei oder vier imaginäre Punkte gemein.

Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben entweder keine, zwei oder vier imaginäre Tangenten gemein.

Der Fall, dass die beiden Curven keine gemeinschaftlichen imaginären Punkte oder Tangenten besitzen, tritt offenbar dann ein, wenn sie vier reelle Punkte, oder beziehungsweise vier reelle Tangenten gemein haben, weil ja ein Kegelschnitt schon durch drei reelle und zwei imaginäre Punkte, oder durch drei reelle und zwei imaginäre Tangenten vollkommen bestimmt wird.

Zwei imaginäre Punkte eines Kegelschnittes, welche die Doppelpunkte einer und derselben durch conjugirte Punkte gebildeten Reihe sind, heissen zusammengehörige imaginäre Punkte des Kegelschnittes. Zwei imaginäre Tangenten, welche die Doppelstrahlen eines und desselben, durch conjugirte Gerade gebildeten Strahlenbüschels sind, nennt man zusammengehörige imaginäre Tangenten. Demnach liegen zwei zusammengehörige imaginäre Punkte eines Kegelschnittes immer auf einer reellen Geraden und zwei zusammengehörige imaginäre Tangenten schneiden sich immer in einem reellen Punkte. Dies gilt keineswegs auch für nicht zusammengehörige Punkte und Tangenten. Nehmen wir an, A und B, sowie C und D seien zwei Paare zusammengehöriger imaginärer Punkte, so sind die Geraden AB und CD reell, irgend eine andere Verbindungslinie von zweien dieser vier Punkte, z. B. A und C, muss jedoch imaginär sein, denn wäre sie reell, so müsste der Schnittpunkt von AB und AC, nämlich A, ebenfalls reell sein, was der Voraussetzung widerspricht. Analoges kann bezüglich der imaginären Tangenten gezeigt werden.

Wir können also sagen: Zwei nicht zusammengehörige imaginäre Punkte eines Kegelschnittes liegen immer auf einer imaginären Geraden, und zwei nicht zusammengehörige imaginäre Tangenten schneiden sich immer in einem imaginären Punkte.

Jede Gerade, welche durch zwei gemeinschaftliche reelle Punkte zweier Kegelschnitte bestimmt wird, heisst eine eigentliche gemeinschaftliche Secante, während man eine Gerade, welche zwei zusammengehörige imaginäre Schnittpunkte zweier Kegelschnitte enthält, eine uneigentliche, gemeinschaftliche oder auch ideelle Secante nennt. Sowohl die eigentlichen, als auch die uneigentlichen

gemeinschaftlichen Secanten haben die Eigenschaft, dass je zwei Punkte derselben, welche in Bezug auf den einen Kegelschnitt conjugirt sind, es auch in Bezug auf den andern sein müssen. Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, zwei Kegelschnitte K und K_1 hätten eine eigentliche oder uneigentliche Secante p gemein und nennen die den Curven K und K_1 gemeinsamen reellen oder imaginären Punkte dieser Secante D und D'. Die zwei involutorischen Reihen, welche von den in Bezug auf K und den in Bezug auf K_1 conjugirten Punkten der Geraden p gebildet werden, heissen wir beziehungsweise R und R_1. Dass diese Reihen identisch sind, ergibt sich aus folgender Betrachtung: Da R und R_1 dieselben Doppelpunkte haben, so ist auch ihr Centralpunkt C derselbe Punkt in p, denn C halbirt immer die Entfernung der (reellen oder imaginären) Strecke DD'. In jeder involutorischen Reihe hat ferner das Product, der Abstände zweier sich entsprechender Punkte vom Centralpunkte einen und denselben Werth, es ist also, wenn durch A und A_1 zwei beliebige entsprechende Punkte von R bezeichnet werden

$$AC \,.\, A_1C = CD^2,$$

woraus folgt:

$$A_1C = \frac{CD^2}{AC}.$$

Für zwei entsprechende Punkte B und B_1 der Reihe R_1 hat man

$$B_1C = \frac{CD^2}{BC}.$$

Coincidirt nun B mit A, so muss den letzteren zwei Gleichungen zufolge auch B_1 mit A_1 zusammenfallen. Jedes Paar entsprechender Punkte von R ist somit auch ein Paar entsprechender Punkte von R_1, wodurch obige Behauptung gerechtfertigt erscheint.

Wenn zwei reelle Schnittpunkte DD' zweier Kegelschnitte coincidiren, so berühren sich die beiden Curven. Sie haben nämlich dann in dem Punkte DD', der beiden gemein ist, eine gemeinschaftliche Tangente und zwar jene, in welche die gemeinsame Secante DD' übergeht. Sind D und D' zusammengehörig imaginär, so können sie ebenfalls nur in einem reellen Punkte, nämlich dem Centralpunkte der involutorischen Reihe coincidiren, welcher sie als Doppelpunkte angehören. D und D' werden also in diesem Falle selbst reell, woraus man schliessen kann, dass auch eine uneigentliche gemeinschaftliche Secante in eine Tangente übergeht, wenn die imaginären gemeinsammen Punkte DD' zusammenfallen, und dass diese Tangente beide Kegelschnitte in demselben Punkte DD' berührt. Es lässt sich somit behaupten: Wenn zwei gemeinsame reelle oder zusammengehörig imaginäre Punkte D und D' zweier Kegelschnitte coincidiren, so berühren sich die beiden Curven im Punkte DD', welcher stets reell ist. Demnach kann man auch umgekehrt einen reellen Berührungspunkt zweier Kegelschnitte immer als Coincidenzpunkt zweier reeller oder zusammengehörig imaginärer Schnittpunkte dieser Curve betrachten.

Dass es auch imaginäre Berührungspunkte zweier Kegelschnitte gibt, sieht man leicht ein, wenn man berücksichtigt, dass auch zwei nicht zusammengehörige imaginäre Schnittpunkte zweier Kegelschnitte coincidiren können. Dieser Fall kann jedoch nur dann eintreten, wenn die zwei uneigentlichen Secanten, welche die imaginären Schnittpunkte enthalten, zusammenfallen; denn sonst müssten die beiden Curven sich im Schnittpunkte der zwei Secanten, also in einem reellen Punkte berühren. Coincidiren aber zwei gemeinschaftliche Secanten, so berühren sich die beiden Kegelschnitte in zwei Punkten. Wenn daher zwei Kegelschnitte in einem Punkte eine imaginäre Berührung eingehen, so findet auch noch in einem zweiten Punkte eine imaginäre Berührung statt. Man kann also sagen: Berühren sich zwei Kegelschnitte in zwei Punkten so können diese Punkte entweder beide reell oder beide imaginär sein.

Jeder Punkt, in welchem sich zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten zweier Kegelschnitte treffen, heisst ein eigentlicher Contingenzpunkt, während man den Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher zusammengehörig imaginärer Tangenten einen uneigentlichen oder ideellen Contingenzpunkt der beiden Kegelschnitte nennt. Sowohl die eigentlichen, als auch die uneigentlichen Contingenzpunkte sind so gelegen, dass je zwei durch einen solchen Punkt gehende Gerade, welche in Bezug auf den einen Kegelschnitt conjugirt sind, es auch in Bezug auf den andern sein müssen. Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung: Sind K und K_1 die beiden Kegelschnitte, d und d' zwei reelle oder zusammengehörig imaginäre, gemeinschaftliche Tangenten derselben, welche sich in dem Contingenzpunkte C schneiden, und heissen irgend zwei in Bezug auf K einander conjugirte, durch C gehende Gerade a und a_1, so besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg} ar \,.\, \operatorname{tg} a_1 r = \operatorname{tg} dr^2.$$

In dieser Gleichung bezeichnet r eine der Halbirungslinien des Winkels dd', oder, was dasselbe ist, einen Normalstrahl jenes involutorischen Büschels, welcher aus den durch C gehenden, in Bezug auf K einander conjugirten Geraden besteht. — Man hat also

$$\operatorname{tg} a_1 r = \frac{\operatorname{tg} dr^2}{\operatorname{tg} ar}.$$

Für je zwei einander entsprechende Strahlen bb_1 des involutorischen Büschels, welcher von jenen in Bezug auf K_1 einander conjugirten Geraden gebildet wird, die durch C gehen, besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg} b_1 r = \frac{\operatorname{tg} dr^2}{\operatorname{tg} br}.$$

Aus dieser und der unmittelbar vorausgehenden Gleichung ist zu ersehen, dass, wenn a und b coincidiren, auch die entsprechenden Strahlen a_1 und b_1

zusammenfallen müssen. Je zwei Gerade a und a_1, welche durch C gehen und einander in Bezug auf K conjugirt sind, müssen es daher auch in Bezug auf K_1 sein, wie oben behauptet wurde.

Wenn zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten d und d' zweier Kegelschnitte coincidiren, so berühren sich die beiden Curven. Coincidiren nämlich zwei Tangenten eines Kegelschnittes, so fallen bekanntlich die Berührungspunkte derselben mit dem Schnittpunkte beider Tangenten zusammen. Die vier Berührungspunkte zweier gemeinschaftlicher Tangenten bilden also, wenn letztere coincidiren, einen einzigen Punkt, in welchem beide Curven die gemeinsamme Tangente berühren. In diesem Punkte berühren sich also auch die beiden Curven. — Ganz dasselbe gilt bezüglich zweier zusammengehörig imaginärer Tangenten. Zwei solche Tangenten können nur in einem Normalstrahle des involutorischen Büschels, welchem sie als Doppelstrahlen angehören, also in einer reellen Geraden zusammenfallen, folglich werden sie in diesem Falle selbst reell und es muss für sie dasselbe Geltung haben, was bezüglich zweier reeller gemeinschaftlicher Tangenten, wenn sie coincidiren, bemerkt wurde. Wir können somit behaupten: Wenn zwei gemeinsame reelle, oder zusammengehörig imaginäre Tangenten d und d' zweier Kegelschnitte coincidiren, so berühren sich die beiden Curven in einem Punkte der gemeinsamen Tangente dd', welche stets reell ist. Demnach kann umgekehrt die Tangente in einem reellen Berührungspunkte zweier Kegelschnitte immer als eine Gerade betrachtet werden, in welcher zwei gemeinsame reelle oder zusammengehörig imaginäre Tangenten beider Curven zusammenfallen.

Wenn zwei Kegelschnitte sich in zwei imaginären Punkten berühren, so haben sie in diesen Punkten auch imaginäre gemeinschaftliche Tangenten. Man kann jede der letzteren als die Verbindungslinie zweier coincidirender imaginärer Schnittpunkte der beiden Curven, oder auch als zwei coincidirende imaginäre Tangenten betrachten, welche nicht zusammengehören.

Aus den Sätzen 76, 77, 2. Abschnitt, und den zuletzt angestellten Untersuchungen ergibt sich nun unmittelbar:

78. Berühren sich zwei Kegelschnitte nur in einem Punkte, welcher stets reell sein muss, so können dieselben ausser dem Berührungspunkte nur noch zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein haben.

Berühren sich zwei Kegelschnitte nur in einem Punkte, welcher stets reell sein muss, so können dieselben ausser der Tangente im Berührungspunkte nur noch zwei reelle oder imaginäre Tangenten gemein haben.

79. Berühren sich zwei Kegelschnitte in zwei reellen oder imaginären Punkten so

Berühren sich zwei Kegelschnitte in zwei reellen oder imaginären Punkten, so haben

haben sie ausser diesen keine weiteren reellen oder imaginären Punkte gemein.	sie ausser den Tangenten in diesen Punkten keine weiteren reellen oder imaginären Tangenten gemein.

Wenn zwei Kegelschnitte vier reelle Punkte gemein haben, so wird durch letztere ein vollständiges Vierseit bestimmt, dessen drei Paare gegenüberliegender Seiten die Ecken eines den beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen Polardreieckes bilden (Satz 37, 2. Abschnitt). Jede Ecke eines solchen Dreieckes ist so gelegen, dass seine Polaren in Bezug auf die beiden Kegelschnitte coincidiren. Diese zwei Polaren sind nämlich mit der dem Eckpunkte gegenüberliegenden Dreieckseite identisch. Jede Seite eines gemeinschaftlichen Polardreieckes hat eine derartige Lage, dass ihre Pole in Bezug auf die beiden Curven zusammenfallen, denn diese zwei Pole coincidiren mit dem der Dreieckseite gegenüberliegenden Eckpunkte.

Einen Punkt in der Ebene zweier Kegelschnitte, dessen Polaren rücksichtlich beider Curven coincidiren, wollen wir einen gemeinschaftlichen Pol nennen und eine Gerade dieser Ebene, deren Pole in Bezug auf die beiden Curven zusammenfallen, heissen wir eine gemeinschaftliche Polare. Jedem gemeinschaftlichen Pole entspricht eine gemeinschaftliche Polare und jeder solchen Polaren ein gemeinschaftlicher Pol. Ist demnach ein gemeinschaftlicher Pol in der Ebene zweier Kegelschnitte vorhanden, so gibt es immer auch eine zugehörige gemeinschaftliche Polare und umgekehrt.

Die Eckpunkte eines gemeinschaftlichen Polardreieckes sind diesen Erklärungen zufolge immer gemeinschaftliche Pole und seine Seiten gemeinschaftliche Polaren.

Wir wollen nun zunächst die Frage erledigen, wie man die gemeinschaftlichen Pole und Polaren in der Ebene zweier Kegelschnitte bestimmen kann und wie viele solche Punkte und Gerade in jedem Falle höchstens vorhanden sind.

K und K_1 seien zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte und M, M_1 die Pole einer beliebigen Geraden m dieser Ebene in Bezug auf K und K_1. Die Polaren aller Punkte von m in Bezug auf K bilden dieser Voraussetzung gemäss einen Strahlenbüschel S, dessen Mittelpunkt M ist, und alle Polaren von m in Bezug auf K_1 bilden einen Strahlenbüschel S_1, der seinen Mittelpunkt in M_1 hat. Die zwei Strahlenbüschel S und S_1 müssen projectivisch verwandt sein, da sowohl S als auch S_1 mit der durch die Punkte von m gebildeten Reihe projectivisch ist (Satz 32, 2. Abschnitt). S und S_1 erzeugen somit einen Kegelschnitt k, welcher durch M und M_1 geht. Derselbe hat die Eigenschaft, dass jeder seiner Punkte irgend einem und demselben Punkte von m sowohl in Bezug auf K, als auch auf K_1 conjugirt ist, denn jeder solche Punkt liegt zugleich in den zwei Polaren eines und desselben Punktes von m, da er ihren Schnittpunkt bildet.

Geht m durch einen gemeinschaftlichen Pol P von K und K_1, so liegen die Strahlenbüschel S und S_1 perspectivisch, denn die Polare p des Punktes P bildet dann einen Strahl, der beiden Büscheln entsprechend gemein ist; M und M_1 liegen nämlich in der Polaren des Punktes P. Der Kegelschnitt k geht in diesem Falle in ein System von zwei Geraden über, von denen eine die Polare p sein muss. Die andere geht durch P, nachdem P dem Schnittpunkte von m und p doppelt conjugirt ist. — Wir können nun die Sätze aufstellen:

80. Alle Punkte in der Ebene zweier Kegelschnitte K und K_1, welche den Punkten ein und derselben Geraden in Bezug auf beide Curven zugleich conjugirt sind, liegen auf einem Kegelschnitte k, der die zwei Pole dieser Geraden enthält. Geht letztere durch einen gemeinschaftlichen Pol P von K und K_1, so wird k durch ein System von zwei Geraden gebildet, wovon eine die Polare von P ist und die andere durch P hindurchgeht.

Alle Geraden in der Ebene zweier Kegelschnitte K und K_1, welche den durch ein und denselben Punkt gehenden Geraden in Bezug auf beide Curven zugleich conjugirt sind, umhüllen einen Kegelschnitt k, der die zwei Polaren dieses Punktes berührt. Liegt der letztere in einer gemeinschaftlichen Polaren p von K und K_1, so wird k durch ein System von zwei Punkten gebildet, wovon einer der Pol von p ist und der andere sich auf p befindet

Der Satz rechts ergibt sich aus jenem links nach dem Gesetze der. Reciprocität und lässt sich auch leicht direct nachweisen.

Jener Kegelschnitt, den wir durch k bezeichnet haben, enthält sämmtliche gemeinschaftliche Pole von K und K_1, welche überhaupt vorhanden sind. Denn ist p irgend eine gemeinschaftliche Polare und P ihr Pol, so muss P allen Punkten von p, also auch dem Schnittpunkte von p und m sowohl in Bezug auf K, als auch auf K_1 conjugirt sein und daher dem Kegelschnitte k angehören.

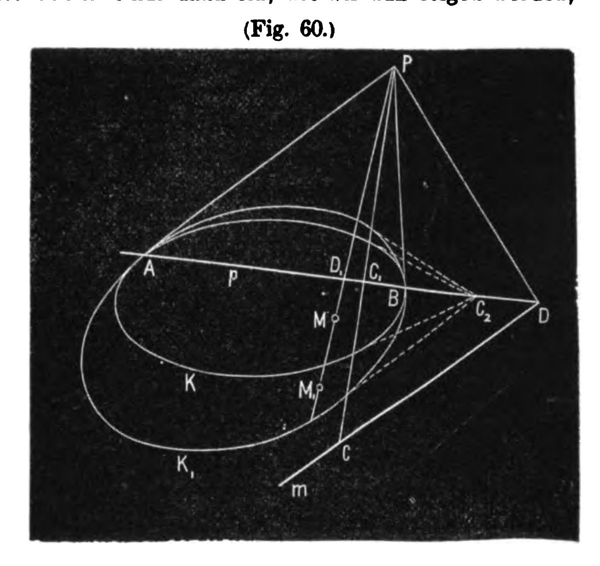
Nehmen wir eine zweite Gerade m_1 in der Ebene von K und K_1 an, deren Pole rücksichtlich dieser zwei Kegelschnitte μ und μ_1 heissen mögen und bestimmen zu den Punkten von m_1 die Polaren, so bilden letztere ebenfalls zwei projectivische Strahlenbüschel s und s_1 mit den Mittelpunkten μ und μ_1, welche Büschel einen Kegelschnitt erzeugen, den wir k_1 nennen wollen. Dieser Kegelschnitt hat die Eigenschaft, dass jeder seiner Punkte irgend einem und demselben Punkte von m_1 sowohl in Bezug auf K als auch auf K_1 conjugirt ist und enthält ebenso wie k alle möglichen gemeinschaftlichen Pole von K und K_1. Da nun m und m_1 sich schneiden, so müssen die beiden Kegelschnitte k und k_1 ebenfalls einen Punkt, nämlich den Schnittpunkt δ der zwei Polaren des Durchschnittes Δ der Geraden m und m_1 gemein

haben. Demnach schneiden sich k und k_1 jedenfalls noch in einem zweiten reellen Punkte P, aber höchstens noch in drei reellen Punkten P, P_1 und P_2.

Jeder Schnittpunkt von k und k_1, ausgenommen δ, muss ein gemeinschaftlicher Pol der Kegelschnitte K und K_1 sein, denn einem solchen Schnittpunkte P ist in m ein Punkt P' doppelt, d. h. in Bezug auf K und K_1 conjugirt, und ebenso in m_1 ein Punkt P'', woraus folgt, dass die Verbindungslinie $P'P''$ eine gemeinschaftliche Polare und P ein gemeinschaftlicher Pol sein muss. Dass δ im allgemeinen kein gemeinschaftlicher Pol sein kann, geht aus Folgendem hervor: Wäre δ ein gemeinschaftlicher Pol, so müsste demselben eine durch Δ gehende gemeinschaftliche Polare zugehören. Diese Polare müsste die Polare des Punktes P in einem Punkte π schneiden, der ebenfalls ein gemeinschaftlicher Pol wäre, nachdem der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Polaren, wie leicht einzusehen, immer ein gemeinschaftlicher Pol ist; der Punkt π wäre demnach ein gemeinsamer Punkt von k und k_1, daher gäbe es noch einen vierten gemeinsamen Punkt der letzteren Curven (Satz 76, 2. Abschnitt), also ausser δ, P und π noch einen vierten gemeinsamen Pol π_1. Da die Verbindungslinie zweier gemeinsamer Pole, wie man sich leicht überzeugt, stets eine gemeinsame Polare ist, so würde jede von den sechs Verbindungslinien der genannten vier Punkte eine gemeinschaftliche Polare sein, es müssten daher auch sechs gemeinsame Pole, folglich sechs Durchschnittspunkte von k und k_1 existiren, was nur möglich ist, wenn k und k_1, mithin auch m und m_1 zusammenfallen. Letzteres ist nun gegen unsere Voraussetzung, es zeigt sich also dass die Annahme, δ sei ein gemeinschaftlicher Pol, nicht statthaft ist.

Ein Fall ist allerdings denkbar, in welchem k und k_1 mehr als vier Punkte gemein haben, auch wenn m und m_1 nicht zusammenfallen. Dieser Fall ist jedoch ein ganz specieller und tritt nur dann ein, wie wir nun zeigen werden, wenn die beiden Kegelschnitte K und K_1 sich doppelt berühren.

(Fig. 60.)



In Fig. 60 seien K und K_1 zwei sich in den Punkten A und B berührende Kegelschnitte. Die gemeinsame Berührungssehne AB nennen wir p und ihren Pol P. — Dass p eine gemeinschaftliche Polare und P ein gemeinschaftlicher Pol von K und K_1 sein muss, ist selbstverständlich. — Nehmen wir nun eine beliebige

Gerade m in der Ebene der beiden Kegelschnitte an, wählen in dieser Geraden irgend einen Punkt C und bestimmen die Polaren von C in Bezug auf K und K_1, so zeigt sich, dass diese Polaren in einem Punkte C_2 der Berührungssehne p zusammentreffen. Um einzusehen, dass dies stattfinden muss, denke man sich die beiden Polaren von C dadurch ermittelt, dass man die Pole der von C ausgehenden Geraden CP und m bestimmt und die so erhaltenen Pole entsprechend verbindet. Die zwei Pole von CP in Bezug auf K und K_1 liegen, weil CP durch P geht auf der Polaren p von P; ist also C_1 der Schnittpunkt von CP mit p, so müssen die zwei Pole der Geraden CP in einem Punkte C_2 zusammenfallen, der so gelegen ist, dass er von C_1 durch A und B harmonisch getrennt wird (Satz 29, 2. Abschnitt). Welche Lage nun auch die zwei Pole M und M_1 von m in Bezug auf K und K_1 haben mögen, so werden die Verbindungslinien MC_2 und M_1C_2, nämlich die Polaren des Punktes C sich stets im Punkte C_2 treffen. Unsere Behauptung erscheint somit gerechtfertigt.

Nachdem für jeden Punkt der Geraden m dasselbe gelten muss, was wir für den Punkt C nachgewiesen haben, nämlich dass seine zwei Polaren sich in einem Punkte von p schneiden, so geht der in obiger Untersuchung durch k bezeichnete Kegelschnitt in unserem Fall in die zwei Geraden p und MM_1 über. Die beiden den Kegelschnitt erzeugenden Strahlenbüschel S und S_1 mit den Mittelpunkten M und M_1 liegen perspectivisch und haben somit die Gerade MM_1 entsprechend gemein. MM_1 geht immer durch P, wie auch m gewählt werden mag. Denn M liegt in der Polaren rücksichtlich K des Punktes D, in welchem sich p und m schneiden, und M_1 ist ein Punkt der Polaren von D in Bezug auf K_1. Diese beiden Polaren coincidiren mit der Geraden, welche P mit jenem Punkte D_1 verbindet, der von D durch A und B harmonisch getrennt wird. M und M_1 liegen somit auf der Geraden PD_1.

Wählt man statt m eine andere Gerade m_1, deren zwei Pole μ und μ_1 heissen mögen, so ergibt sich dasselbe, was für m gezeigt wurde. Der Kegelschnitt k_1 geht nämlich ebenfalls in ein System von zwei Geraden, p und $\mu\mu_1$, über, von denen $\mu\mu_1$ den Punkt P enthält. Die beiden Kegelschnitte k und k_1 haben also in unserem speciellen Falle sämmtliche Punkte der Berührungssehne p und den Punkt P gemein. Es ist dies nur eine Folge davon, dass in der Ebene der zwei Kegelschnitte K und K_1 (Fig. 60) eine Gerade p existirt, welche

1. die Eigenschaft hat, dass je zwei ihrer Punkte, z. B. C_1 und C_2, welche einander in Bezug auf K conjugirt sind, auch ein Paar conjugirter Punkte rücksichtlich K_1 bilden und dass

2. die zwei Polaren eines jeden Punktes von p, z. B. D, durch ein und denselben Punkt P hindurchgehen.

In Folge der ersten Eigenschaft muss p eine gemeinschaftliche Secante, in Folge der zweiten Eigenschaft eine gemeinschaftliche Polare von K und K_1 sein. Man sieht also, dass p zugleich eine gemeinschaftliche Secante und eine gemeinschaftliche Polare, somit eine Berührungssehne von K und K_1 sein muss

und dass der specielle Fall, in welchem k und k_1 mehr als vier Punkte gemein haben, demnach nur dann eintreten kann, wenn K und K_1 sich doppelt berühren.

Nachdem je zwei in Bezug auf K conjugirte Punkte z. B. D und D_1 der Geraden p auch rücksichtlich K_1 einander conjugirt sind, und die Polaren eines jeden Punktes von p durch P gehen, so ist jeder Punkt der Berührungssehne p ein gemeinschaftlicher Pol und jede durch den Pol von p gehende Gerade eine gemeinschaftliche Polare der zwei Kegelschnitte K und K_1. Je zwei einander doppelt conjugirte Punkte von p bilden mit dem Pole von p ein gemeinschaftliches Polardreieck, wie z. B. das Dreieck DPD_1, in welchem jede Seite die Polare des gegenüberliegenden Eckpunktes in Bezug auf beide Curven ist.

Als Endresultat unserer Untersuchung über die Anzahl der gemeinsamen Pole und Polaren stellen wir nun folgende Sätze auf:

81. Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben immer einen reellen gemeinschaftlichen Pol, im allgemeinen aber höchstens drei gemeinschaftliche Pole. Nur wenn die beiden Kegelschnitte sich in zwei Punkten berühren, sind unendlich viele reelle gemeinschaftliche Pole vorhanden, welche alle mit Ausnahme eines einzigen, der mit dem Pole der Berührungssehne coincidirt, auf der letzteren gelegen sind.

Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben immer eine reelle gemeinschaftliche Polare, im allgemeinen aber höchstens drei gemeinschaftliche Polaren. Nur wenn die beiden Kegelschnitte sich in zwei Punkten berühren, sind unendlich viele reelle gemeinschaftliche Polaren vorhanden, welche alle mit Ausnahme einer einzigen, die mit der Berührungssehne coincidirt, durch den Pol der letzteren gehen.

Wenn drei reelle gemeinschaftliche Pole P, P_1, P_2 vorhanden sind, so bilden sie die Eckpunkte eines gemeinschaftlichen Polardreieckes in welchem jede Seite die Polare des ihr gegenüberliegenden Eckpunktes ist. Würde man nämlich annehmen, z. B. P_1P_2 sei nicht die Polare von P, so müsste es irgend eine andere Gerade sein, man hätte dann im allgemeinen vier gemeinschaftliche Polaren und zwar die drei Seiten des Dreieckes PP_1P_2 und die Polare von P, was dem zuletzt aufgestellten Satze wiederspricht.

Nimmt man an, die Polare von P sei eine der durch P gehenden Seiten des genannten Dreieckes, so müsste diese Seite von beiden Kegelschnitten K und K_1 in P berührt werden. Zudem würden K und K_1 noch eine zweite Dreieckseite in einem der Punkte P_1 oder P_2 berühren; die beiden Kegelschnitte

müssten also eine zweifache Berührung eingehen, in welchem Falle unendlich viele gemeinschaftliche Pole vorhanden sind.

Dass es auch imaginäre gemeinschaftliche Pole und Polaren gibt, lehrt folgende Betrachtung: Es sei P ein (jedenfalls vorhandener) reeller gemeinschaftlicher Pol zweier Kegelschnitte K und K_1 und p seine Polare. Auf p nehmen wir beliebig viele Punkte $A, B, C \dots$ an, bestimmen die denselben in Bezug auf K conjugirten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ und ebenso die ihnen rücksichtlich K_1 conjugirten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ in der Geraden p. Die Punkte $\alpha, \beta, \gamma \dots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ bilden zwei projectivische Reihen R und R_1, nachdem sie beide mit der Reihe A, B, C projectivisch verwandt sind. Diese zwei Reihen haben somit zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte, welche wir P_1 und P_2 nennen wollen. Jeder solche Doppelpunkt ist nun, wie leicht einzusehen, ein gemeinschaftlicher Pol und da P_1 und P_2 immer zugleich imaginär sind, so können auch immer nur zwei imaginäre gemeinschaftliche Pole vorhanden sein. — In ganz analoger Weise kann gezeigt werden, dass auch imaginäre gemeinschaftliche Polaren nur zu zweien vorkommen.

Wenn R und R_1 identisch werden, so gibt es unendlich viele reelle Doppelpunkte. Es ist dies der Fall, in welchem K und K_1 sich doppelt berühren.

Wir können nun behaupten: Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben im allgemeinen ein einziges Polardreieck gemein, von dessen Ecken und Seiten je zwei imaginär sein können.

Sind a und b zwei gemeinschaftliche Secanten zweier Kegelschnitte K und K_1, ob sie nun eigentlich oder ideell sein mögen, so ist der Schnittpunkt P von a und b, wenn sich in demselben nicht auch K und K_1 schneiden, ein gemeinschaftlicher Pol der beiden Curven. Denn diesem Punkte P ist in a ein einziger Punkt A und auch in b ein einziger Punkt B in Bezug auf beide Kegelschnitte conjugirt, demnach muss die Gerade AB die Polare von P, sowohl rücksichtlich K, als auch K_1 sein, woraus folgt, dass AB eine gemeinschaftliche Polare und P ein gemeinschaftlicher Pol ist.

Heissen A und B zwei (eigentliche oder ideelle) Contingenzpunkte zweier Kegelschnitte K und K_1, so ist die Gerade AB, wenn sie keine gemeinschaftliche Tangente bildet, eine gemeinschaftliche Polare der beiden Curven. Jede durch A oder B gehende Gerade ist nämlich ein und derselben, beziehungsweise durch A oder B gehenden Geraden rücksichtlich K und K_1 conjugirt. Die zwei durch A und B gehenden Geraden, welche der Verbindungslinie AB doppelt conjugirt sind, schneiden sich nun in einem Punkte, dessen Polare in Bezug auf beide Kegelschnitte AB ist, folglich muss dieser Schnittpunkt ein gemeinschaftlicher Pol und AB eine gemeinschaftliche Polare sein. Es gelten somit die Sätze:

82. **Der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Secanten zweier Kegelschnitte ist immer ein gemeinschaftlicher Pol, wenn er nicht auf den beiden Curven liegt.**

Die Verbindungslinie zweier Contingenzpunkte zweier Kegelschnitte ist immer eine gemeinschaftliche Polare, wenn sie nicht beide Curven berührt.

Wenn zwei Kegelschnitte sich in vier reellen Punkten schneiden, so haben sie sechs eigentliche Secanten gemein, nämlich die sechs Verbindungslinien ihrer vier Schnittpunkte. Diese sechs Secanten bilden die Seiten eines den beiden Kegelschnitten eingeschriebenen vollständigen Viereckes und die Schnittpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten des letzteren bilden die Eckpunkte des gemeinschaftlichen Polardreieckes der zwei Kegelschnitte, wie aus dem obigen Satze (links) und auch aus dem Satze 37, 2. Abschnitt, unmittelbar hervorgeht. Zwei Kegelschnitte, welche sich in vier reellen Punkten schneiden, besitzen also immer drei reelle gemeinschaftliche Pole und Polaren.

Haben zwei Kegelschnitte vier reelle Tangenten gemein, so bilden letztere ein vollständiges Vierseit, welches beiden Curven umschrieben ist, und dessen sechs Ecken ebensoviele eigentliche Contingenzpunkte sind. Die drei Diagonalen dieses Vierseits bilden dem obigen Satze (rechts) und auch dem Satze 37, 2. Abschnitt, zufolge die Seiten eines dem Kegelschnitte gemeinsamen Polardreieckes. Zwei Kegelschnitte, welche von vier reellen gemeinsamen Tangenten berührt werden, haben demnach immer drei reelle gemeinschaftliche Pole und Polaren.

Wenn zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte sich nur in zwei reellen Punkten A und B schneiden, so kann nur ein reeller gemeinschaftlicher Pol vorhanden sein. Denn ist P ein gemeinschaftlicher Pol und p die zugehörige gemeinschaftliche Polare und verbindet man P mit A, so muss jener Punkt, welcher durch P und p von A harmonisch getrennt wird, nach Satz 29, 2. Abschnitt, ein gemeinsamer Punkt beider Kegelschnitte sein. Nimmt man also drei reelle gemeinschaftliche Pole an, so hätten die zwei Curven mehr als zwei Punkte gemein, was gegen die Voraussetzung ist.

Umgekehrt haben zwei Kegelschnitte K und K_1 immer zwei und nicht mehr reelle Punkte gemein, wenn in ihrer Ebene nur ein reeller gemeinschaftlicher Pol existirt. Denn vier reelle Punkte können K und K_1 nicht gemein haben, weil dann immer drei gemeinschaftliche Pole vorhanden sind; aber ebensowenig kann angenommen werden, dass die beiden Kegelschnitte sich in keinem reellen Punkte schneiden, nachdem auch in diesem Falle stets drei reelle gemeinschaftliche Pole vorhanden sein müssen, wie sich aus Folgendem ergibt. Ist P der reelle gemeinsame Pol von K und K_1 und p seine Polare, so liegen die beiden andern gemeinschaftlichen Pole, ob sie nun reell oder imaginär sein mögen, auf p. Letztere Gerade ist der Träger zweier involutorischer Reihen R und R_1. Entsprechende Punkte von R sind die in p gelegenen conjugirten

Punkte in Bezug auf K und die Reihe R_1 wird durch die in Bezug auf K_1 conjugirten Punkte der Geraden p gebildet. Jene Punkte P_1 und P_2, welche sowohl in R, als auch in R_1 einander entsprechen, müssen nun in Bezug auf beide Kegelschnitte einander conjugirt sein; sie bilden daher mit P die Ecken eines gemeinschaftlichen Polardreieckes und sind also gemeinschaftliche Pole. Wie bekannt gibt es nur dann in R und R_1 keine reellen Punkte P_1 und P_2, wenn R und R_1 Doppelpunkte haben, welche so gelegen sind, dass jene der einen Reihe durch die Doppelpunkte der andern getrennt werden (Satz 59, 1. Abschnitt). Nachdem die Polare p unter der Voraussetzung, dass K und K_1 keine reellen Punkte gemein haben, diese Curve keinesfalls so schneiden kann, dass die zwei Schnittpunkte der einen Curve durch jene der andern getrennt werden, so gibt es auch in p immer zwei reelle Punkte P_1 und P_2, also im Ganzen drei reelle gemeinschaftliche Pole.

Untersucht man in analoger Weise, wie viele reelle gemeinschaftliche Pole zwei Kegelschnitte haben können unter der Voraussetzung, dass sie nur zwei, oder keine reellen Tangenten gemein haben, so findet man, dass im ersten Falle nur ein reeller gemeinschaftlicher Pol vorhanden ist, während im zweiten stets drei solche Pole existiren. Auch zeigt sich, dass zwei Kegelschnitte, welche nur einen reellen gemeinschaftlichen Pol haben, immer von zwei und nicht mehr gemeinschaftlichen Tangenten berührt werden.

Als Endresultat der über die Anzahl reeller gemeinschaftlicher Pole angestellten Untersuchung können wir nun den Satz aufstellen:

83. Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte besitzen immer drei reelle gemeinschaftliche Pole, wenn sie vier oder keine reellen Schnittpunkte, sowie auch, wenn sie vier oder keine reellen gemeinsamen Tangenten haben. Schneiden sich die beiden Curven nur in zwei reellen Punkten, oder werden sie nur von zwei reellen gemeinsamen Tangenten berührt, so ist nur ein gemeinschaftlicher Pol vorhanden.

Daraus ergibt sich unmittelbar:

84. Haben zwei Kegelschnitte nur einen reellen gemeinsamen Pol, so schneiden sich dieselben immer nur in zwei reellen Punkten und werden stets nur von zwei reellen gemeinschaftlichen Tangenten berührt.

Ferner folgt hieraus:

85. Schneiden sich zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte nur in zwei reellen Punkten, so werden sie immer nur von zwei reellen gemeinschaftlichen Tangenten berührt und umgekehrt.

Bezüglich der Anzahl reeller gemeinschaftlicher Punkte und Tangenten von zwei in derselben Ebene befindlichen Kegelschnitten können demnach nur folgende Fälle eintreten. Die beiden Curven haben gemein:

1. Vier reelle Punkte und vier reelle Tangenten.
2. Vier reelle Punkte und keine reellen Tangenten.
3. Keine reellen Punkte und vier reelle Tangenten.
4. Keine reellen Punkte und keine reellen Tangenten.
5. Zwei reelle Punkte und zwei reelle Tangenten.

Es soll nun untersucht werden, wie viele gemeinschaftliche Secanten und Contingenzpunkte zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte in jedem Falle haben können.

Wenn zwei Kegelschnitte vier reelle Punkte gemein haben, so sind, wie bereits erwähnt, sechs eigentliche gemeinschaftliche Secanten vorhanden und wenn zwei solche Curven von vier reellen gemeinsamen Tangenten berührt werden, so gibt es sechs eigentliche Contingenzpunkte.

Schneiden sich zwei Kegelschnitte nur in zwei reellen Punkten A und B, so können sie nicht mehr als zwei gemeinschaftliche Secanten haben. Von letzteren ist nur eine, nämlich AB eine eigentliche. Nimmt man an a sei eine zweite gemeinschaftliche Secante, welche durch A oder B ginge, so müsste der zweite in a gelegene gemeinsame Punkt ebenfalls reell sein; die beiden Kegelschnitte hätten also mehr als zwei reelle Punkte gemein, was gegen die Voraussetzung ist. Es kann demnach nur angenommen werden, dass es ausser AB noch ideelle gemeinschaftliche Secanten gibt. Mehr als eine ideelle gemeinschaftliche Secante kann jedoch nicht vorhanden sein, denn in jeder solchen Secante liegen ein Paar imaginäre gemeinschaftliche Punkte und die Kegelschnitte müssten, wie oben gezeigt wurde coincidiren, wenn sie ausser den Punkten A und B noch zwei Paare imaginärer Punkte gemein hätten. Die aufgestellte Behauptung erscheint somit gerechtfertigt.

Haben zwei Kegelschnitte keinen reellen Punkt gemein, so ist klar, dass es nur ideelle gemeinschaftliche Secanten geben kann, und zwar höchstens zwei, nachdem zwei Kegelschnitte nicht mehr als zwei Paare von imaginären Punkten gemein haben können (Satz 77, 2. Abschnitt).

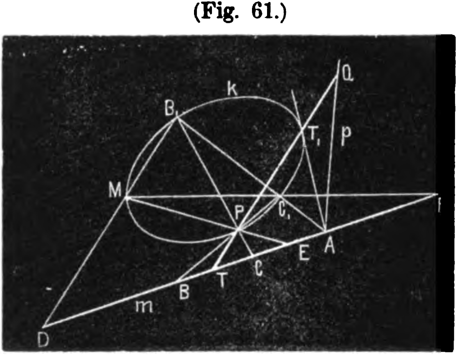
In ganz analoger Weise kann man sich überzeugen, dass wenn zwei Kegelschnitte nur zwei, oder keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten haben, höchstens zwei Contingenzpunkte existiren können. — Aus den zuletzt aufgestellten Betrachtungen ziehen wir nun den Schluss: Zwei Kegelschnitte welche sich in weniger als vier reellen Punkten schneiden, haben höchstens zwei gemeinschaftliche Secanten und wenn sie von weniger als vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten berührt werden, so haben sie höchstens zwei Contingenzpunkte.

Wir wollen nun zeigen, dass es in der Ebene zweier Kegelschnitte immer mindestens zwei gemeinschaftliche Secanten und zwei Contingenzpunkte gibt.

K und K_1 seien irgend zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte und m (Fig. 61) eine beliebige Gerade dieser Ebene. Wie bereits gezeigt wurde

liegen alle Punkte, welche den Punkten von m sowohl in Bezug auf K, als auch auf K_1 conjugirt sind, auf einem Kegelschnitte k, der durch die Pole M und M_1 von m hindurchgeht (Satz 80, 2. Abschnitt), und dieser Kegelschnitt enthält sämmtliche gemeinschaftliche Pole von K und K_1. Einer dieser Pole sei der Punkt P, ferner seien B und B_1 zwei in Bezug auf beide Kegelschnitte conjugirte Punkte, von denen B in m und B_1 in k gelegen sein soll. Die Gerade MB_1 ist dieser Annahme gemäss die Polare des Punktes B in Bezug auf K. Der Schnittpunkt von MB_1 mit m heisse D.

(Fig. 61.)



Endlich bezeichnen wir die Polare des gemeinschaftlichen Poles P durch p und den Schnittpunkt von p mit m durch A. Verbindet man P mit B_1, so ergibt sich im Schnitte von PB_1 mit m ein Punkt C, welcher dem Schnittpunkte C_1 der Geraden AB_1 und PB in Bezug auf beide Kegelschnitte conjugirt ist, wie wir nun zeigen werden.

Die Punkte M und P sind dem Punkte A in Bezug auf K conjugirt, nachdem A in der Polaren m von M und auch in der Polaren p von P liegt; daher ist MP die Polare von A rücksichtlich K. — Den Schnittpunkt von MP mit m nennen wir E und der Durchschnitt von MC_1 mit m heisse F. — Nachdem E in der Polaren von A rücksichtlich K liegt, so sind A und E conjugirte Punkte und ebenso müssen B und D einander in Bezug auf K conjugirt sein, da der Punkt D in der Polaren MB_1 von B gelegen ist. Die Punkte MB_1C_1P bilden die Ecken eines vollständigen Viereckes. Je zwei von den drei Paaren gegenüberliegender Seiten dieses Viereckes schneiden m in zwei einander entsprechenden Punkten einer involutorischen Reihe, die mit jener involutorischen Reihe identisch sein muss, welche durch die in Bezug auf K conjugirten Punktpaare entsteht. Denn von diesen beiden Reihen coincidiren die zwei Paare sich entsprechender Punkte A, E und B, D. Es müssen demnach die sich entsprechenden Punkte C und F ebenfalls conjugirte Punkte in Bezug auf K sein und da dem Punkte C auch M als Pol von m conjugirt ist, so muss MF die Polare von C in Bezug auf K sein, woraus folgt, dass C_1 dem Punkte C rücksichtlich K conjugirt ist.

Nimmt man nun statt M einen Punkt M_1 im Kegelschnitte k als Pol der Geraden m in Bezug auf K_1 an und führt im übrigen dieselbe Untersuchung mit M_1 durch, welche oben vorgenommen wurde, so ergibt sich, dass C dem Punkte C_1 auch bezüglich des Kegelschnittes K_1 conjugirt ist. C und C_1 sind also sowohl rücksichtlich K, als auch K_1 conjugirte Punkte und da C in m liegt, so muss C_1 ein Punkt des Kegelschnittes k sein.

Wir haben die doppelt conjugirten Punkte beliebig angenommen und gefunden, dass die Geraden AB_1 und PB sich in einem Punkte C_1 von k

schneiden. Zieht man daher umgekehrt aus A irgend eine Gerade AB_1, welche den Kegelschnitt in irgend zwei Punkten C_1 und B_1 schneidet, so muss der Schnittpunkt C der Geraden PB_1 mit m ein dem Punkte C_1 doppelt conjugirter sein und ebenso müssen der Schnittpunkt B von PC_1 mit m und der Punkt B_1 ein Paar doppelt conjugirter Punkte bilden. Wird nun aus A an k eine Tangente gezogen, deren Berührungspunkt wir T_1 nennen wollen, so coincidiren die Punkte B_1 und C_1 in T_1 und die Punkte B und C in dem Durchschnitte T der Geraden m mit PT_1; demnach sind T und T_1 ein Paar doppelt conjugirter Punkte. Da ferner auch der Punkt P und der Schnittpunkt Q von PT_1 mit p doppelt conjugirte Punkte sind, so muss PT_1 eine gemeinschaftliche Secante sein. Denn eine Gerade, auf der zwei Paare von Punkten (TT_1 und PQ) vorkommen, welche einander in Bezug auf zwei Kegelschnitte conjugirt sind, ist immer eine gemeinschaftliche Secante, nachdem die Doppelpunkte der durch diese Punktpaare bestimmten involutorischen Reihe in beiden Curven zugleich liegen. — Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass wenn A ausserhalb k liegt jedenfalls zwei gemeinschaftliche Secanten existiren, weil dann von A aus zwei reelle Tangenten an k gezogen werden können.

Wenn p den Kegelschnitt k schneidet, so sind die Schnittpunkte zugleich die zwei gemeinschaftlichen Pole, welche ausser P noch existiren können, denn diese Pole liegen, wie bereits erklärt wurde, auf p und zugleich in k. Schneidet p die Curve nicht, so sind demnach zwei gemeinschaftliche Pole imaginär. In diesem Falle liegt der Punkt A, wie jeder Punkt von p überhaupt, ausserhalb k und es ist daher möglich von A aus an k zwei Tangenten zu ziehen. Ist also nur ein reeller gemeinschaftlicher Pol vorhanden, so gibt es immer zwei gemeinschaftliche Secanten. Aber auch in dem Falle wenn p den Kegelschnitt k schneidet, wenn also drei reelle gemeinschaftliche Pole P, P_1, P_2 existiren, müssen K und K_1, zwei gemeinschaftliche Secanten haben, denn die Gerade m muss mindestens eine der Seiten des Dreieckes PP_1P_2 ausserhalb k schneiden; von diesem Schnittpunkte aus lassen sich zwei reelle Tangenten an k ziehen und es gibt somit auch zwei gemeinschaftliche Secanten. Dieselben gehen, wie leicht begreiflich, durch jenen Eckpunkt des gemeinschaftlichen Polardreieckes, welcher der Seite gegenüberliegt, aus deren Schnittpunkt mit m man reelle Tangenten an k zu ziehen vermag. — Es zeigt sich demnach, dass zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte immer zwei gemeinschaftliche Secanten haben.

In ganz analoger Weise kann man sich überzeugen, dass zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte stets zwei Contingenzpunkte besitzen; wir können somit den Satz aufstellen:

86. **Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben mindestens zwei gemeinschaftliche Secanten und zwei Contingenzpunkte, also auch immer vier aber nicht mehr**

(reelle oder imaginäre) Punkte und vier aber nicht mehr (reelle oder imaginäre) Tangenten gemein.

Liegt eine der gemeinschaftlichen Secanten zweier in derselben Ebene befindlicher Kegelschnitte K und K_1 in unendlicher Entfernung, so bestehen zwischen diesen Curven bemerkenswerthe Beziehungen. — Man nennt zwei solche Curven homothetische Kegelschnitte. — Nachdem je zwei Punkte A und A_1 der gemeinschaftlichen Secante a, welche rücksichtlich K einander conjugirt sind, es auch in Bezug auf K_1 sein müssen, so gehen die beiden Polaren von A durch A_1, d. h. die Polaren irgend eines Punktes von a schneiden sich in einem Punkte dieser Secante. Letztere liegt aber in unendlicher Entfernung, es sind daher die Polaren von A Durchmesser der zwei Kegelschnitte und müssen zu einander parallel sein, weil sie sich im unendlich fernen Punkte A_1 schneiden. Ist nun M der Mittelpunkt von K, also der Pol von a in Bezug auf K, so bilden die Geraden MA und MA_1 ein Paar conjugirter Durchmesser. Ebenso sind M_1A und M_1A_1 zwei conjugirte Durchmesser, wenn M_1 den Mittelpunkt der Curve K_1 bezeichnet. Da MA und M_1A, sowie auch MA_1 und M_1A_1 wegen der unendlich grossen Entfernung von A und A_1 zu einander parallel sind, so können wir schliessen, dass zwei parallelen Durchmessern von K und K_1 zwei parallele Durchmesser dieser Curven conjugirt sind. Es gilt also der Satz:

87. Parallele Durchmesser zweier homothetischer Kegelschnitte sind Durchmessern conjugirt, welche ebenfalls zu einander parallel laufen.

Auch der folgende Satz lässt sich nun leicht beweisen:

88. Wenn zwei Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes zu zwei Paaren conjugirter Durchmesser eines andern, in derselben Ebene befindlichen Kegelschnittes parallel laufen, so sind die beiden Kegelschnitte homothetisch.

Um dies einzusehen hat man nur zu berücksichtigen, dass die zwei Paare conjugirter Durchmesser des einen oder des anderen Kegelschnittes die unendlich ferne Gerade in zwei Paaren von Punkten schneiden, welche in Bezug auf beide Kegelschnitte einander conjugirt sind. Aus diesem Umstande folgt nämlich unmittelbar, dass die unendlich ferne Gerade eine gemeinschaftliche Secante beider Curven ist.

Zwei in derselben Ebene befindliche Kreise sind immer homothetische Kegelschnitte, nachdem solche Kreise, wie bereits erklärt wurde, stets zwei in der unendlich fernen Geraden gelegene imaginäre Punkte gemein haben, woraus gefolgert werden muss, dass diese Gerade eine gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise ist.

Wenn die Asymptoten zweier in derselben Ebene befindlicher Hyperbeln parallel laufen, so sind die beiden Curven ebenfalls homothetische Kegelschnitte,

nachdem die in unendlicher Entfernung gelegenen Schnittpunkte der parallelen Asymptoten gemeinschaftliche Punkte der zwei Hyperbeln bilden.

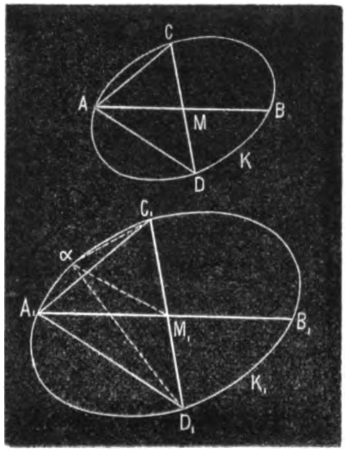
Zwei Parabeln, welche in derselben Ebene liegen und parallele Axen haben, sind auch homothetische Curven. Denn zwei solche Parabeln berühren sich in jenem Punkte der unendlich fernen Geraden, gegen welchen die Axen convergiren, woraus man schliessen kann, dass die unendlich ferne Gerade eine gemeinschaftliche Secante sei, bei welcher die zwei Schnittpunkte coincidiren.

Dass zwei homothetische Kegelschnitte höchstens zwei in endlicher Entfernung gelegene reelle oder imaginäre Schnittpunkte haben können, folgt unmittelbar aus dem obigen Satze 86.

Berühren sich zwei Kegelschnitte in zwei reellen oder imaginären Punkten der unendlich fernen Geraden, so haben die beiden Curven denselben Mittelpunkt, und liegen also concentrisch. Denn die unendlich ferne Gerade ist in diesem Falle eine Berührungssehne, woraus folgt, dass ihr Pol (der Mittelpunkt) in Bezug auf beide Kegelschnitte ein und derselbe Punkt sein muss. Zwei solche Kegelschnitte sind offenbar auch homothetische Curven. Sie haben keinen in endlicher Entfernung gelegenen reellen oder imaginären Punkt gemein. Liegen zwei homothetische Kegelschnitte concentrisch, so müssen sie umgekehrt auf der unendlich fernen Geraden zwei reelle oder imaginäre Berührungspunkte haben.

Sind K und K_1 (Fig. 62) zwei homothetische Kegelschnitte, AB und CD zwei beliebige Durchmesser von K und A_1B_1. C_1D_1 jenes Paar von Durchmessern der Curve K_1, welches dem ersteren parallel ist, so muss AC parallel zu A_1C_1 und AD parallel zu A_1D_1 sein. Um dies nachzuweisen, ziehen wir durch D_1 eine Parallele zu AD und verbinden den zweiten Schnittpunkt α dieser Parallelen und der Curve K_1 mit dem Punkte C_1. Nach Satz 42, 2. Abschnitt, geben αC_1 und αD_1 die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser von K_1 und ebenso AC und AD die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser von K an. Nachdem αD_1 parallel zu AD ist, so muss, obigem Satze 87 zufolge, αC_1 parallel zu AC sein, woraus wir schliessen können, dass die beiden Dreiecke ACD und αC_1D_1, sowie auch die Dreiecke ACM und αC_1M_1 einander ähnlich sind.

(Fig. 62.)



Aus der Aehnlichkeit der letzteren zwei Dreiecke folgt, dass die Winkel AMC und αM_1C_1 gleiche Grösse haben, was nur möglich ist, wenn α mit A_1 coincidirt, nachdem auch die Winkel AMC und $A_1M_1C_1$ einander gleich sind. Der Umstand, dass α mit A_1 coincidiren muss, rechtfertigt nun obige Behauptung und

wir können weiter schliessen, dass die Dreiecke AMC und $A_1M_1C_1$ einander ähnlich sind, so wie dass die Proportion besteht:

$$AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1,$$

welche aussagt:

89. Dass Längenverhältniss von irgend zwei parallelen Durchmessern zweier homothetischer Kegelschnitte hat eine constante Grösse.

Aus diesem Satze geht hervor, dass zwei homothetische Kegelschnitte immer ähnliche Curven sind. Man nennt sie desshalb und weil sie auch eine besondere gegenseitige Lage haben (Satz 87) ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte.

k) Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

Unter einem Kegelschnittbüschel versteht man die Gesammtheit aller Kegelschnitte, welche dieselben vier reellen oder imaginären Punkte gemein haben. In einem specielleren Sinne kann man auch die Gesammtheit irgend einer Anzahl solcher Kegelschnitte einen Kegelschnittbüschel nennen. Die vier gemeinschaftlichen Punkte heissen die Mittelpunkte des Büschels. Bezüglich der Realität derselben können nur drei Fälle eintreten. Entweder sind alle reell, oder zwei reell und zwei imaginär, oder sie sind alle imaginär. Nur im ersten Falle hat der Kegelschnittbüschel sechs eigentliche gemeinschaftliche Secanten. Im zweiten ist eine eigentliche und eine ideelle, im dritten sind zwei ideelle gemeinschaftliche Secanten vorhanden.

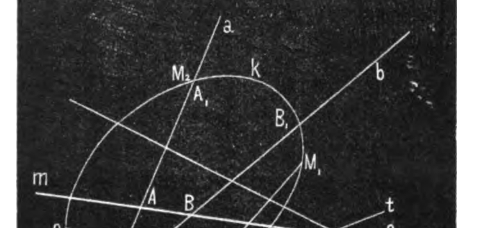
Eine Kegelschnittschaar besteht aus der Gesammtheit aller — oder auch beliebig vieler — Kegelschnitte, welche dieselben vier reellen oder imaginären Tangenten gemein haben. Diese Tangenten können entweder alle reell sein, oder es sind zwei reell und zwei imaginär, oder es sind alle imaginär. Im ersten Falle hat die Kegelschnittschaar sechs eigentliche, im zweiten Falle einen eigentlichen und einen ideellen, im dritten zwei ideelle Contingenzpunkte.

Ein Kegelschnittbüschel ist durch die Angabe seiner vier Mittelpunkte insoferne bestimmt, als jede Curve desselben durch die Angabe eines einzigen fünften Punktes seiner Ebene vollkommen bestimmt wird. Sind irgend zwei Curven des Büschels gegeben, so müssen die vier reellen oder imaginären Schnittpunkte derselben die Mittelpunkte des Büschels sein, daher erscheint jede Curve des Büschels durch irgend zwei Curven des letzteren und einen einzigen Punkt auch vollkommen bestimmt. Da die Mittelpunkte Doppelpunkte jener involutorischen Reihen sind, welche durch die Paare conjugirter Punkte der gemeinschaftlichen Secanten gebildet werden, so erscheinen diese Punkte umgekehrt auch durch die Angabe zweier involutorischer Reihen bestimmt, wenn vorausgesetzt wird, dass jedes Paar sich entsprechender Punkte der letzteren conjugirte Punkte in Bezug auf alle Curven des Büschels sein sollen.

Sind die gemeinschaftlichen Tangenten einer Kegelschnittschaar gegeben so ist jede Curve der Schaar durch ein einzige fünfte Gerade, welche diese Curve berühren soll, vollkommen bestimmt. Jede Curve einer Kegelschnittschaar ist ferner auch vollkommen bestimmt, wenn irgend zwei Curven der Schaar und eine Tangente der ersteren Curve gegeben sind. Die vier gemeinschaftlichen reellen oder imaginären Tangenten der zwei gegebenen Curven und die fünfte bekannte Tangente bestimmen nämlich einen Kegelschnitt unzweideutig. Ebenso erscheint jede Curve der Schaar vollkommen bestimmt, wenn zwei involutorische Strahlenbüschel gegeben sind, bei welchen man voraussetzt, dass je zwei sich entsprechende Strahlen in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar einander conjugirt sein sollen und wenn man ausserdem noch eine einzige Tangente der betreffenden Curve kennt. Die reellen oder imaginären Doppelstrahlen bilden nämlich unter der gemachten Voraussetzung die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschaar.

Es seien K und K_1 irgend zwei Curven eines Kegelschnittbüschels, a und b (Fig. 63) zwei (nach Satz 86, 2. Abschnitt) jedenfalls vorhandene gemeinschaftliche Secanten des letzteren, deren Schnittpunkt P kein Mittelpunkt des Büschels sein soll, und m eine beliebige Gerade, welche a in A und b in B schneidet. Der Punkt P ist nach Satz 82, 2. Abschnitt, für alle Curven des Büschels ein gemeinschaftlicher Pol. Seine Polare heisse p und der Schnittpunkt von p und m sei C. Nach Satz 80, 2. Abschnitt, liegen die Punkte, welche den Punkten von m in Bezug auf K und K_1 zugleich conjugirt sind, alle auf einem Kegelschnitte k. Dieser Kegelschnitt geht durch die Punkte A_1

(Fig. 63.)



und B_1, welche entsprechende Punkte beziehungsweise von A und B jener involutorischen Reihen sind, die auf den gemeinschaftlichen Secanten a und b durch alle Paare conjugirter Punkte der letzteren zu Stande kommen. Der Punkt P muss ebenfalls in k liegen, weil er dem Punkte C, der in der Polaren von P liegt, rücksichtlich beider Kegelschnitte zugleich conjugirt ist. Ferner liegen die Pole M und M_1 der Geraden m rücksichtlich K und K_1 auf k, wie der Satz 80, 2. Abschnitt, lehrt. Die Tangente t in M des Kegelschnittes k ist, wie aus der im vorigen Kapitel angestellten Untersuchung hervorgeht, die Polare eines Punktes T von m in Bezug auf K, dessen Polare in Bezug auf K_1 die Gerade MM_1 bildet. Der Kegelschnitt k muss demnach durch die Punkte A_1, B_1 und P gehen und ausserdem die Gerade t in M berühren. Diese Bedingungen bestimmen k vollkommen. Daraus folgt, dass ein Kegelschnitt k_1,

welcher alle Punkte enthält, die den Punkten von m in Bezug auf K und irgend eine Curve K_2 des Kegelschnittbüschels zugleich conjugirt sind, mit dem Kegelschnitte k coincidirt, nachdem es keinen von k verschiedenen Kegelschnitt gibt, der durch A_1, B_1, P geht und t in M berührt. Wir können hieraus weiter schliessen, dass der Pol M_2 der Geraden m in Bezug auf K_2 in k liegen muss.

Die zwei gemeinschaftlichen Pole der beiden Kegelschnitte K und K_1, welche ausser P noch existiren, sind, wie bereits gezeigt wurde, die reellen oder imaginären Schnittpunkte von p und k. Nachdem nun p und k unverändert bleiben, wenn man statt K_1 irgend eine andere Curve des Kegelschnittbüschels annimmt, so folgt, dass es in der Ebene eines Kegelschnittbüschels im allgemeinen nur drei Punkte gibt, welche gemeinschaftliche Pole in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels bilden und dass diese gemeinschaftlichen Pole im Kegelschnitte k gelegen sind. Von diesen drei gemeinschaftlichen Polen können zwei imaginär sein.

Bezüglich der Kegelschnittschaar ergeben sich analoge Resultate; wir können somit den Satz aufstellen:

90. Die Punkte, welche den Punkten irgend einer Geraden m in Bezug auf sämmtliche Curven eines Kegelschnittbüschels zugleich conjugirt sind, liegen alle auf einem einzigen Kegelschnitte k, der auch alle Pole von m in Bezug auf die Curven dieses Büschels, sowie die drei im allgemeinen vorhandenen gemeinschaftlichen Pole des Kegelschnittbüschels enthält.

Geht m durch einen gemeinschaftlichen Pol P des Büschels, so wird k durch ein System von zwei Geraden gebildet, wovon eine die Polare des Punktes P ist und die andere durch P hindurchgeht.

Die Geraden, welche den durch irgend einen Punkt M gehenden Geraden in Bezug auf sämmtliche Curven einer Kegelschnittschaar zugleich conjugirt sind, berühren einen einzigen Kegelschnitt k, der auch alle Polaren von M in Bezug auf die Curven dieser Schaar, sowie die drei im allgemeinen vorhandenen gemeinschaftlichen Polaren der Kegelschnittschaar berührt.

Liegt M in einer gemeinschaftlichen Polaren p der Schaar, so wird k durch ein System von zwei Punkten gebildet, wovon einer der Pol von p ist und der andere sich auf p befindet.

Wenn sämmtliche Curven eines Kegelschnittbüschels sich in denselben zwei Punkten berühren, so tritt der einzig mögliche Fall ein, in welchem es nicht bloss drei, sondern unendlich viele reelle gemeinschaftliche

Pole gibt, wie aus dem Satze 81, 2. Abschnitt, und den zuletzt angestellten Untersuchungen hervorgeht. Die gemeinschaftlichen Pole liegen dann alle auf der gemeinsamen Berührungssehne des Kegelschnittbüschels mit Ausnahme eines einzigen, welcher der Pol dieser Sehne ist. — Wenn sämmtliche Curven einer Kegelschnittschaar dieselben zwei Tangenten in denselben zwei Punkten berühren, so ist eine solche Schaar identisch mit einem Kegelschnittbüschel der oben erwähnten Art. Es gilt also für eine solche Kegelschnittschaar dasselbe, was bezüglich dieses Büschels bemerkt wurde.

Ist Q irgend ein Punkt der Geraden m (Fig. 63) und MQ_1 seine Polare in Bezug auf die Curve K des Kegelschnittbüschels, welche Polare den Kegelschnitt k in Q_1 schneidet, so ist Q_1 ein Punkt, der dem Punkte Q in Bezug auf alle Curven des Büschels conjugirt ist, denn die Polare des Punktes Q in Bezug auf irgend eine andere Curve des Büschels muss durch Q_1 gehen. Um dies einzusehen braucht man nur daran zu denken, dass k durch zwei Strahlenbüschel erzeugt wird, deren Strahlen die Polaren der Punkte von m in Bezug auf irgend zwei Curven des Büschels sind. Ist z. B. M der Pol von m in Bezug auf K und M_2 der Pol von m in Bezug auf K_2, so bilden M und M_2 die Mittelpunkte zweier den Kegelschnitt k erzeugender Strahlenbüschel. Der dem Strahle MQ_1 entsprechende nämlich die Polare von Q in Bezug auf K_2, muss nun die Gerade M_2Q_1 sein, welche MQ_1 in ihrem Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt k trifft. Nachdem aber die Gerade MQ_1 den Kegelschnitt ausser in M nur in dem einen Punkte Q_1 schneidet, so gibt es nur einen Punkt Q_1, welcher dem Punkte Q in Bezug auf K und den beliebig gewählten Kegelschnitt K_2 conjugirt ist. Aus dem Umstande dass K_2 irgend eine Curve des Büschels bezeichnet und dass für jede solche Curve sich derselbe Punkt Q_1 ergibt, können wir schliessen, dass wenn zwei Punkte Q und Q_1 einander in Bezug auf zwei Curven des Büschels conjugirt sind, dieselben zwei Punkte einander auch in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels conjugirt sein müssen.

Was wir bezüglich des Punktes Q gezeigt haben gilt bezüglich irgend eines anderen Punktes der Ebene des Kegelschnittbüschels, nachdem die Gerade m, sowie auch der Punkt Q in m ganz beliebig gewählt wurden.

Für die Kegelschnittschaar findet man analoge Resultate, es ergeben sich somit die Sätze:

91. Wenn zwei Punkte einander in Bezug auf zwei Curven eines Kegelschnittbüschels conjugirt sind, so müssen sie es auch in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels sein.

Wenn zwei Gerade einander in Bezug auf zwei Curven einer Kegelschnittschaar conjugirt sind, so müssen sie es auch in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar sein.

92. Die Polaren irgend eines Punktes Q in Bezug auf

Die Pole irgend einer Geraden q in Bezug auf sämmt-

sämmtliche Curven eines Kegelschnittbüschels gehen alle durch ein und denselben Punkt Q_1, nämlich durch jenen Punkt, welcher dem ersteren in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels conjugirt ist.

liche Curven einer Kegelschnittschaar liegen alle auf ein und derselben Geraden q_1, nämlich auf jener Geraden, welche der ersteren in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar conjugirt ist.

Wenn die im obigem Satze 90 (links) durch m bezeichnete Gerade in unendlicher Entfernung gelegen ist, so sind alle ihre Pole in Bezug auf die einzelnen Curven dieses Kegelschnittbüschels die Mittelpunkte dieser Curven. Es müssen also die Mittelpunkte aller Curven eines Kegelschnittbüschels in ein und demselben Kegelschnitte (k) liegen. Der letztere geht durch die gemeinschaftlichen Pole des Büschels, sowie auch durch die Centralpunkte jener involutorischer Reihen, welche auf den gemeinschaftlichen Secanten des Büschels durch conjugirte Punkte zu Stande kommen; denn jedem solchen Centralpunkte ist der in m gelegene unendlich ferne Punkt der betreffenden gemeinschaftlichen Secante in Bezug auf alle Curven des Büschels conjugirt. Die genannten Centralpunkte sind zugleich die Halbirungspunkte der von je zwei gemeinsamen Punkten des Kegelschnittbüschels begrenzten Strecken, nachdem je zwei solche gemeinsame Punkte zugleich die Doppelpunkte der erwähnten involutorischen Reihen bilden.

Befindet sich der im Satze 90 (rechts) durch M bezeichnete Punkt in unendlicher Entfernung, so gehen alle seine Polaren rücksichtlich der einzelnen Curven der Kegelschnittschaar in Durchmesser über. Demnach berühren alle einer bestimmten Richtung conjugirten Durchmesser der Curven einer Kegelschnittschaar ein und denselben Kegelschnitt, welcher dem Satze 90 zufolge auch von den gemeinschaftlichen Polaren der Schaar berührt wird.

Es ergeben sich hieraus folgende Sätze:

93. **Die Mittelpunkte aller Curven eines Kegelschnittbüschels liegen auf einem und demselben Kegelschnitte, welcher auch durch die gemeinschaftlichen Pole des Büschels hindurchgeht.**

94. **Die einer bestimmten Richtung conjugirten Durchmesser aller Curven einer Kegelschnittschaar berühren ein und denselben Kegelschnitt, welcher auch die gemeinschaftlichen Polaren der Schaar berührt.**

Aus den obigen Sätzen 92 ergeben sich, wenn man den im Satze links durch Q bezeichneten Punkt und die im Satze rechts durch q bezeichnete Gerade in unendlicher Entfernung annimmt, die folgenden speciellen Sätze:

95. **Die einer bestimmten Richtung conjugirten Durchmesser aller Curven eines Kegelschnittbüschels schneiden sich in einem einzigen Punkte.**

96. **Die Mittelpunkte aller Curven einer Kegelschnittschaar liegen auf ein und derselben Geraden.**

Ist k der Kegelschnitt, welcher alle Punkte enthält, die den Punkten einer beliebigen Geraden m in Bezug auf sämmtliche Curven eines Kegelschnittbüschels zugleich conjugirt sind (Satz 90), und schneidet m die Curve k in den Punkten D und D_1, so müssen letztere Punkte einander in Bezug auf alle Curven des Büschels conjugirt sein. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, nehmen wir an K und K_1 seien zwei Kegelschnitte des Büschels, welche die Gerade m berühren. — Im Kapitel f des zweiten Abschnittes wurde gezeigt, dass es entweder keine oder zwei reelle Kegelschnitte gibt, welche durch vier Punkte gehen und eine Gerade berühren. Wir setzen voraus, K und K_1 seien reell. — Die Berührungspunkte von K und K_1 mit m sind die Pole von m in Bezug auf diese zwei Kegelschnitte, folglich müssen sie nach Satz 90 in dem Kegelschnitte k liegen, d. h. die Berührung von K und K_1 mit der Geraden m erfolgt in jenen Punkten D und D_1, in welchen m den Kegelschnitt k schneidet, und umgekehrt. Wenn m die Curve k in imaginären Punkten schneidet, so sind demnach K und K_1 nicht reell vorhanden. Es frägt sich nun welchen Punkten sind D und D_1 in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels zugleich conjugirt? Dem Punkte D muss jedenfalls ein Punkt conjugirt sein, welcher auf m liegt, weil m die Polare von D in Bezug auf K ist. Nach Satz 90 muss aber der dem Punkte D in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels conjugirte Punkt auch in k liegen, folglich können dem Punkte D nur D oder D_1 in Bezug auf alle Curven des Büschels conjugirt sein. Von diesen zwei Punkten entspricht jedoch nur D_1 der gestellten Anforderung, denn D kann im allgemeinen nicht sich selbst rücksichtlich aller Curven conjugirt sein, nachdem diese Eigenschaft, wie leicht einzusehen ist, nur den vier gemeinsamen Punkten des Büschels zukommt. Wir müssen also schliessen, dass D und D_1, aber auch nur diese zwei Punkte von m, einander in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels conjugirt sind.

Für die Kegelschnittschaar ergeben sich durch analoge Betrachtungen ähnliche Resultate. Ist k jener Kegelschnitt, der von allen Geraden berührt wird, welche den durch irgend einen bestimmten Punkt M gehenden Geraden conjugirt sind, so findet man, dass die aus M an k gezogenen Tangenten einander in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar conjugirt sein müssen. Ausser diesen Tangenten gibt es keine zwei anderen durch M gehenden Geraden, welche die genannte Eigenschaft haben. — Es ergeben sich also die Sätze:

97. **Ist k jener Kegelschnitt, welcher alle Punkte enthält, die den Punkten einer**

Ist k jener Kegelschnitt, der von allen Geraden berührt wird, welche den durch einen

beliebigen Geraden m in Bezug auf sämmtliche Curven eines Kegelschnittbüschels conjugirt sind, so bilden die zwei Schnittpunkte von m mit k das einzige Paar von Punkten der Geraden m welche einander rücksichtlich aller Curven des Büschels conjugirt sind.

beliebigen Punkt M gehenden Geraden in Bezug auf sämmtliche Curven einer Kegelschnittschaar conjugirt sind, so bilden die aus M an k gezogenen Tangenten das einzige Paar von Geraden, welche durch M gehen und einander rücksichtlich aller Curven der Schaar conjugirt sind.

K_2 und K_3 seien nun zwei beliebige Curven des Kegelschnittbüschels, welche m beziehungsweise in den Punktpaaren A, A_1 und B, B_1 schneiden. Auf der Geraden m kommen durch alle in Bezug auf K_2, sowie durch alle in Bezug auf K_3 einander conjugirten Punkte zwei involutorische Reihen zu Stande, die ihre Doppelpunkte beziehungsweise in A, A_1 und B, B_1 haben. Nachdem die Schnittpunkte D, D_1 von m und k einander rücksichtlich aller Curven des Büschels, also auch in Bezug auf K_2 und K_3 conjugirt sein müssen, so trennen D und D_1 sowohl die Doppelpunkte A und A_1, als auch B und B_1 harmonisch; woraus folgt, dass die zuletzt genannten sechs Punkte eine involutorische Reihe bilden, deren Doppelpunkte D und D_1 sind (Siehe Satz 56, 1. Abschnitt, und die demselben beigefügten Bemerkungen). Die Kegelschnitte K_2 und K_3 wurden ganz beliebig angenommen, heissen daher C und C_1 die Schnittpunkte von m mit irgend einer dritten Curve K_4 des Büschels, so bilden auch A, A_1, D, D_1, C und C_1 sechs Punkte einer involutorischen Reihe und zwar derselben Reihe, welcher B und B_1 ebenfalls angehören (Satz 58, 1. Abschnitt). Wir ziehen aus dieser Untersuchung den Schluss, dass die Schnittpunkte von m mit sämmtlichen Curven des Kegelschnittbüschels eine involutorische Reihe bilden, deren Doppelpunkte D und D_1 sein müssen.

Bezüglich der Kegelschnittschaar erhält man analoge Resultate; es gelten somit die Sätze:

98. Die Schnittpunkte irgend einer Geraden mit den Curven eines Kegelschnittbüschels bilden eine involutorische Reihe. Entsprechende Punkte der letzteren sind je zwei in derselben Curve gelegene Schnittpunkte.

Die von irgend einem Punkte ausgehenden Tangenten an die Curven einer Kegelschnittschaar bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. Entsprechende Strahlen des letzteren sind je zwei dieselbe Curve berührende Tangenten.

Nachdem je zwei gemeinschaftliche Secanten eines Kegelschnittbüschels, welche sich nicht in einem der vier gemeinsamen Punkte des letzteren schneiden,

als ein dem Büschel angehöriger Kegelschnitt betrachtet werden können und zwei Contingenzpunkte einer Kegelschnittschaar, welche nicht in derselben gemeinsamen Tangente liegen, auch als ein zur Schaar gehörender Kegelschnitt aufzufassen ist, so erscheinen die Sätze 20, 2. Abschnitt (von denen der Satz links der „Satz des Desargues" genannt wird), als Specialitäten der eben angeführten Sätze.

Wenn zwei gemeinschaftliche Secanten eines Kegelschnittbüschels, welche sich in keinem der Mittelpunkte des letzteren schneiden, zu einander parallel sind, so liegt einer der gemeinschaftlichen Pole P des Büschels, nämlich der Schnittpunkt dieser parallelen Secanten, in unendlicher Entfernung (Satz 82, 2. Abschnitt). Daher geht die unendlich ferne Gerade der Ebene des Büschels unter der gemachten Voraussetzung durch P, woraus folgt, dass alle Pole der unendlich fernen Geraden in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels, nämlich alle Mittelpunkte dieser Curven, auf der Polaren des Punktes P liegen müssen. Hat ein Kegelschnittbüschel zwei solcher Paare von parallelen gemeinschaftlichen Secanten, so geht die unendlich ferne Gerade durch zwei gemeinschaftliche Pole und bildet somit eine gemeinschaftliche Polare des Büschels. Der Pol der unendlich fernen Geraden ist dann ein gemeinschaftlicher und zugleich der Mittelpunkt aller Curven des Büschels. Es gilt somit der Satz:

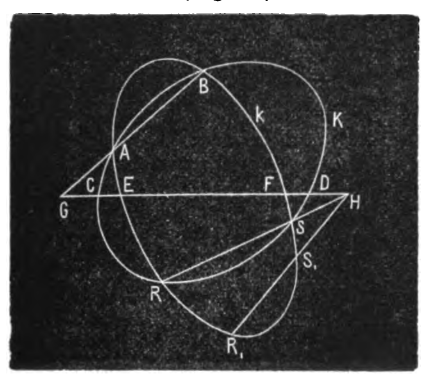
99. Hat ein Kegelschnittbüschel ein Paar von parallelen gemeinschaftlichen Secanten, deren unendlich ferner Schnittpunkt kein Mittelpunkt des Büschels ist, so liegen die Mittelpunkte aller Curven des Büschels auf ein und derselben Geraden, welche zugleich eine gemeinschaftliche Polare bildet. Gibt es zwei solche Paare von parallelen gemeinschaftlichen Secanten, so haben alle Curven des Kegelschnittbüschels ein und denselben Mittelpunkt, welcher zugleich ein gemeinschaftlicher Pol sein muss.

Ist die unendlich ferne Gerade eine gemeinschaftliche Secante eines Kegelschnittbüschels, so liegt ein gemeinschaftlicher Pol auf dieser Geraden, nämlich der Schnittpunkt der letzteren mit der jedenfalls vorhandenen zweiten gemeinschaftlichen Secante. Die Pole der unendlich fernen Geraden in Bezug auf sämmtliche Curven des Büschels liegen demnach in diesem Falle auf ein und derselben Geraden (Satz 90, 2. Abschnitt) und zwar auf der Polaren des erwähnten gemeinschaftlichen Poles. Je zwei Curven eines solchen Büschels sind homothetische Kegelschnitte. — Aus dieser Betrachtung ergibt sich der Satz:

100. Die Mittelpunkte aller Curven eines Kegelschnittbüschels, der eine in unendlicher Entfernung gelegene gemeinschaftliche Secante hat, liegen auf ein und derselben Geraden.

Wir wollen nun annehmen, es befinde sich in der Ebene eines Kegelschnittbüschels irgend ein Kegelschnitt k (Fig. 64), welcher durch zwei Mittelpunkte A und B des Büschels geht. C und D seien die zwei übrigen Mittelpunkte, K eine beliebige Curve des Büschels und R, S die zwei Schnittpunkte von K und k, welche ausser A und B noch vorhanden sein müssen. Den Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Secanten des Büschels AB und CD nennen wir G, der Schnittpunkt von RS und CD heisse H und die Schnittpunkte von CD mit k seien E und F. Diesen Voraussetzungen gemäss bilden die Punktpaare GH, CD und EF nach Satz 98, 2. Abschnitt, Paare entsprechender Punkte einer involutorischen Reihe;

(Fig 64.)



denn man kann K und k als Curven eines Kegelschnittbüschels betrachten, dessen Mittelpunkte $ABRS$ sind. Diese involutorische Reihe wird durch die Punkte $CDEF$ vollkommen bestimmt, insoferne, als zu jedem Punkte der Geraden CD (z. B. G) sich nur ein einziger Punkt (H) als entsprechender Punkt der Reihe ergeben kann. Nimmt man daher statt K irgend eine andere Curve K_1 des Kegelschnittbüschels (mit den Mittelpunkten $ABCD$) an, so muss k die Curve K_1 in zwei Punkten R_1, S_1 treffen, deren Verbindungslinie ebenfalls durch H geht. — Für die Kegelschnittschaar findet man ein analoges Resultat. Sind nämlich $abcd$ die vier gemeinschaftlichen Tangenten einer Kegelschnittschaar und nimmt man irgend einen Kegelschnitt k an, welcher zwei dieser Tangenten, etwa a und b, berührt, so liegen die Schnittpunkte der zwei ausser a und b noch vorhandenen gemeinsamen Tangenten von k und irgend einer Curve der Schaar auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von c und d geht. Es gelten somit die folgenden Sätze:

101. Legt man durch zwei von den vier Mittelpunkten $ABCD$ eines Kegelschnittbüschels, etwa durch A und B einen beliebigen Kegelschnitt, so schneidet derselbe jede Curve des Büschels im allgemeinen noch in zwei Punkten. Die Verbindungslinie von je zwei solchen Punkten treffen sich in ein und demselben Punkte, welcher auf

Legt man berührend an zwei von den vier gemeinsamen Tangenten $abcd$ einer Kegelschnittschaar, etwa a und b, einen beliebigen Kegelschnitt, so hat derselbe mit jeder Curve der Schaar im allgemeinen noch zwei Tangenten gemein. Die Durchschnittspunkte von je zwei solchen Tangenten liegen auf ein und derselben Geraden,

der gemeinschaftlichen Secante *CD* liegt.

welche durch den Schnittpunkt von *c* und *d* geht.

Nimmt man an, der durch *A* und *B* gehende Kegelschnitt (Satz links) bestehe aus einem Systeme von zwei Geraden g und g_1, wovon die eine durch *A*, die andere durch *B* geht, so bilden die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Curven des Büschels zwei Punktreihen, welche perspectivisch liegen müssen, nachdem die Verbindungslinien von je zwei in derselben Curve liegenden Schnittpunkten dem obigen Satze zufolge in ein und demselben Punkte der gemeinschaftlichen Secante *CD* zusammentreffen. Wählt man statt g_1 irgend eine andere durch *B* gehende Gerade g_2, so gilt für g und g_2 offenbar dasselbe, was bezüglich g und g_1 gezeigt wurde. Daraus geht hervor, dass die Punktreihen, welche auf den beliebigen, durch *B* gehenden Geraden g_1 und g_2 liegen, projectivisch verwandt sein müssen. — Wird angenommen, der im obigen Satze rechts erwähnte Kegelschnitt, welcher *a* und *b* berührt, bestehe aus einem Systeme von zwei Punkten *P* und P_1, wovon der eine in *a* der andere in *b* gelegen ist, so bilden die Tangenten, welche von *P* und P_1 aus an sämmtliche Curven der Schaar gezogen werden können, zwei perspectivisch liegende Strahlenbüschel. Denn obigem Satze zufolge schneiden sich je zwei solcher, dieselbe Curve der Schaar berührende Tangenten in ein und derselben durch den Schnittpunkt von *c* und *d* gehenden Geraden. Nimmt man statt P_1 einen andern Punkt P_2 von *b* an, so ergibt sich für *P* und P_2 dasselbe, was für *P* und P_1 nachgewiesen wurde, woraus folgt, dass der Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte P_1 und jener mit dem Mittelpunkte P_2 projectivisch verwandt sind.

Durch diese Betrachtungen erscheinen folgende Sätze gerechtfertigt:

102. Die Schnittpunkte der Curven eines Kegelschnittbüschels mit irgend zwei durch einen der Mittelpunkte *ABCD* des Büschels gehenden Geraden bilden zwei projectivische Punktreihen. Gehen die zwei Geraden durch verschiedene Mittelpunkte *A* und *B*, so liegen diese zwei Reihen perspectivisch. Ihr Projectionscentrum befindet sich in *CD*. Entsprechende Punkte der zwei Reihen sind je zwei in derselben Curve gelegene Schnittpunkte.

Die Tangenten der Curven einer Kegelschnittschaar, welche von zwei in einer der gemeinsamen Tangenten *abcd* der Schaar gelegenen Punkten ausgehen, bilden zwei projectivische Strahlenbüschel. Liegen die zwei Punkte in verschiedenen gemeinsamen Tangenten *a* und *b*, so befinden sich diese zwei Strahlenbüschel in perspectivischer Lage. Ihr Durchschnitt geht durch den Schnittpunkt von *c* und *d*. Entsprechende Strahlen der zwei Büschel sind je zwei dieselbe Curve berührende Tangenten.

Aus dem Satze 101 (links) ergibt sich der folgende, wenn man annimmt dass der Kegelschnitt zwei unendlich ferne Mittelpunkte habe, also aus einem Systeme homothetischer Kegelschnitte bestehe:

103. Hat ein Kegelschnittbüschel eine unendlich ferne gemeinschaftliche Secante und legt man durch die zwei nicht in dieser Secante gelegenen Mittelpunkte des Büschels irgend einen Kegelschnitt, so schneidet der letztere jede Curve des Büschels im allgemeinen noch in zwei Punkten. Die Verbindungslinien von je zwei solchen Punkten sind alle zu einander parallel.

Der Satz 101 (links) gibt uns ein Mittel an die Hand, die ideelle gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte K und K_1 zu construiren, wenn zwei nicht auf dieser Secante gelegene Schnittpunkte A und B der beiden Kegelschnitte bekannt sind. Man legt durch A und B irgend einen Kegelschnitt k, welcher K in R, S und K_1 in R_1, S_1 schneidet; die Verbindungslinien RS und R_1S_1 treffen sich dann in einem Punkte der gesuchten ideellen Secante. Dasselbe Verfahren liefert einen zweiten Punkt dieser Secante, wenn man statt k irgend einen andern, die Curven K und K_1 schneidenden Kegelschnitt annimmt, welcher durch A und B geht. Eine specielle Anwendung findet das eben erklärte Verfahren, wenn es sich darum handelt, die in endlicher Entfernung gelegene gemeinschaftliche Secante zweier Kreise K und K_1, welche keinen reellen Punkt gemein haben, zu ermitteln. Man zieht irgend einen dritten Kreis k, welcher K und K_1 beziehungsweise in R, S und R_1, S_1 schneidet. Der Schnittpunkt von RS und R_1S_1 ist ein Punkt der gesuchten Secante. Ein zweiter Punkt ergibt sich auf gleiche Weise. Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen braucht man nur daran zu denken, dass alle in ein und derselben Ebene befindliche Kreise eine unendlich ferne gemeinschaftliche Secante haben.

Ein System confocaler Kegelschnitte bildet eine Kegelschnittschaar mit vier imaginären Tangenten. Ist nämlich F ein gemeinschaftlicher Brennpunkt der Curven eines solchen Systems und K irgend eine Curve des letzteren, so bildet F den Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels S, in welchem je zwei sich entsprechende Strahlen rücksichtlich K conjugirt sind und auf einander senkrecht stehen. Durch die Angabe des Punktes F allein erscheint somit S, unabhängig von der Curve K, vollkommen bestimmt, da der Büschel S eine rechtwinklige Involution bildet. Jedes Paar entsprechender Strahlen desselben ist also nicht bloss rücksichtlich K conjugirt, sondern auch in Bezug auf jeden beliebigen Kegelschnitt, der einen Brennpunkt in F hat. Hieraus folgt, dass die Doppelstrahlen von S imaginäre Tangenten aller Curven, des in Rede stehenden Systems confocaler Kegelschnitte sein müssen. Nachdem für den zweiten Brennpunkt F_1 dasselbe gilt, was bezüglich des Punktes F bemerkt wurde, so hat das genannte System vier gemeinschaftliche imaginäre Tangenten

und bildet somit eine Kegelschnittschaar. F und F_1 sind zugleich die zwei Contigenzpunkte dieser Schaar.

Durch jeden Punkt der Ebene einer Schaar, confocaler Kegelschnitte gehen zwei Curven der Schaar, welche sich rechtwinklig durchschneiden. (Sätze 56 und 57, 2. Abschnitt). Die eine dieser Curven ist eine Ellipse, die andere eine Hyperbel, wenn beide Brennpunkte in endlicher Entfernung liegen. Befindet sich ein Brennpunkt in unendlicher Entfernung, so sind selbstverständlich alle Curven der Schaar Parabeln.

Aus dem Umstande, dass eine Schaar confocaler Kegelschnitte ein und denselben Mittelpunkt hat, folgt, dass die unendlich ferne Gerade, nämlich die Polare des Mittelpunktes, eine gemeinschaftliche Polare der Schaar ist, und dass der Mittelpunkt selbst demnach ein gemeinschaftlicher Pol sein muss. Da die Axen aller Curven der Schaar zusammenfallen, so sind die in den Endpunkten der Hauptaxen gezogenen Tangenten zu einander parallel und ebenso die Tangenten in den Endpunkten der Nebenaxen, woraus folgt, dass die beiden Axen gemeinschaftliche Polaren der Schaar bilden.

Ist P irgend ein Punkt in der Ebene der Schaar, so gehen, wie bereits erwähnt, durch denselben zwei sich rechtwinklig schneidende Curven K und K_1 der Schaar. Die Tangenten dieser Curven in P sind zwei Gerade, welche einander sowohl in Bezug auf K, als auch auf K_1 conjugirt sind, denn jede geht durch den Pol der andern, folglich müssen sie nach Satz 90, 2. Abschnitt, einander in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar conjugirt sein. Wir schliessen hieraus, dass je zwei Gerade, welche einander in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar conjugirt sind, auf einander senkrecht stehen müssen, nachdem eine Gerade, wenn sie keine gemeinschaftliche Polare ist, nur einer einzigen Geraden in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar conjugirt sein kann. Es gilt somit der Satz:

104. Je zwei Gerade, welche in Bezug auf sämmtliche Curven einer Schaar confocaler Kegelschnitte conjugirt sind, stehen auf einander senkrecht.

Sämmtliche Gerade, welche den durch irgend einen bestimmten Punkt P gehenden Geraden in Bezug auf alle Curven der Schaar conjugirt sind, berühren ein und denselben Kegelschnitt k (Satz 90, 2. Abschnitt). Dieser Kegelschnitt ist immer eine Parabel, nachdem k auch die gemeinschaftlichen Polaren der Schaar, also die unendlich ferne Gerade berühren muss. Heissen g und g_1 die durch P gehenden, in Bezug auf sämmtliche Curven der Schaar conjugirten Geraden, so berühren g und g_1 die erwähnte Parabel ebenfalls. Nachdem nun diese Parabel die beiden Axen (als gemeinschaftliche Polaren) und die auf einander senkrecht stehenden Geraden g und g_1 tangirt, so muss die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte der confocalen Curven die Leitlinie der Parabel sein (Satz 71, 2. Abschnitt). Wir können somit den Satz aufstellen:

105. Alle Geraden, welche den durch irgend einen bestimmten Punkt P gehenden Geraden in Bezug auf sämmt-

liche Curven einer Schaar confocaler Kegelschnitte conjugirt sind, berühren eine Parabel. Die Axen der Schaar tangiren letztere ebenfalls und die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte der Schaar ist die Leitlinie dieser Parabel.

l) Berührung zweiter und dritter Ordnung zwischen zwei Kegelschnitten. — Krümmungshalbmesser.

Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte haben immer vier (reelle oder imaginäre) Punkte gemein (Satz 86, 2. Abschnitt). Von diesen vier Punkten können zwei oder drei coincidiren, oder es können auch alle zusammenfallen. Wir haben bereits gezeigt, dass zwei solche Punkte nur in einem reellen Punkte coincidiren und dass eine gemeinschaftliche Secante, ob sie nun eine eigentliche oder ideelle sein mag, stets eine reelle Tangente sein muss, wenn ihre Schnittpunkte mit den Curven in einen Punkt zusammenfallen. Wenn also zwei von den vier gemeinschaftlichen Punkten zweier Kegelschnitte in einem Punkte P coincidiren, so haben die zwei Curven in P eine reelle gemeinschaftliche Tangente. Es findet dann zwischen beiden Kegelschnitten eine Berührung der ersten Ordnung statt. Fallen drei gemeinschaftliche Punkte in P zusammen, so müssen die beiden Kegelschnitte in P ebenfalls eine gemeinschaftliche Tangente und ausser den in P vereinigten Punkten noch einen vierten Punkt gemein haben, welcher immer reell ist, nachdem imaginäre Punkte nur paarweise vorkommen. In diesem Falle gehen die beiden Curven eine Berührung der zweiten Ordnung ein. Coincidiren endlich alle vier gemeinsamen Punkte der zwei Kegelschnitte in einem einzigen Punkte P, so fallen auch alle gemeinsamen Secanten in eine Gerade zusammen und bilden eine Tangente, welche beide Curven in P berührt. Wie leicht einzusehen, können die zwei Curven ausser den vier coincidirenden Punkten keine weiteren reellen oder imaginären Punkte gemein haben. Zwischen den Kegelschnitten findet in diesem Falle eine Berührung dritter Ordnung statt. Eine Berührung höherer als dritter Ordnung ist zwischen zwei verschiedenen Kegelschnitten nicht möglich, nachdem zwei solche Curven, wenn sie fünf Punkte gemein haben würden, identisch sein müssten.

Zwischen zwei verschiedenen Kreisen kann nur eine Berührung erster Ordnung stattfinden, denn eine Berührung zweiter Ordnung würde bedingen, dass die Kreise ausser den zwei imaginären Kreispunkten der unendlich fernen Geraden noch drei Punkte, also im Ganzen fünf Punkte gemein hätten. Zwischen einem Kreise und irgend einem anderen Kegelschnitte ist im allgemeinen nur eine Berührung erster oder zweiter Ordnung möglich. Ist nämlich P irgend ein Punkt eines beliebigen Kegelschnittes und würde verlangt, dass man einen Kreis construire, welcher mit dem Kegelschnitte vier in P coincidirende Punkte gemein

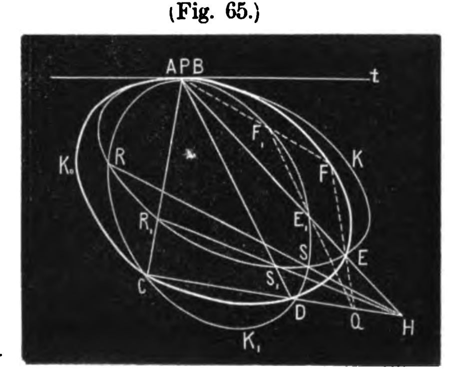
habe, so wäre der Kreis durch sechs Punkte, und zwar durch die vier Punkte in P und die zwei imaginären Kreispunkte der unendlich fernen Geraden gegeben. Einen Kreis zu ermitteln, welcher diesen Bedingungen entspricht, würde also im allgemeinen unmöglich sein.

Von zwei Kegelschnitten, welche eine Berührung höherer als erster Ordnung eingehen, sagt man, dass sie in dem Punkte ihrer Berührung osculiren. Der Berührungspunkt selbst heisst dann der Osculationspunkt. Findet zwischen irgend einem Kegelschnitte und einem Kreise eine Berührung höherer als erster Ordnung statt, so nennt man den Kreis einen osculirenden oder Krümmungskreis für jenen Punkt, in welchem die Berührung erfolgt, und den Halbmesser dieses Kreises den Krümmungs-Halbmesser für letzteren Punkt.

Ist K irgend ein Kegelschnitt und P ein beliebiger Punkt desselben, so gibt es unendlich viele andere Kegelschnitte Ko, welche mit K im Punkte P eine Berührung zweiter oder dritter Ordnung eingehen, denn Ko ist durch die drei, beziehungsweise vier in P vereinigten Punkte nicht vollkommen bestimmt. Unter allen Kegelschnitten Ko gibt es jedoch nur einen einzigen Kreis, welcher mit K im Punkte P osculirt, denn die drei in P vereinigten Punkte und die zwei imaginären Kreispunkte der unendlich fernen Geraden bestimmen diesen Kreis vollkommen.

Es soll zunächst erklärt werden, wie man einen Kegelschnitt ermittelt, der mit einem gegebenen Kegelschnitte eine Berührung zweiter Ordnung eingeht. Der gegebene Kegelschnitt sei K (Fig. 65) und der Punkt, in welchem die Osculation erfolgen soll, heisse P. Die Tangente t in P kann man als eine Secante der Curve K betrachten, deren Schnittpunkte A und B in P coincidiren. Nimmt man nun zwei beliebige Punkte C und D in der Ebene von K an und betrachtet dieselben, sowie die Punkte A und B (nämlich P) als Mittelpunkte eines Kegelschnittbüschels, so werden sämmtliche Curven dieses Büschels die Gerade t in P berühren, und eine von den Curven des Büschels wird mit K im Punkte P osculiren, wie aus Folgendem hervorgeht:

(Fig. 65.)



Ist K_1 irgend eine Curve des genannten Kegelschnittbüschels und schneiden sich K und K_1 in den Punkten R und S, so geht die Gerade RS nach Satz 101, 2. Abschnitt, durch einen bestimmten Punkt H der Geraden CD, wie man auch die Curve K_1 annehmen mag. Wird z. B. statt K_1 das System der zwei Geraden PC und PD gewählt und schneiden letztere den gegebenen Kegelschnitt K in R_1 und S_1, so muss auch $R_1 S_1$ durch H gehen (Vergleiche Fig. 64). Ver-

ändert man daher die Curve K_1 derart, dass sie nach und nach mit allen Curven des Kegelschnittbüschels zusammenfällt, so dreht sich die Gerade RS um den Punkt H und wird einmal mit der Geraden PH coincidiren. Der Punkt R fällt dann mit P und S mit jenem Punkte E zusammen, in welchem PH den gegebenen Kegelschnitt K trifft. Für diese Lage von RS geht K_1 in den Kegelschnitt Ko über, der in P drei Punkte, nämlich A, B und R mit K gemein hat, also mit K im Punkte P osculirt, und zwar findet zwischen Ko und K eine Berührung zweiter Ordnung statt. Dass ausser Ko keine andere Curve des in Rede stehenden Kegelschnittbüschels mit K osculiren kann folgt daraus, dass es nur eine einzige Lage der Geraden RS gibt, in welcher letztere durch P geht.

Der osculirende Kegelschnitt Ko ist durch die beliebig gewählten Punkte C, D, den Punkt E und die Tangente t mit ihrem Berührungspunkte P vollkommen bestimmt und es könnten mit Hilfe des Pascal'schen Satzes beliebig viele andere Punkte von Ko ermittelt werden. Indess findet man auch beliebig viele Punkte von Ko wie folgt: Man zieht durch P irgend eine Gerade PF, welche den Kegelschnitt K_1 in F_1 schneidet, verbindet E_1, nämlich den Schnittpunkt von K_1 und der Geraden PH mit F_1 und bestimmt den Durchschnitt Q der Geraden E_1F_1 mit CD. Der Punkt F, in welchem sich die Geraden PF und QE treffen, ist dann ein Punkt von Ko. — Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich aus dem Satze 102, 2. Abschnitt. Die Geraden PF und PE schneiden nämlich die Curven des Kegelschnittbüschels, zu welchen Ko und K_1 gehören in perspectivisch liegenden Punktreihen, deren Projectionscentrum Q sich in CD befindet. Nachdem nun je zwei entsprechende Punkte der beiden projectivischen Reihen dem genannten Satze zufolge in ein und derselben Curve liegen müssen und die Punkte E und F entsprechende Punkte der Reihen PF_1F und PE_1E sind, so muss F ein Punkt von Ko sein.

Statt des Kegelschnittes K_1 kann irgend ein Kreis angenommen werden, welcher t in P berührt und den gegebenen Kegelschnitt K schneidet. Die Punkte C und D müssen selbstverständlich in diesem Kreise gewählt werden.

Handelt es sich bloss um die Bestimmung eines Punktes E in K, durch welchen der osculirende Kegelschnitt gehen muss, wenn man C und D bereits gewählt hat, so bedarf man des Kegelschnittes K_1 nicht. Man zieht nämlich bloss die Geraden PC und PD, welche K in R_1 und S_1 schneiden, und verbindet den Schnittpunkt H von R_1S_1 und CD mit P. Die Gerade PH trifft dann den gegebenen Kegelschnitt im Punkte E, welcher mit C, D, P und der Tangente t den osculirenden Kegelschnitt vollkommen bestimmt.

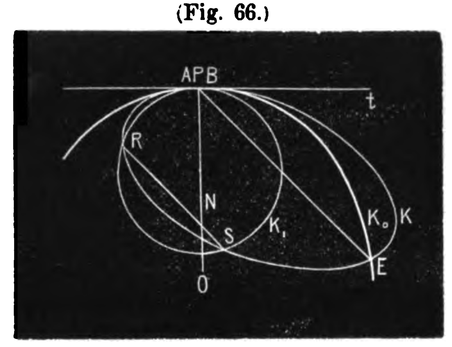
Eine Eigenthümlichkeit des osculirenden Kegelschnittes ist, dass er den zweiten Kegelschnitt im Osculationspunkte schneidet. Dies geht aus dem Umstande hervor, dass K und Ko ausser dem Osculationspunkte P nur noch den Punkt E gemein haben. Der eine Curventheil von Ko zwischen den Punkten E und P liegt ganz innerhalb K, der andere ganz ausserhalb, woraus folgt, dass die Curve Ko in P vom Aeussern in das Innere der

Curve K eindringt, also K in P schneiden muss. Bei der Berührung erster Ordnung findet ein Schneiden der sich berührenden Kegelschnitte im Berührungspunkte nicht statt, wie leicht einzusehen ist, wenn man berücksichtigt, dass zwei sich in erster Ordnung berührende Kegelschnitte ausser dem Berührungspunkte immer noch zwei imaginäre oder zwei reelle gemeinsame Punkte haben.

Wird verlangt, dass der osculirende Kegelschnitt Ko ein Kreis sei, so ist Ko, wie bereits erklärt, vollkommen bestimmt. — Es soll nun gezeigt werden wie man Ko in diesem Falle ermitteln kann.

Ist K (Fig. 66) der gegebene Kegelschnitt, P der Osculationspunkt und t die Tangente in diesem Punkte, so errichtet man in P auf t eine Senkrechte PN, d. h. man zieht die Normale der Curve K in P. Der Mittelpunkt des gesuchten osculirenden Kreises, sowie jedes Kreises überhaupt, der K in P berührt, muss auf dieser Senkrechten liegen. Wird nun ein beliebiger Kreis K_1 gezeichnet, welcher t in P berührt und K in irgend zwei Punkten R und S schneidet, und zieht man ferner durch P zu RS eine parallele Gerade, so trifft letztere den gegebenen Kegelschnitt in einem Punkte E, der dem osculirenden Kreise Ko angehört.

(Fig. 66.)

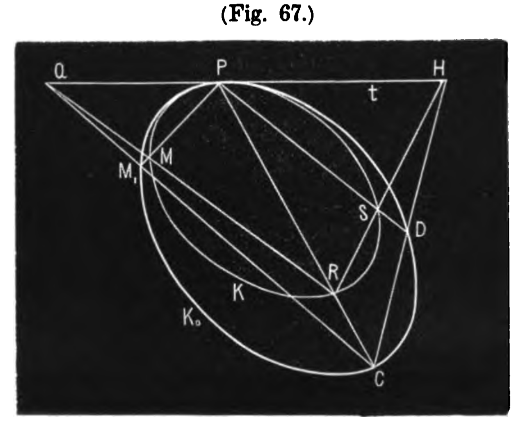


Der Mittelpunkt O von Ko ist dann leicht zu finden; seine Entfernung von P gibt die Grösse des Krümmungshalbmessers für den Punkt P an. — Die Richtigkeit dieser Construction geht aus dem Satze 103, 2. Abschnitt, hervor. Die beiden Kreise K_1 und Ko gehören nämlich einem Kegelschnittbüschel an, der nur aus Kreisen besteht, welche t in P berühren. Die Mittelpunkte dieses Büschels sind die zwei in P vereinigten Punkte und die zwei imaginären Kreispunkte der unendlich fernen Geraden. Nachdem nun der Kegelschnitt K durch die zwei in P coincidirenden Mittelpunkte geht, so schneidet K alle Kreise des Büschels in je zwei Punkten, deren Verbindungslinien unter einander parallel sind. Verändert man also den Kreis K derart, dass er nach und nach mit allen Kreisen des Büschels zusammenfällt, so wird RS einmal mit PE coincidiren und R nach P gelangen. Der veränderte Kreis K geht in diesem Falle in den Kreis Ko über und osculirt, wie nun leicht einzusehen, in P mit der Curve K.

Wir haben schliesslich noch zu erklären, wie ein Kegelschnitt Ko (Fig. 67) construirt werden kann, der mit irgend einem gegebenen Kegelschnitte in einem beliebig angenommenen Punkte P des letzteren eine Berührung dritter Ordnung eingeht. Dass auch in diesem Falle Ko nicht vollkommen bestimmt ist, wurde bereits erwähnt. Man kann irgend einen Punkt C in der Ebene von K beliebig wählen und annehmen Ko solle durch C gehen. Diese Annahme bestimmt jedoch Ko vollkommen, denn es erscheinen dann fünf

Punkte von *Ko*, nämlich *C* und die vier in *P* vereinigten, gegeben. Beliebig viele andere Punkte von *Ko* erhält man auf folgende Weise: Durch *P* wird irgend eine Gerade *PD* gezogen, welche *K* in *S* schneidet. Den Punkt *S* verbindet man mit jenem Punkte *R*, in welchem *PC* die Curve *K* trifft, und bestimmt den Schnittpunkt *H* von *RS* mit der Tangente *t*, die den Kegelschnitt *K* in *P* berührt. Die Gerade *CH* schneidet dann *PD* in einem Punkte *D*, welcher dem gesuchten Kegelschnitte angehört. — Dieselbe Construction wurde auch zur Bestimmung des in der beliebigen, durch *P* gezogenen Geraden PM_1 gelegenen Punktes M_1 der Curve *Ko* angewendet. — Der Beweis für diese Construction ist mit Benützung der Sätze 101 und 102, 2. Abschnitt, leicht herzustellen. Betrachtet man die in *P* vereinigten Punkte *A* und *B* der Secante (eigentlich Tangente) *t*, sowie *C* und *D* als Mittelpunkte eines Kegelschnittbüschels, so muss das System der zwei Geraden *PC* und *PD* auch als ein diesem Büschel angehörender Kegelschnitt aufgefasst werden. Die gegebene Curve *K* geht durch zwei Mittelpunkte des Büschels, nämlich durch *A* und *B*, folglich schneidet sie jeden Kegelschnitt des Büschels in zwei Punkten *R*, *S*, deren Verbindungslinie gegen *H* convergirt. Lässt man eine Curve des Kegelschnittbüschels sich derart verändern, dass sie nach und nach mit allen Curven des Büschels zusammenfällt, so dreht sich *RS* um *H* und wird einmal mit *t* coincidiren. Für diese Lage von *RS* vereinigen sich *R* und *S*, wie leicht einzusehen, im Punkte *P* und der veränderliche Kegelschnitt hat dann mit *K* in *P* die vier Punkte *A*, *B*, *R* und *S* gemein, osculirt also mit *K* in *P*. Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass der gesuchte osculirende Kegelschnitt *Ko* eine Curve des genannten Kegelschnittbüschels ist, woraus folgt, dass *Ko* durch *D* gehen muss. — In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass M_1, sowie überhaupt jeder Punkt, welcher sich durch die oben erklärte Construction ergibt, ein Punkt von *Ko* ist.

(Fig. 67.)



Nachdem *C* beliebig gewählt wurde, so können unendlich viele Curven *Ko* construirt werden, welche mit *K* im Punkte *P* eine Berührung dritter Ordnung eingehen, was wir bereits aus dem Umstande gefolgert haben, dass *Ko* durch die vier in *P* vereinigten Punkte nicht vollkommen bestimmt wird.

Es wurde oben erwähnt, dass ein Kreis mit einem Kegelschnitte im allgemeinen keine Berührung dritter Ordnung eingehen kann. Die Ausnahme von dieser Regel tritt dann ein, wenn der Osculations-

punkt ein Scheitel des Kegelschnittes ist. Um dies einzusehen betrachte man die Figur 66. Wäre P ein Scheitel, so würde RS, also auch PE parallel zu t werden und der Punkt E müsste, sowie R mit P zusammenfallen. Es müssten sich also in P vier Punkte, nämlich A, B, R und E vereinigen, woraus wir schliessen, dass der Krümmungskreis in einem Scheitel eines Kegelschnittes immer eine Berührung dritter Ordnung eingeht.

Dritter Abschnitt.

Grundgebilde der zweiten Stufe.

---

a) Collineation der Grundgebilde zweiter Stufe.

Sowie man zwei Grundgebilde der ersten Stufe auf einander bezieht, indem man jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges bestimmtes Element des andern zuweist, so können auch zwei Grundgebilde der zweiten Stufe dadurch auf einander bezogen werden, dass jedem Elemente des einen Gebildes ein einziges bestimmtes Element des anderen zugewiesen wird. Je zwei einander zugewiesene Elemente werden entsprechende Elemente genannt.

Sind zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 so aufeinander bezogen, dass jedem Punkte P in Σ ein Punkt P_1 in Σ_1 und jeder durch P gehenden Geraden in Σ eine durch P_1 gehende Gerade in Σ_1 entspricht, so sagt man, dass die beiden Systeme collinear verwandt, oder collinear sind. Zwei Strahlenbündel s und s_1 nennt man collinear, wenn jedem Strahle p in s ein Strahl p_1 in s_1 und jeder durch p gehenden Ebene in s eine durch p_1 gehende Ebene in s_1 entspricht. Endlich werden ein ebenes System Σ und ein Strahlenbündel s collinear genannt, wenn jedem Punkte P von Σ ein Strahl p von s und jeder durch P gehenden Geraden von Σ eine durch p gehende Ebene von s zugewiesen erscheint. Man kann also im allgemeinen sagen:

Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe sind collinear, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P und q des einen Gebildes, von welchen P in q liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1 und q_1 des andern entsprechen, von denen P_1 in q_1 gelegen ist.*)

Aus diesen Erklärungen folgt, dass wenn Σ und Σ_1 zwei collineare ebene Systeme und a, a_1 ein Paar sich entsprechender Geraden dieser Systeme sind, einem jeden Punkte P von a ein in a_1 gelegener Punkt P_1 entsprechen muss, denn sonst könnte a_1 nicht durch P_1 gehen, wie es die collineare Verwandtschaft verlangt. Ferner ergibt sich, dass die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte

---

*) Diese Definition rührt von Staudt her (Geometrie der Lage, Seite 60).

P und Q des Systemes Σ jener Geraden entsprechen muss, welche die Punkte P_1 und Q_1 des Systemes Σ_1 verbindet, die den Punkten P und Q entsprechen. Denn der Geraden PQ soll eine Gerade entsprechen, welche sowohl durch P_1, als auch durch Q_1 geht, folglich kann letztere keine andere Gerade als P_1Q_1 sein. Aus den gegebenen Erklärungen können wir endlich auch schliessen, dass wenn a und b irgend zwei Gerade eines ebenen Systems Σ und a_1, b_1 die entsprechenden Geraden eines zweiten Systemes Σ_1 sind, welches mit Σ collinear verwandt ist, der Schnittpunkt P von a und b dem Schnitte P_1 der Geraden a_1, b_1 entspricht. Jener Punkt P_1, der dem Punkte P entspricht, muss nämlich sowohl in a_1, als auch in b_1 liegen, er kann sich daher nur im Durchschnitte von a_1 und b_1 befinden.

In ähnlicher Weise können nachstehende Sätze gerechtfertigt werden:

Ist a irgend eine Gerade eines ebenen Systemes Σ und e jene Ebene eines mit Σ collinear verwandten Strahlenbündels s, welche der Geraden a entspricht, so muss jedem in a gelegenen Punkte ein in e befindlicher Strahl entsprechen. — Dem Schnittpunkte zweier Geraden a und b in Σ entspricht der Durchschnitt jener zwei Ebenen in s, welche den Geraden a und b entsprechen, und der Verbindungslinie zweier Punkte P und Q in Σ entspricht jene Ebene in s, welche durch die zwei den Punkten P und Q entsprechenden Strahlen bestimmt wird.

Bezüglich zweier Strahlenbündel gelten analoge Sätze, deren Aufstellung und Begründung mit Hilfe der vorausgegangenen Erklärungen nicht schwer fällt.

Aus der Erklärung über die collineare Verwandtschaft zweier Grundgebilde der zweiten Stufe ergibt sich nun folgender Satz:

1. Sind zwei Grundgebilde der zweiten Stufe mit einem dritten solchen Gebilde collinear verwandt, so sind sie es auch unter einander.

Sind zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 collinear verwandt, so entspricht der unendlich fernen Geraden des einen Systemes im allgemeinen eine in endlicher Entfernung befindliche Gerade des andern Systemes. Sowohl die Gerade in Σ, welche der unendlich fernen Geraden von Σ_1, als auch die Gerade in Σ_1, welche der unendlich fernen Geraden in Σ entspricht, wird eine Gegenaxe genannt. Ist demnach ein ebenes System Σ mit n ebenen Systemen collinear verwandt, so hat Σ im allgemeinen n Gegenaxen. Aus diesen Erklärungen kann nachstehender Satz leicht gefolgert werden:

2. In zwei collinearen ebenen Systemen entsprechen parallelen Geraden des einen Systemes Gerade im anderen Systeme, welche gegen ein und denselben Punkt der Gegenaxe des letzteren convergiren, und allen Geraden des einen Systemes, welche sich in demselben Punkte der Gegenaxe dieses Systemes schneiden, entsprechen parallele Gerade im andern Systeme.

Hieraus ergibt sich ferner:

3. Sind Σ und Σ_1 zwei collineare ebene Systeme und g, g' beziehungsweise ihre Gegenaxen, so entsprechen allen zu g parallelen Geraden des Systemes Σ Gerade im Systeme Σ_1, welche zu g' parallel sind.

4. Liegen die Gegenaxen zweier collinearer ebener Systeme Σ und Σ_1 in endlicher Entfernung, so entsprechen parallelen Geraden in Σ nur dann parallele Gerade in Σ_1, wenn erstere parallel zur Gegenaxe von Σ sind.

Coincidiren zwei entsprechende Elemente von zwei gleichartigen collinearen Grundgebilden der zweiten Stufe, so sagt man, dass letztere diese Elemente entsprechend gemein haben.

Je zwei einförmige Grundgebilde g und g_1, welche sich in zwei verschiedenen collinearen Grundgebilden der zweiten Stufe befinden, nennt man sich entsprechende Gebilde, wenn g aus Elementen besteht, die den Elementen von g_1 in Bezug auf die zwei collinearen Grundgebilde entsprechen. Sind z. B. Σ und Σ_1 zwei collineare ebene Systeme und R, R_1 irgend zwei Punktreihen, welche sich beziehungsweise in Σ und Σ_1 befinden, so sagt man, dass R und R_1 entsprechende Gebilde sind, wenn R aus Elementen besteht, die den Elementen von R_1 in Bezug auf Σ und Σ_1 entsprechen. Haben zwei collineare Grundgebilde der zweiten Stufe alle Elemente eines einförmigen Grundgebildes entsprechend gemein, so sagt man, dass sie dieses Gebilde entsprechend gemein haben.

Aus der Definition der collinearen Verwandtschaft und dem Satze 73, 1. Abschnitt, ergibt sich unmittelbar der Satz:

5. Je zwei einförmige Grundgebilde, welche in collinearen Grundgebilden der zweiten Stufe einander entsprechen, sind projectivisch.

Mit Rücksicht auf diesen und den obigen Satz 4 können wir behaupten:

6. Liegen die Gegenaxen von zwei collinearen ebenen Systemen in endlicher Entfernung, so sind zwei sich entsprechende Punktreihen dieser Systeme nur dann einander ähnlich, wenn die Träger der Punktreihen zu den betreffenden Gegenaxen parallel sind.

Haben zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 vier Punkte $ABCD$, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, entsprechend gemein, so sind Σ und Σ_1 identisch. Um dies nachzuweisen nehmen wir an, E sei irgend ein fünfter Punkt des Systemes Σ und denken uns den Punkt A mit B, C, D und E durch gerade Linien verbunden. Diese vier Verbindungslinien bilden einen Strahlenbüschel, welcher beiden Systemen entsprechend gemein ist; denn der gemachten Voraussetzung zufolge coincidiren die Strahlen AB, AC und AD mit den ihnen entsprechenden, woraus mit Rücksicht auf den Satz 10, 1. Ab-

schnitt, geschlossen werden kann, dass alle durch A gehenden Geraden, also auch AE, mit den ihnen entsprechenden zusammenfallen. Der Punkt E_1, welcher dem Punkte E entspricht, muss demnach jedenfalls im Strahle AE liegen. Würde man statt A etwa den Punkt B mit den vier übrigen Punkten durch gerade Linien verbunden gedacht haben, so hätte sich ergeben, dass E_1 in der Geraden BE gelegen sein muss. Nachdem nun der Punkt E_1 sowohl in AE, als auch in BE liegen soll, so coincidirt er mit E, woraus folgt, da E beliebig gewählt wurde, dass alle Punkte in Σ mit den ihnen entsprechenden in Σ_1 coincidiren.

Nimmt man an Σ und Σ_1 hätten vier Gerade *abcd*, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt gehen, entsprechend gemein, so zeigt sich, dass auch in diesem Falle die beiden Systeme identisch sein müssen. Ist e irgend eine fünfte Gerade des Systemes Σ und nennt man die Schnittpunkte von a mit den Geraden *bcde* beziehungsweise *BCDE*, so coincidiren nach Satz 10, 1. Abschnitt, diese vier Punkte mit den ihnen entsprechenden im Systeme Σ_1, daher muss die Gerade e_1, welche der Geraden e entspricht, jedenfalls durch E gehen. Hätten wir statt der Schnittpunkte von d jene der Geraden b in Betracht gezogen, so würde sich ergeben haben, dass e_1 auch durch den Schnittpunkt von b und e gehen muss. Die Geraden e und e_1 fallen daher zusammen, woraus folgt, dass alle Geraden von Σ mit den ihnen entsprechenden coincidiren, nachdem e beliebig gewählt wurde. Die Systeme Σ und Σ_1 sind also identisch.

In ganz ähnlicher Weise kann man sich überzeugen, dass zwei collineare Strahlenbündel identisch sind, wenn sie vier Strahlen oder vier Ebenen entsprechend gemein haben, von denen keine drei demselben Strahlenbüschel, beziehungsweise demselben Ebenenbüschel, angehören. Es gilt also der Satz:

7. Haben zwei Grundgebilde der zweiten Stufe vier gleichartige Elemente, von denen keine drei ein und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, entsprechend gemein, so sind sie identisch.

Mit Hilfe des obigen Satzes 5 lässt sich auch der folgende leicht nachweisen:

8. Will man zwei Grundgebilde der zweiten Stufe collinear auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben vier gleichartige Elemente, von denen keine drei demselben einförmigen Grundgebilde angehören, beliebig wählen und einander als entsprechend zuweisen; jedem fünften Elemente des einen Grundgebildes entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des andern.

Dabei wird vorausgesetzt, dass nur solche Elemente als entsprechende betrachtet werden, welche in collinearen Gebilden überhaupt einander

entsprechen können, nämlich in zwei ebenen Systemen zwei Punkte oder zwei Gerade, in zwei Strahlenbündeln zwei Strahlen oder zwei Ebenen und endlich im ebenen Systeme und Strahlenbündel ein Punkt einem Strahle oder eine Gerade einer Ebene.

Um diesen Satz für zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 nachzuweisen, nennen wir $ABCD$ vier beliebige Punkte in Σ, von denen keine drei derselben Geraden angehören, und nehmen an, die beliebig gewählten Punkte $A_1B_1C_1D_1$ des Systemes Σ_1, von denen ebenfalls keine drei in derselben Geraden liegen dürfen, seien den zuerst genannten vier Punkten als entsprechende zugewiesen worden. Zu irgend einem fünften Punkte E in Σ kann dann der ihm entsprechende E_1 in Σ_1 nicht mehr beliebig gewählt werden, wie aus Folgendem hervorgeht: Verbindet man A mit $BCDE$ sowie auch A_1 mit $B_1C_1D_1$ und E_1, so erhält man nach Satz 5, 3. Abschnitt, zwei projectivische Strahlenbüschel. Der Strahl A_1E_1, nämlich jener, welcher dem Strahle AE entspricht, wird nun durch die übrigen Strahlen der beiden Büschel vollkommen bestimmt. (Satz 11, 1. Abschnitt). E_1 kann demnach nur in einer ganz bestimmten Geraden liegen. Verbindet man statt A und A_1 die Punkte B und B_1 mit den übrigen vier Punkten des Systemes, welchem sie angehören, so erhält man ein zweites Paar projectivischer Strahlenbüschel, also wie leicht einzusehen auch einen zweiten vollkommen bestimmten Strahl B_1E_1, der den Punkt E_1 enthalten muss. E_1 ergibt sich somit im Durchschnitte zweier durch die gewählten vier Punktpaare vollkommen bestimmter Geraden, er kann also nicht mehr beliebig gewählt werden. Hieraus folgt auch, dass jeder Geraden in Σ eine durch die Annahmen unzweideutig bestimmte Gerade in Σ_1 entspricht.

Der Fall, in welchem sowohl in Σ, als auch in Σ_1 vier beliebige Gerade, $abcd$ und $a_1b_1c_1d_1$, gewählt werden, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, kann auf den soeben betrachteten zurückgeführt werden. Die Geraden $abcd$ bilden nämlich ein einfaches Vierseit, dessen Ecken $ABCD$ den Ecken $A_1B_1C_1D_1$ des einfachen Vierseites $a_1b_1c_1d_1$ entsprechen. Durch die Wahl der vier Paare sich entsprechender Geraden erscheinen also die Punkte $ABCD$ und ihre entsprechenden $A_1B_1C_1D_1$ angenommen und jedem fünften Punkte und jeder fünften Geraden in Σ kann daher, wie eben bewiesen wurde, nur ein durch die Annahmen bestimmter Punkt, beziehungsweise eine bestimmte Gerade entsprechen.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich obiger Satz rechtfertigen, wenn die zwei Grundgebilde der zweiten Stufe zwei Strahlenbündel, oder ein ebenes System und ein Strahlenbündel sind.

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar der folgende:

9. Zwei ebene Vierecke, oder zwei aus vier Strahlen bestehende Strahlenbündel, oder auch ein ebenes Viereck, und ein aus vier Strahlen bestehender Strahlenbündel, können immer als Theile collinearer Gebilde betrachtet werden.

Liegt jeder Punkt eines ebenen Systemes Σ in dem ihm entsprechenden Strahle eines mit Σ collinear verwandten Strahlenbündels s, so ist Σ ein Schnitt des Bündels s und der letztere wird ein Schein von Σ genannt. Die Bezeichnung Schein findet ihre Rechtfertigung in der Vorstellung, dass die Strahlen des Bündels Lichtstrahlen seien, welche von den einzelnen Punkten des ebenen Systemes ausgehen. Ein Strahlenbündel, welcher der Schein eines ebenen Systemes ist, heisst auch in Bezug auf dieses System ein projicirender Bündel. Schneidet man einen Strahlenbündel durch zwei Ebenen, so ergeben sich als Schnitte zwei ebene Systeme, deren jedes als die Projection des andern betrachtet werden kann. Der Bündel, dessen Schnitte die zwei Systeme bilden, ist dann für beide zugleich projicirend und sein Mittelpunkt wird das Projectionscentrum der zwei Systeme genannt.

Perspectivisch liegend oder perspectivisch nennt man:

1. Zwei ebene Systeme, welche Schnitte desselben Strahlenbündels sind.

2. Zwei Strahlenbündel, welche Scheine desselben ebenen Systemes sind.

3. Ein ebenes System und einen Strahlenbündel, wenn ersteres ein Schnitt des letzteren ist.

4. Zwei collineare ebene Systeme, welche in derselben Ebene liegen, wenn sie eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben.

5. Zwei collineare concentrische Strahlenbündel, wenn sie einen Strahlenbüschel und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben.

Dass in den drei ersteren Fällen die beiden perspectivisch liegenden Gebilde immer collinear sind, ist leicht einzusehen, man kann also sagen:

Je zwei perspectivisch liegende Grundgebilde der zweiten Stufe sind collinear verwandt.

Nachdem im Falle 1 die beiden ebenen Systeme auch immer eine Punktreihe und im Falle 2 die beiden Strahlenbündel einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben, so folgt, dass zwei perspectivische ebene Systeme immer eine Punktreihe und zwei perspectivische Strahlenbündel immer einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben müssen.

Auch der nachstehende Satz ergibt sich aus den obigen Erklärungen fast unmittelbar:

10. Je zwei einförmige Grundgebilde, welche einander in perspectivischen Grundgebilden der zweiten Stufe entsprechen, liegen perspectivisch.

Für die drei ersten Fälle ist dieser Satz selbstverständlich; dass er auch bezüglich der Fälle 4 und 5 Geltung hat, ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Liegen zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 in derselben Ebene und haben sie einen Strahlenbüschel S und eine Punktreihe R entsprechend gemein, so schneiden sich je zwei entsprechende Gerade a und a_1 in einem Punkte von R und jedem Punkte in a entspricht der Schnittpunkt des durch a gehenden

Strahles von S mit der Geraden a_1. Hieraus folgt, dass die auf a und a_1 durch entsprechende Punkte von Σ und Σ_1 gebildeten Punktreihen Schnitte des Büschels S sind, also perspectivisch liegen. — Sind A und A_1 zwei beliebige entsprechende Punkte von Σ und Σ_1, so entspricht irgend einer durch A gehenden Geraden, deren Schnittpunkt mit dem Träger von R wir durch B bezeichnen wollen, die Verbindungslinie der Punkte A_1 und B. Daraus kann man schliessen, dass die zwei sich entsprechenden Strahlenbüschel, wovon der eine seinen Mittelpunkt in A, der andere in A_1 hat, Scheine der Reihe R sein müssen, sich also in perspectivischer Lage befinden. — Nachdem nun die auf a und a_1 gelegenen Punktreihen, sowie die zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte A und A_1 sind, als ganz beliebige Paare sich entsprechender einförmiger Gebilde von Σ und Σ_1 betrachtet werden können, so ist obiger Satz für den Fall 4 bewiesen.

Der Beweis für den Fall 5 kann auf ganz ähnliche Art durchgeführt werden. Man hat eben zu zeigen, dass je zwei entsprechende Ebenenbüschel Scheine des Strahlenbüschels sind, der beiden Bündeln entsprechend gemein ist, und dass je zwei entsprechende Strahlenbüschel Schnitte jenes Ebenenbüschels sein müssen, den die beiden Bündel entsprechend gemein haben.

11. Wenn ein ebenes System Σ mit einem Strahlenbündel s collinear verwandt ist und vier gleichartige Elemente des Systemes, von welchen keine drei demselben einförmigen Grundgebilde angehören, in den ihnen entsprechenden Elementen des Bündels liegen, so ist Σ ein Schnitt von s.

Ist nämlich Σ_1 das ebene System, welches sich als Schnitt des Trägers von Σ mit dem Bündel s ergibt, so müssen nach Satz 7 die beiden Systeme Σ und Σ_1 identisch sein, woraus folgt, dass Σ einen Schnitt von s bildet.

Auch die nachstehenden Sätze lassen sich mit Hilfe des Satzes 7 in einfacher Weise rechtfertigen:

12. Haben zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1, deren Träger nicht coincidiren, eine solche gegenseitige Lage, dass die Geraden, welche vier Punkte des Systems Σ, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, mit den entsprechenden Punkten von Σ_1 verbinden, in einem Punkte zusammentreffen, so bilden Σ und Σ_1

Haben zwei collineare Strahlenbündel s und s_1 deren Mittelpunkte nicht coincidiren, eine solche gegenseitige Lage, dass die Geraden, in welchen vier Ebenen des Büschels s, von denen keine drei durch dieselbe Gerade gehen, die entsprechenden Ebenen von s_1 schneiden, in einer Ebene liegen, so bilden s und s_1

Schnitte desselben Strahlenbündels.

Scheine desselben ebenen Systems.

(Satz links) Verbindet man sämmtliche Punkte von Σ mit jenem Punkte O, in welchem sich die vier erwähnten Verbindungslinien treffen, so entsteht ein Strahlenbündel s, der einen Schein des Systemes Σ bildet. Ebenso erhält man einen Strahlenbündel s_1, wenn man alle Punkte von Σ_1 mit O verbindet. Nachdem nun die beiden Bündel s und s_1 collinear sind und vier Strahlen entsprechend gemein haben, so müssen sie identisch sein, wodurch obiger Satz gerechtfertigt erscheint.

Der Satz rechts lässt sich durch eine ganz analoge Schlussfolgerung beweisen.

13. **Haben zwei collineare ebene Systeme einen Strahlenbüschel, oder eine Punktreihe entsprechend gemein, so liegen sie perspectivisch.**

Haben zwei collineare Strahlenbündel einen Strahlenbüschel, oder einen Ebenenbüschel entsprechend gemein, so liegen sie perspectivisch.

(Satz links). Wenn zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 einen Strahlenbüschel S entsprechend gemein haben, so liegen sie in derselben Ebene. Dass sie dann auch eine Punktreihe entsprechend gemein haben, also perspectivisch liegen, kann wie folgt nachgewiesen werden. Ist O der Mittelpunkt von S und A irgend ein Punkt des Systemes Σ, so liegt der dem Punkte A entsprechende A_1 in der Geraden AO, nachdem AO als ein Strahl des Büschels S sich selbst entsprechen muss. Sind nun A und A_1 die Mittelpunkte zweier in Σ und Σ_1 sich entsprechender Strahlenbüschel S_1 und S_2, so müssen S_1 und S_2 perspectivisch liegen, sich also in einer Punktreihe R schneiden, weil sie den Strahl AO entsprechend gemein haben. Jeder Punkt der Reihe R ist ein sich selbst entsprechender; denn verbindet man irgend einen solchen Punkt, z. B. P mit O, so erscheint derselbe als Durchschnittspunkt der Geraden AO und PO des Systemes Σ, welcher mit dem Schnittpunkte jener Geraden A_1O und PO des Systemes Σ_1 zusammenfällt, die den zuerst genannten Geraden entsprechen. Die Reihe R ist also den beiden Systemen entsprechend gemein. — Dass es ausser R im allgemeinen keine zweite selbstentsprechende Reihe geben kann geht daraus hervor, dass Σ und Σ_1 nach Satz 7, 3. Abschnitt, identisch sein müssten, wenn sie zwei Reihen entsprechend gemein hätten. — Aus dieser Untersuchung folgt auch, dass je zwei entsprechende Strahlenbüschel der Systeme Σ und Σ_1 sich in der Reihe R schneiden.

Haben zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 eine Punktreihe R entsprechend gemein, so können sie entweder in derselben, oder in verschiedenen Ebenen liegen. Nehmen wir zuerst an, sie befinden sich in derselben Ebene, so lässt sich leicht zeigen, dass sie auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben und daher perspectivisch liegen müssen. Sind nämlich a und a_1 irgend zwei sich entsprechende Gerade in Σ und Σ_1, so schneiden sich dieselben in

einem Punkte P der Reihe R. Die Punktreihen R_1 und R_2, deren Träger a und a_1 bilden und einander in den zwei Systemen entsprechen, liegen daher perspectivisch, weil sie den Punkt P entsprechend gemein haben. Der projicirende Büschel S, der Reihen R_1 und R_2 ist nun ein sich selbst entsprechender Büschel, denn irgend ein Strahl desselben, z. B. b, welcher etwa die Punkte A und A_1 der zwei Reihen verbindet und dessen Schnittpunkt mit R wir B nennen wollen, ist eine sich selbst entsprechende Gerade, nachdem AB der Geraden A_1B entsprechen muss. Σ und Σ_1 haben somit die Reihe R und den Büschel S entsprechend gemein, sie liegen also perspectivisch. — Dass es im allgemeinen keine zwei sich selbst entsprechenden Büschel geben kann, folgt aus dem Umstande, dass Σ und Σ_1 nach Satz 7 identisch sein müssten, wenn sie zwei Büschel und die Reihe R entsprechend gemein hätten.

Der Beweis für den Fall, in welchem Σ und Σ_1 nicht in derselben Ebene liegen, kann wie folgt gegeben werden. Sind R_1 und R_2 irgend zwei sich entsprechende Reihen, so schneiden sich ihre Träger in einem Punkte der Reihe R, welche beiden Systemen entsprechend gemein ist, daher liegen R_1 und R_2 perspectivisch. Verbindet man ihr Projectionscentrum O mit allen Punkten von Σ, so erhält man einen Strahlenbündel, der von dem Träger des Systemes Σ_1 in einem ebenen Systeme Σ_2 geschnitten wird, welches mit Σ, also auch mit Σ_1 collinear verwandt ist. Da nun Σ_1 und Σ_2 die Punktreihen R und R_2 entsprechend gemein haben, so sind sie identisch, daher bilden Σ und Σ_1 Schnitte desselben Strahlenbündels (mit dem Mittelpunkte O) und liegen sonach perspectivisch.

(Satz rechts). Haben zwei collineare Strahlenbündel s und s_1 einen Strahlenbüschel S entsprechend gemein, so liegen sie concentrisch und je zwei sich entsprechende Ebenen müssen sich in einem Strahle von S schneiden. Hieraus folgt, dass je zwei entsprechende Strahlenbüschel, nachdem sie einen Strahl von S entsprechend gemein haben, perspectivisch liegen. Der Ebenenbüschel E, welcher irgend zwei solche Strahlenbüschel S_1 und S_2 projicirt, ist beiden Strahlenbündeln entsprechend gemein, wie leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass jede Ebene von E den Träger des Büschels S in einer selbst entsprechenden Geraden schneidet. Die Strahlenbündel s und s_1 haben also einen Strahlenbüschel S und einen Ebenenbüschel E entsprechend gemein, sie liegen daher perspectivisch. — Ausser dem Büschel E können s und s_1 im allgemeinen keine anderen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben, weil sie sonst identisch sein müssten.

Der Beweis für den Fall, als s und s_1 einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben, lässt sich auf ähnliche Art geben, wie jener, durch welchen gezeigt wurde, dass zwei collineare ebene Systeme perspectivisch liegen, wenn in denselben eine sich selbst entsprechende Punktreihe existirt.

14. Haben zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ eine solche gegenseitige Lage, dass die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in demselben Punkte zusammentreffen, so liegen die drei Punkte,

in welchen die Seiten AB, BC und AC beziehungsweise von den Seiten A_1B_1, B_1C_1 und A_1C_1 geschnitten werden, auf derselben Geraden. Umgekehrt schneiden sich AA_1, BB_1 und CC_1 in demselben Punkte, wenn die Durchschnitte der Seiten AB, BC und AC mit den Seiten A_1B_1, B_1C_1 und A_1C_1 auf derselben Geraden liegen.

Befinden sich die beiden Dreiecke in verschiedenen Ebenen, so bilden sie, unter der Voraussetzung, dass AA_1, BB_1 und CC_1 durch denselben Punkt gehen, zwei perspectivisch liegende ebene Systeme. Solche Systeme haben immer eine Punktreihe entsprechend gemein, daher schneiden sich je zwei entsprechende Gerade der beiden Systeme in einem Punkte dieser Reihe. — Liegen die beiden Dreiecke in derselben Ebene und gehen AA_1, BB_1 und CC_1 durch denselben Punkt O, so bilden die zwei Dreiecke collineare ebene Systeme, welche einen Strahlenbüschel, nämlich OA, OB, OC entsprechend gemein haben, daher liegen sie nach Satz 13 perspectivisch und haben auch eine Punktreihe entsprechend gemein.

Der Beweis für den zweiten Theil des obigen Satzes kann auf ganz ähnliche Weise geführt werden.

Es fällt nicht schwer, für zwei aus drei Strahlen bestehende Strahlenbündel einen analogen Satz aufzustellen und nachzuweisen.

Der Träger jener Punktreihe, welche in zwei perspectivischen ebenen Systemen sich selbst entspricht, wird die Collineationsaxe, der Punkt, in welchem die Verbindungslinien von je zwei sich entsprechenden Punkten solcher Systeme zusammentreffen, das Collineationscentrum und jede der erwähnten Verbindungslinien ein Collineationsstrahl genannt.

Liegen die beiden Systeme in verschiedenen Ebenen, so ist der Durchschnitt ihrer Träger zugleich die Collineationsaxe und der Mittelpunkt des Strahlenbündels, dessen Schnitte die beiden Systeme bilden, das Collineationscentrum. Liegen die beiden Systeme in derselben Ebene, so ist der Mittelpunkt jenes Strahlenbüschels, welchen sie entsprechend gemein haben, das Collineationscentrum und jeder Strahl dieses Büschels ein Collineationsstrahl. In jedem Falle, ob nun die beiden Systeme in verschiedenen Ebenen, oder in derselben Ebene liegen, schneiden sich je zwei entsprechende Gerade in einem Punkte der Collineationsaxe. Daraus kann man schliessen, dass die Gegenaxen parallel zur Collineationsaxe sind, nachdem die unendlich ferne Gerade eines jeden der beiden Systeme die Collineationsaxe in einem unendlich fernen Punkte schneidet, gegen welchen auch die betreffende Gegenaxe convergiren muss.

15. Dreht man von zwei perspectivischen ebenen Systemen Σ und Σ_1 das eine um die Collineationsaxe, während das andere seinen Ort nicht ändert, so bleiben Σ und Σ_1 perspectivisch und das Collineationscentrum beschreibt

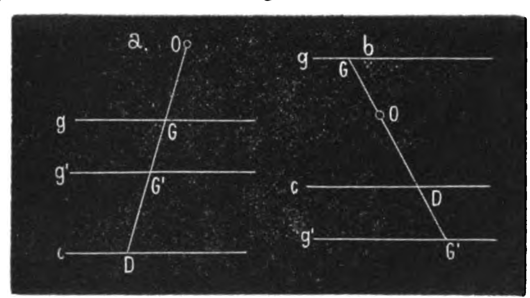
einen Kreis, dessen Ebene auf der Collineationsaxe senkrecht steht und seinen Mittelpunkt in der Gegenaxe des ruhenden Systemes hat. Der Halbmesser dieses Kreises ist gleich dem Abstande der Gegenaxe des gedrehten Systemes von der Collineationsaxe.

Dieser Satz leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass zwei ebene Systeme immer perspectivisch liegen, wenn sie eine Punktreihe (die Collineationsaxe) entsprechend gemein haben und dass auf die sich entsprechenden Punktreihen, deren Träger mit der Collinationsaxe einen rechten Winkel bilden, der Satz 20, 1. Abschnitt, Anwendung findet.

Liegen zwei perspectivische ebene Systeme in derselben Ebene, so kann man bezüglich ihrer gegenseitigen Lage zwei verschiedene Fälle unterscheiden. Entweder verlaufen alle conjectivischen Punktreihen, deren Träger ein Collineationsstrahl ist, entgegengesetzt, oder sie verlaufen einstimmig. Im ersten Falle sagt man, die beiden Systeme liegen entgegengesetzt, im zweiten sie liegen einstimmig perspectivisch.

Dass alle erwähnten conjectivischen Punktreihen entweder entgegengesetzt, oder alle einstimmig verlaufen, lehrt folgende Betrachtung. Sind O und c (Fig. 68) beziehungsweise das Collineationscentrum und die Collineationsaxe und zieht man durch O irgend eine Gerade a, welche c in D schneidet, so ist a der Träger von zwei sich entsprechenden, also conjectivischen Punktreihen R und R_1, deren Doppelpunkte O und D sein müssen. Die Gegenpunkte von R und R_1 sind nun offenbar die Schnittpunkte G und G' der Geraden a mit den Gegenaxen g und g'. Nach Satz 38. und 39, 1. Abschnitt, liegen daher G und G' entweder zwischen den Punkten O und D, oder ausserhalb der endlichen Strecke OD, woraus folgt, dass auch bezüglich der Lage der Gegenaxen nur zwei Fälle eintreten können. Entweder befinden sich beide Gegenaxen zwischen c und O, oder c und O liegen zwischen den Gegenaxen. (Fig. 68, a und b). Im ersteren Falle verlaufen alle conjectivischen Reihen, deren Träger Collineationsstrahlen sind, entgegengesetzt, im zweiten einstimmig. — Da die Abstände OG und DG' bekanntlich einander immer gleich sind, so ergibt sich der nachstehende Satz:

(Fig. 68.)



16. In entgegengesetzt perspectivischen ebenen Systemen liegen die beiden Gegenaxen g und g' zwischen der Collineationsaxe c und dem Collneationscentrum O, in einstimmig perspectivischen Systemen aber befinden sich c

und O zwischen g und g'. Die Entfernung des Punktes O von g ist immer gleich jener der zwei Geraden c und g'.

Sind vier beliebige Punkte $ABCD$ eines ebenen Systemes Σ, von denen keine drei derselben Geraden angehören, und die vier diesen Punkten entsprechenden Punkte $A_1B_1C_1D_1$ eines zweiten ebenen Systemes Σ_1 gegeben, welches mit Σ collinear verwandt ist, so erscheint jedem fünften Punkte des einen Systemes der entsprechende Punkt im andern Systeme, wie bereits erklärt wurde, unzweideutig zugewiesen. Auch jeder beliebigen Geraden von Σ entspricht dann nur eine einzige Gerade und umgekehrt; daher ist die Lage der Gegenaxen in beiden Systemen eine vollkommen bestimmte. Um die Gegenaxen für diesen Fall — wenn $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ bekannt sind — zu construiren, suche man den Durchschnittspunkt E der Geraden AB und CD, sowie auch den Schnittpunkt E_1 der Geraden A_1B_1 und C_1D_1. Die sämmtlichen Punkte der Geraden AB und die ihnen entsprechenden Punkte in A_1B_1 bilden zwei projectivische Punktreihen R und R_1 (Satz 5, 3. Abschnitt), von welchen drei Paare entsprechender Elemente AA_1, BB_1 und EE_1 sind; es ist also möglich in R und R_1 die Gegenpunkte G und G' zu ermitteln. Dies geschieht wohl am einfachsten, wenn man R und R_1 in perspectivische Lage bringt, das Projectionscentrum bestimmt, und aus letzterem Parallele zu den Trägern von R und R_1 zieht. Wie leicht einzusehen ist G ein Punkt der Gegenaxe von Σ und G' ein Punkt der Gegenaxe von Σ_1. Wählt man statt AB und A_1B_1 etwa AC und A_1C_1 als Träger von Punktreihen, welche sich in Σ und Σ_1 entsprechen, und bestimmt in diesen Reihen die Gegenpunkte G_2, G_3, so sind die Geraden GG_2 und $G'G_3$ die verlangten Gegenaxen.

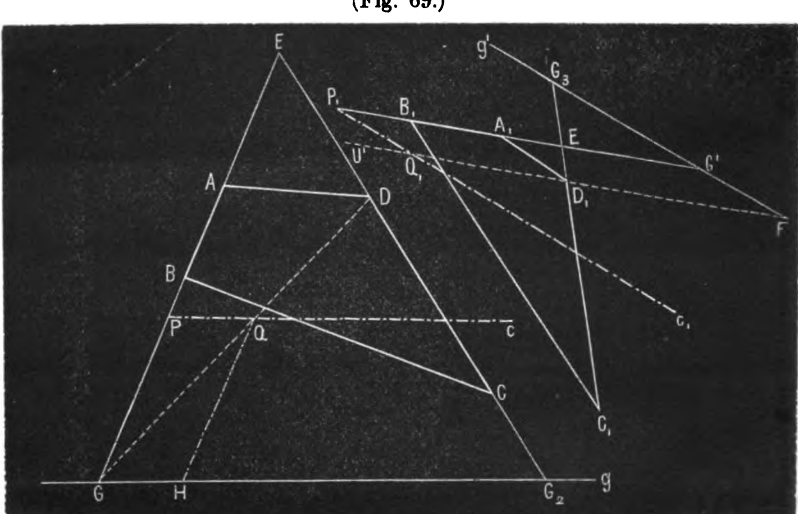
Wir wollen nun untersuchen, ob man zwei beliebige collineare ebene Systeme in perspectivische Lage bringen kann und wie dies zu geschehen hätte. Dabei setzen wir wieder voraus, von den zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 seien vier Paare sich entsprechender Punkte AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 (Fig. 69) bekannt und $ABCD$ wären so gelegen, dass keine drei von diesen Punkten derselben Geraden angehören, was dann selbstverständlich auch bezüglich der Punkte $A_1B_1C_1D_1$ gilt. — Bestimmt man die Gegenaxen g und g' von Σ und Σ_1, wie eben erklärt wurde, verbindet den Schnittpunkt G der Geraden AB und der Gegenaxe g mit dem Punkte D und zieht durch D_1 eine Parallele D_1U' zur Geraden A_1B_1, so ist diese Parallele offenbar jene Gerade in Σ_1, welche der Geraden DG in Σ entspricht. Würden nun Σ und Σ_1 perspectivisch liegen, so müsste der Schnittpunkt P der Geraden AB, A_1B_1 und der Schnittpunkt Q der Geraden DG, D_1U' sich selbst entsprechende Punkte sein und eine solche Lage haben, dass die Verbindungslinie PQ zu den Gegenaxen parallel wäre, nachdem P und Q Punkte der Collineationsaxe sein würden. Um also die Systeme Σ und Σ_1 in perspectivische Lage zu bringen hätte man dieselben so zu legen, dass zwei entsprechende Punkte von AB und A_1B_1, sowie auch zwei entsprechende Punkte von DG und D_1U' in Punkten P und Q coincidiren, deren Ver-

bindungslinie zu den Gegenaxen parallel wäre. Dies kann immer leicht geschehen. Sind G' und F die Schnittpunkte der Geraden $A_1 B_1$ und $D_1 U'$ mit der Gegenaxe g', so bestimme man in g einen Punkt H, der so gelegen ist, dass

$$GH = G'F$$

ist, und ziehe durch H eine Parallele a zu AB. Den Schnittpunkt von a mit DG nennen wir Q. Die aus Q zu g parallel gezogene Gerade muss dann AB in

(Fig. 69.)



einem Punkte P schneiden, dessen Abstand von Q ebenso gross ist, als der Abstand jener Punkte P_1 und Q_1 des Systemes Σ_1, welche P und Q entsprechen. Daher ist es immer möglich die entsprechenden Strecken PQ und $P_1 Q_1$ zur Coincidenz zu bringen. Da nun die entsprechenden Reihen R und R_1, deren Träger PQ und $P_1 Q_1$ bilden, congruent sein müssen, nachdem sie wegen ihres Parallelismus zu den Gegenaxen einander ähnlich sind und die entsprechenden Strecken PQ, $P_1 Q_1$ gleiche Grösse haben (Satz 29, 1. Abschnitt), so fallen R und R_1 mit allen ihren entsprechenden Elementen zusammen, sobald man die Punktpaare PP_1 und QQ_1 zur Coincidenz bringt. R und R_1 bilden dann eine Punktreihe, welche Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben, und ihr gemeinschaftlicher Träger muss die Collineationsaxe sein. — Dass Σ und Σ_1, wenn R und R_1 zur Coincidenz gebracht sind, perspectivisch liegen, lehrt der Satz 13, 3. Abschnitt.

Nachdem die Länge der Strecke $G'F$ sowohl auf der einen, wie auf der anderen Seite von G aufgetragen werden kann, so ergeben sich auf AB und DG zwei Paare von Punkten PQ und $P'Q'$, deren Verbindungslinie parallel zu g ist und mit den ihnen entsprechenden Punkten $P_1 Q_1$, $P_1' Q_1'$ in Σ_1 zur Coincidenz gebracht werden können. Hieraus folgt, dass man zwei collineare ebene Systeme

für zwei verschiedene Collineationsaxen in perspectivische Lage bringen kann. — Bei dieser Untersuchung wurde allerdings vorausgesetzt, dass AB und DG in einem in endlicher Entfernung gelegenen Punkte G convergiren. Der specielle Fall, in welchem dies nicht stattfindet, wenn nämlich g in unendlicher Entfernung gelegen ist, wird in der Folge besonders untersucht werden. — Da Σ und Σ_1, wenn sie auf die angegebene Weise in perspectivische Lage gebracht wurden, beliebig um die Collineationsaxe gedreht werden können, ohne ihre perspectivische Lage zu verlieren, so folgt der Satz:

17. Zwei collineare ebene Systeme können im allgemeinen immer für zwei verschiedene Collineationsaxen in unendlich vielen Stellungen in perspectivische Lage gebracht werden. Sollen sie in derselben Ebene perspectivisch liegen, so gibt es für jede von den zwei möglichen Collineationsaxen zwei, also im Ganzen vier verschiedene Arten der perspectivischen Lage.

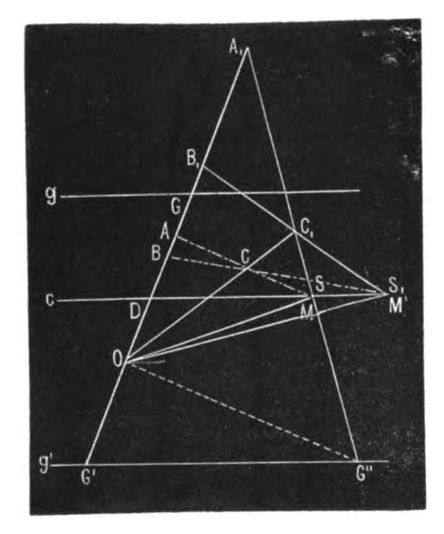
Aus diesem Satze geht hervor, dass man von zwei collinearen Systemen im allgemeinen jedes als die Projection des andern betrachten kann.

Wir wollen nun auch die Frage beantworten, ob ein ebenes System Σ und ein ihm collinear verwandter Strahlenbündel s stets in perspectivische Lage gebracht werden können. Sind $ABCD$ vier beliebige Punkte in Σ, von denen keine drei derselben Geraden angehören, und die diesen Punkten entsprechenden Strahlen $abcd$ in s bekannt, so ist irgend einem fünften Punkte in Σ ein einziger Strahl in s zugewiesen und der letztere kann mit Benützung der gegebenen Elemente bestimmt werden. Würde Σ gegen s perspectivisch liegen, so müsste der aus den Strahlen AB, AC, AD bestehende Strahlenbüschel S ein Schnitt des Ebenenbüschels σ sein, der durch die Ebenen ab, ac, ad gebildet wird. Der Strahlenbüschel S lässt sich nun im allgemeinen wohl auf unzählig viele Arten mit σ in perspectivische Lage bringen, jedoch kann die Ebene des Büschels S für alle diese Lagen nur zwei verschiedene Stellungen haben (Siehe die Bemerkungen zu Satz 30, 1. Abschnitt) und wenn nicht bloss S gegen σ, sondern das ganze System Σ gegen s perspectivisch liegen soll, so müssten auch die Punkte B, C und D in den ihnen entsprechenden Strahlen b, c und d zu liegen kommen, was im allgemeinen nicht der Fall sein kann, wie leicht einzusehen ist. Aus dieser Betrachtung folgt also, dass ein ebenes System und ein ihm collinear verwandter Strahlenbündel sich im allgemeinen nicht in perspectivische Lage bringen lassen.

Sind g und g' (Fig. 70) die Gegenaxen, c die Collineationsaxe und O das Collineationscentrum von zwei perspectivischen ebenen Systemen Σ und Σ_1, welche in derselben Ebene liegen, so kann zu irgend einem Punkte A des Systemes Σ der entsprechende A_1 in Σ_1 wie folgt ermittelt werden: Man zieht den Collineationsstrahl OA, sowie auch eine beliebige zweite durch A gehende Gerade AM und bestimmt die der letzteren Geraden entsprechende $G''M$. Der

gesuchte Punkt A_1 ergibt sich dann im Durchschnitte von OA mit $G''M$. Um die Gerade $G''M$ zu erhalten, hat man nur durch O eine Parallele zu AM zu ziehen, deren Schnittpunkt mit g' wir G'' nennen wollen, und G'' mit dem Punkte M zu verbinden, in welchem AM die Collineationsaxe trifft. Dass $G''M$ dieser Construction zufolge jene Gerade des Systemes Σ_1 ist, welche der Geraden AM entspricht, geht daraus hervor, dass G'' dem unendlich fernen Punkte in AM entspricht und der Punkt M, als ein Punkt der Collineationsaxe sich selbst entsprechen muss.

(Fig. 70.)



Zieht man irgend einen zweiten Collineationsstrahl, welcher AM in C und A_1M in C_1 schneidet, so bilden C und C_1 ein Paar sich entsprechender Punkte. Ist ferner B ein beliebiger Punkt in OA und heisst der Schnittpunkt der Geraden BC mit der Collineationsaxe M', so entspricht der Geraden BC im Systeme Σ die Gerade C_1M' im Systeme Σ_1, daher muss der Durchschnittspunkt B_1 von OA und C_1M' dem Punkte B entsprechen. Die Geraden MO, MD, MA und MA_1 bilden nun einen Strahlenbüschel S, welcher gegen jenen Strahlenbüschel S_1, der aus den Strahlen $M'O$, $M'D$, $M'B$, $M'B_1$ besteht, perspectivisch liegt. Die beiden Büschel werden somit durch OA in conjectivischen Punktreihen geschnitten; es besteht also die Gleichung:

$$(AA_1OD) = (BB_1OD).$$

Nachdem BB_1 ein beliebiges Paar entsprechender Punkte in OA sind, so kann man statt B auch den in der Gegenaxe g gelegenen Punkt von OA, nämlich G setzen und statt B_1 den unendlich fernen Punkt U von OA_1.

Die obige Gleichung geht dann in folgende über:

$$(AA_1OD) = (GUOD),$$

oder

$$\frac{AO}{A_1O} : \frac{AD}{A_1D} = \frac{GO}{UO} : \frac{GD}{UD} = \frac{GO}{GD}.$$

Ist G' der Schnittpunkt von AO mit der Gegenaxe g', so muss

$$GO = -G'D$$

sein, man hat also

$$\frac{AO}{A_1O} : \frac{AD}{A_1D} = -\frac{G'D}{GD} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha$$

Aus der Fig. 70 erkennt man, dass

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{MG''}{A_1G''} = \frac{DG'}{A_1G'}$$

ist; nachdem nun auch dann, wenn das System Σ_1 durch Drehung um die Collineationsaxe in eine beliebige andere Stellung gebracht wird, die Gleichung besteht

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{DG'}{A_1G'},$$

wie eine einfache Betrachtung lehrt, und bei dieser Drehung die Verhältnisse $\frac{AD}{A_1D}$, $\frac{G'D}{GD}$ der Gleichung α ungeändert bleiben, so gilt diese Gleichung auch für zwei nicht in derselben Ebene befindliche collineare Systeme, welche perspectivisch liegen. Wir können somit den Satz aufstellen:

18. **Sind A und A_1 zwei entsprechende Punkte perspectivisch liegender ebener Systeme, deren Collineationscentrum O ist und bezeichnet man den Werth des Verhältnisses $\frac{AO}{A_1O}$ durch m, ferner den Werth des Verhältnisses der Abstände, welche A und A_1 von der Collineationsaxe haben, durch n, so hat $\frac{m}{n}$ für jedes Paar entsprechender Punkte einen constanten Werth. Dieser Werth heisst der Modulus der beiden Systeme und ist gleich dem Verhältniss der Abstände der Gegenaxen von der Collineationsaxe negativ genommen.**

Wenn die beiden Systeme in derselben Ebene **entgegengesetzt perspectivisch** liegen, so befinden sich, wie bereits erklärt, die Gegenaxen zwischen dem Collineationscentrum und der Collineationsaxe, daher ist für diesen Fall der **Modulus** immer **negativ**. Liegen die Systeme einstimmig perspectivisch, so haben sie einen **positiven** Modulus, nachdem das Collineationscentrum und die Collineationsaxe sich dann zwischen den Gegenaxen befinden. —

Wir wollen nun untersuchen, wie viele gemeinschaftliche Elemente zwei in derselben Ebene befindliche collineare ebene Systeme und zwei concentrische collineare Strahlenbündel haben können.

Sind AA_1 zwei entsprechende Punkte zweier collinearer Systeme Σ und Σ_1, welche in derselben Ebene liegen, und nennt man S, S_1 jene sich entsprechenden Strahlenbüschel in Σ und Σ_1, deren Mittelpunkte A, A_1 bilden, so erzeugen S und S_1 im allgemeinen einen Kegelschnitt K, der die Punkte A und A_1 enthält. Heissen ferner B, B_1 irgend zwei andere entsprechende Punkte von Σ und Σ_1, so erzeugen jene sich entsprechenden Strahlenbüschel

s, s_1, deren Mittelpunkte B, B_1 sind, ebenfalls einen Kegelschnitt K_1, welcher durch B und B_1 hindurchgeht. Die Kegelschnitte K und K_1 haben einen Punkt, nämlich den Schnittpunkt C der Geraden AB und A_1B_1 gemein, denn diese Geraden bilden sowohl in S und S_1, als auch in s und s_1 ein Paar entsprechender Strahlen. K und K_1 müssen sich daher noch in drei Punkten schneiden, von denen mindestens einer reell ist. Jeder Schnittpunkt von K und K_1, mit Ausnahme des Punktes C, ist nun ein Punkt, welchen die beiden Systeme Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben, nachdem, wenn P irgend einen solchen Punkt bezeichnet, die Geraden AP, BP, den Geraden A_1P, B_1P entsprechen. Dass der Punkt C im allgemeinen kein selbstentsprechender Punkt ist, folgt schon aus dem Umstande, dass derselbe als beliebig gewählt betrachtet werden kann und dass Σ und Σ_1 identisch sein müssten, wenn sie vier Punkte von denen keine drei derselben Geraden angehören, entsprechend gemein hätten. Die drei selbstentsprechenden Punkte liegen, wie leicht einzusehen, im allgemeinen nicht auf derselben Geraden. Nur in dem speciellen Falle, wenn K und K_1 selbst geradling sind, ist dies möglich; dann liegen aber die beiden ebenen Systeme perspectivisch und ihre Collineationsaxe fällt mit dem perspectivischen Durchschnitte der Strahlenbüschel S und S_1, so wie der Büschel s und s_1 zusammen.

Sind drei reelle selbstentsprechende Punkte vorhanden, so sind die Seiten jenes Dreieckes, dessen Ecken von diesen Punkten gebildet werden, selbstentsprechende Gerade. Gibt es nur einen reellen selbstentsprechenden Punkt P, so existirt immer eine, aber auch nur eine reelle selbstentsprechende Gerade p, welche im allgemeinen nicht durch P gehen kann. p ist nämlich jene ideelle gemeinschaftliche Secante der beiden Kegelschnitte K und K_1, welche die zwei imaginären selbstentsprechenden Punkte enthält.

In dem speciellen Falle, wenn K und K_1 sich berühren, ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte eine selbstentsprechende Gerade. Die beiden Systeme haben dann zwei Punkte und zwei Gerade, wovon die eine die zwei Punkte verbindet und die andere durch einen von den zwei Punkten geht, entsprechend gemein.

Als Resultat unserer Untersuchung über die gemeinschaftlichen Elemente zweier collinearer ebener Systeme können wir nun den Satz aufstellen:

19. Zwei collineare ebene Systeme, welche in derselben Ebene, aber nicht perspectivisch liegen, haben im allgemeinen die Eckpunkte und Seiten eines Dreieckes entsprechend gemein. Zwei Eckpunkte, also auch zwei Seiten dieses Dreieckes können imaginär sein; ein Eckpunkt und eine Seite sind jedoch immer reell.

Ein analoger Satz gilt auch bezüglich zweier concentrisch liegender collinearer Strahlenbündel, wie leicht einzusehen ist, wenn man sich beide Bündel durch irgend eine Ebene geschnitten denkt. In dieser Ebene ergeben

sich als Schnitte mit den zwei Bündeln zwei collineare ebene Systeme, deren gemeinschaftliche Elemente aus dem Mittelpunkte der Strahlenbündel durch gemeinschaftliche Elemente der letzteren projicirt werden.

Zum Schlusse dieses Kapitels geben wir noch einige Definitionen, welche sich auf Grundgebilde der zweiten Stufe beziehen.

Unter einem einfachen $n$eck versteht man ein System von n in derselben Ebene liegenden Punkten, die man sich in bestimmter Ordnung auf einander folgend denkt, mit den n Geraden, welche je zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte verbinden. Die n Punkte heissen Eckpunkte und die n Verbindungslinien Seiten des $n$eckes.

Einfaches $n$seit wird ein System von n in derselben Ebene liegenden Geraden genannt, welche man sich in bestimmter Ordnung auf einander folgend denkt, mit den n Durchschnittspunkten von je zwei unmittelbar auf einander folgenden Geraden. Die n Geraden heissen Seiten, die n Punkte Ecken des $n$seits.

Ein einfaches $n$eck ist also gleichbedeutend mit einem einfachen $n$seit.

Jede Verbindungslinie nicht unmittelbar auf einander folgender Eckpunkte eines einfachen $n$eckes oder $n$seits wird eine Diagonale und jeder Durchschnittspunkt von je zwei nicht unmittelbar auf einander folgenden Seiten ein Diagonalpunkt genannt.

Ein einfaches $n$eck wird durch jeden ausserhalb seiner Ebene gelegenen Punkt durch ein einfaches $n$kant und jedes einfache $n$seit durch ein einfaches $n$seit im Strahlenbündel projicirt. Das einfache $n$kant, so wie auch das einfache $n$seit im Strahlenbündel haben daher n Kanten und n Seiten.

Ein vollständiges $n$eck wird durch ein System von n in derselben Ebene liegenden Punkten mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien dieser Punkte, und ein vollständiges $n$seit durch ein System von n in derselben Ebene liegenden Geraden mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnittspunkten dieser Geraden gebildet. Das vollständige $n$eck hat also n Eckpunkte und $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten, das vollständige $n$seit n Seiten und $\frac{n(n-1)}{2}$ Eckpunkte. Dass im vollständigen $n$eck $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten vorhanden sein müssen, sieht man leicht ein, wenn man berücksichtigt, dass jeder Eckpunkt mit allen übrigen Eckpunkten durch $(n-1)$ Seiten verbunden erscheint.

Ein vollständiges $n$eck wird durch jeden ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkt durch ein vollständiges $n$kant, und ein vollständiges $n$seit durch ein vollständiges $n$seit im Strahlenbündel projicirt. Das

vollständige $n$kant hat somit nKanten und $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten, während das vollständige $n$seit im Strahlenbündel aus nSeiten und $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten besteht.

Wenn die Ecken und Seiten eines $n$eckes, das einem ebenen Systeme Σ angehört, beziehungsweise den Ecken und Seiten eines $n$eckes entsprechen, welches in einem mit Σ collinear verwandten ebenen Systeme Σ_1 liegt, so sagt man, dass die beiden $n$ecke sich entsprechen. Ebenso nennt man zwei $n$seite sich entsprechende Gebilde, wenn ihre Seiten und Ecken entsprechende Elemente collinearer Systeme sind.

Zwei $n$kante oder $n$seite im Strahlenbündel werden entsprechende Gebilde genannt, wenn ihre Kanten und Seiten durch entsprechende Elemente zweier collinearer Strahlenbündel gebildet werden.

Mit Rücksicht auf diese Erklärungen kann nun aus obigem Satze 19 der folgende abgeleitet werden: Zwei concentrische collineare Strahlenbündel, welche nicht perspectivisch liegen, haben im allgemeinen die Kanten und Seiten eines Dreikantes entsprechend gemein. Zwei Kanten, also auch zwei Seiten dieses Dreikantes können imaginär sein; eine Kante und eine Seite sind jedoch immer reell.

b) Specielle collineare Verwandtschaft: Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz.

In dem speciellen Falle, wenn die unendlich fernen Geraden von zwei collinearen ebenen Systemen einander entsprechen, oder, was dasselbe ist, wenn die Gegenaxen solcher Systeme in unendlicher Entfernung liegen, nennt man die beiden Systeme affin. Die Affinität ist also ein specieller Fall der Collineation.

Aus dieser Erklärung und dem Satze 2, 3. Abschnitt, ergibt sich unmittelbar:

20. In affinen ebenen Systemen entsprechen parallelen Geraden des einen Systems parallele Gerade des andern.

Aus dem Satze 5, 3. Abschnitt, kann man schliessen:

21. In affinen ebenen Systemen sind je zwei entsprechende Punktreihen einander ähnlich.

Solche Punktreihen sind nämlich dem erwähnten Satze zufolge projectivisch und da ihre unendlich fernen Elemente sich entsprechen, so müssen sie auch ähnlich sein.

Eine Specialität des Satzes 8, 3. Abschnitt, ist der folgende:

22. Will man zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 affin auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben ein Dreieck beliebig annehmen und die Seiten des einen Dreieckes den Seiten des andern willkürlich als entspre-

chende Gerade zuweisen. Jedem Elemente in Σ entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element in Σ_1.

Da nämlich die unendlich entfernten Geraden der beiden affinen Systeme schon ein Paar entsprechender Geraden bilden, so können, wie der angeführte Satz lehrt, nur mehr drei Paare von Geraden beliebig gewählt werden.

Sind abc und $a_1 b_1 c_1$ die beziehungsweise in Σ und Σ_1 liegenden, einander als entsprechend zugewiesenen Geraden und heissen ABC, $A_1 B_1 C_1$ die Eckpunkte jener zwei Dreiecke, deren Seiten diese Geraden bilden, so kann man, um zu irgend einem Punkte D in Σ den entsprechenden D_1 in Σ_1 zu bestimmen, folgendermassen verfahren: Man verbindet D mit A, wodurch sich im Schnittpunkte von AD mit der Dreieckseite BC ein Punkt E ergibt, bestimmt in $B_1 C_1$ jenen Punkt E_1, welcher der Proportion entspricht:

$$BC : EC = B_1 E_1 : E_1 C_1$$

und verbindet E_1 mit A_1. Der gesuchte Punkt D_1 muss dann in $A_1 E_1$ liegen und ist offenbar jener Punkt, der die Strecke $A_1 E_1$ in demselben Verhältnisse theilt, wie der Punkt D die Strecke AE.

Aus dem zuletzt aufgestellten Satze ergeben sich unmittelbar die folgenden:

23. Zwei Dreiecke können immer als affine Figuren betrachtet werden.

24. Zwei affine ebene Systeme sind identisch, wenn sie ein Dreieck entsprechend gemein haben.

Eine wichtige Eigenschaft affiner ebener Systeme ist, dass die Flächeninhalte von irgend zwei entsprechenden Figuren derselben ein constantes Grössenverhältniss haben. Um dies zu beweisen nehmen wir an, D und d (Fig. 71) seien irgend zwei beliebige Dreiecke eines ebenen Systemes Σ und D_1, d_1 die entsprechenden Dreiecke eines mit Σ affinen ebenen Systemes Σ_1.

(Fig. 71.)

Die Seiten G und g betrachten wir als Grundlinien der Dreiecke D und d, die entsprechenden Seiten G_1 und g_1 als Grundlinien der Dreiecke D_1 und d_1. Zieht man durch die Spitze eines jeden der vier Dreiecke eine parallele Gerade zur Grundlinie, nämlich die Geraden m, n, m_1, n_1, so erhält man zwei Parallelogramme P und P_1, welche durch m, n, m_1, n_1 und jene Geraden zu Stande kommen, in denen die Grundlinien G, g und G_1, g_1 liegen. Bezeichnet man die in den Geraden G und G_1 gelegenen Seiten der beiden Parallelogramme beziehungsweise durch S und S_1, so besteht nach obigem Satze 21 die Proportion:

$$G : S = G_1 : S_1.$$

Da ferner P und D, so wie auch P_1 und D_1 gleiche Höhe haben, ist:

$$D : \frac{P}{2} = G : S$$

und

$$D_1 : \frac{P_1}{2} = G_1 : S_1,$$

also

$$D : D_1 = P : P_1.$$

Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass

$$d : d_1 = P : P_1$$

sein muss, woraus mit Rücksicht auf die vorhergehende Proportion folgt:

$$D : D_1 = d : d_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha$$

oder

$$D : d = D_1 : d_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \beta.$$

Nachdem man sich jede beliebige ebene Figur aus Dreiecken zusammengesetzt denken kann, so lässt sich aus diesen beiden Proportionen schliessen:

25. **In affinen ebenen Systemen haben die Flächen von irgend zwei entsprechenden Figuren ein constantes Grössenverhältniss und die Flächen zweier beliebiger Figuren des einen Systemes verhalten sich zu einander, wie die Flächen der entsprechenden Figuren des anderen Systemes.**

Da der Schwerpunkt eines Dreieckes im Durchschnittspunkte jener Geraden erhalten wird, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, so sind in affinen ebenen Systemen die Schwerpunkte zweier entsprechender Dreiecke, wie leicht einzusehen, entsprechende Punkte. Hieraus kann man schliessen, nachdem sich jede ebene Figur in Dreiecke zerlegen lässt:

26. **In affinen ebenen Systemen sind die Schwerpunkte entsprechender Figuren entsprechende Punkte.**

Den allgemeinen Erklärungen über die perspectivische Lage collinearer Systeme zufolge liegen zwei affine ebene Systeme perspectivisch, wenn sie Schnitte desselben Strahlenbündels sind, oder, in dem Falle als sie derselben Ebene angehören, wenn sie eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben. Der Strahlenbündel, dessen Schnitte zwei affine ebene Systeme bilden, ist immer ein Parallelstrahlenbündel, wenn die Ebenen, in welchen die beiden Systeme liegen nicht parallel sind; denn sonst könnten sich die Gegenaxen nicht in unendlicher Entfernung befinden, wie es die affine Verwandtschaft verlangt. Liegen die zwei affinen Systeme in derselben Ebene perspectivisch, so ist der Strahlenbüschel, welchen sie entsprechend gemein haben, immer ein Parallelbüschel, ausser in dem Falle, wenn je zwei entsprechende Gerade der beiden Systeme zu einander parallel sind. Wären nämlich irgend zwei entsprechende Gerade a und a_1 nicht parallel und setzt man voraus, der selbstentsprechende Strahlenbüschel hätte einen in endlicher Entfernung gelegenen Mittelpunkt, so könnten die Gegenpunkte der auf a und a_1 befindlichen Punktreihen nicht in unendlicher Entfernung liegen.

Die Collineationsaxe affiner Systeme wird Affinitätsaxe und jeder Collineationsstrahl ein Affinitätsstrahl genannt.

Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass alle Affinitätsstrahlen im allgemeinen unter einander parallel sind, dass also das Collineationscentrum affiner Systeme im allgemeinen in unendlicher Entfernung liegt. Nur in dem Falle, wenn die Affinitätsaxe auch unendlich ferne gelegen ist, kann das Collineationscentrum solcher Systeme sich in endlicher Entfernung befinden. Diesen speciellen Fall wollen wir vorläufig nicht in Betracht ziehen und nehmen immer an, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt ist, die Affinitätsaxe sei in endlicher Entfernung gelegen.

Sind AA_1 und BB_1 irgend zwei Paare entsprechender Punkte, welche perspectivischen affinen Systemen, die in derselben Ebene liegen, angehören, so ist die Gerade AA_1 der Geraden BB_1 parallel, nachdem diese zwei Geraden Affinitätsstrahlen sein müssen. Heissen die Durchschnittspunkte von AA_1 und BB_1 mit der Affinitätsaxe beziehungsweise M und N, so besteht die Proportion:

$$AM : A_1M = BN : B_1N,$$

wie leicht einzusehen ist, wenn man berücksichtigt, dass die Geraden AB und A_1B_1 sich, als entsprechende Gerade, in einem Punkte der Affinitätsaxe schneiden. Bezeichnet O das in unendlicher Entfernung gelegene Collineationscentrum, so ist der Werth des Doppelverhältnisses:

$$\frac{AO}{A_1O} : \frac{AM}{A_1M}$$

der Modulus der affinen Systeme (Satz 18, 3. Abschnitt) und da das Verhältniss $\frac{AO}{A_1O}$ den Werth 1 hat, so muss

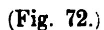
$$\frac{A_1M}{AM}=\frac{B_1N}{BN}$$

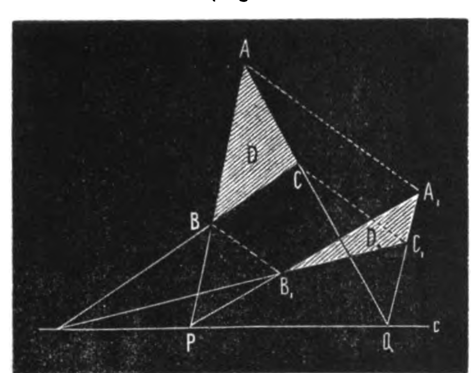
gleich dem Modulus sein. Hieraus folgt, dass der Modulus auch gleich ist dem Verhältnisse der Abstände irgend zweier sich entsprechender Punkte von der Affinitätsaxe und da diese Abstände keine Aenderung erleiden, wenn man das eine der beiden Systeme um die Affinitätsaxe dreht, so kann man schliessen:

27. In zwei perspectivischen, affinen Systemen hat das Verhältniss der Abstände irgend zweier entsprechender Punkte von der Affinitätsaxe einen constanten Werth, welcher gleich dem Modulus der beiden Systeme ist.

Liegen die zwei affinen Systeme in derselben Ebene und befinden sich zwei entsprechende Punkte zu verschiedenen Seiten der Affinitätsaxe, so ist der Modulus negativ und man sagt, dass die Systeme entgegengesetzt perspectivisch liegen. Befinden sich aber zwei entsprechende Punkte auf derselben Seite der Affinitätsaxe, so hat der Modulus einen positiven Werth und die beiden Systeme werden einstimmig perspectivisch liegend genannt.

Sind D und D_1 (Fig. 72.) irgend zwei entsprechende Dreiecke perspectivisch liegender affiner Systeme, so hat nach Satz 25, 3. Abschnitt, das Verhältniss der Flächen von D und D_1 einen für je zwei solche Dreiecke constanten Werth. Dieser Werth ist gleich dem Modulus der beiden Systeme, wie folgende Betrachtung lehrt. — Die Eckpunkte von D seien ABC, jene von D_1 nennen wir $A_1B_1C_1$ und die in der Affinitätsaxe gelegenen Durchschnittspunkte der Seiten AB, A_1B_1 und AC, A_1C_1 seien beziehungsweise P und Q. — Obigem Satze 25 zufolge besteht dann die Proportion:


(Fig. 72.)



$$D : D_1 = APQ : A_1PQ;$$

da nun die Dreiecke APQ und A_1PQ die Grundlinie PQ gemeinschaftlich haben, so verhalten sich ihre Flächen wie ihre Höhen. Die letzteren sind aber gleich den Abständen der entsprechenden Punkte A und A_1 von der Affinitätsaxe, somit ist das Verhältniss der Flächen von D und D_1 gleich dem Modulus der affinen Systeme. Hieraus folgt der Satz:

28 In zwei perspectivischen affinen Systemen ist das Grössenverhältniss von irgend zwei entsprechenden Figuren gleich dem Modulus der beiden Systeme.

Wir wollen nun die Frage beantworten, ob zwei affine Systeme sich immer in perspectivische Lage bringen lassen und wie die betreffende Construction durchzuführen wäre.

Sind S und S_1 irgend zwei entsprechende Strahlenbüschel affiner ebener Systeme Σ und Σ_1, so gibt es in S zwei auf einander senkrecht stehende Strahlen r, s, deren entsprechende r_1, s_1, in S_1 ebenfalls auf einander senkrecht stehen, und jedem rechten Winkel in Σ, dessen Schenkel zu r, s parallel sind, entspricht ein ebenfalls rechter Winkel in Σ_1, dessen Schenkel parallel zu r_1, s_1 laufen. In jedem von zwei affinen ebenen Systemen gibt es also zwei — im allgemeinen aber nicht mehr — auf einander senkrecht stehende Richtungen, deren entsprechende im anderen Systeme ebenfalls einen rechten Winkel bilden. Diese Richtungen nennen wir die Normalrichtungen der affinen Systeme.

Heissen nun ABC die Ecken eines rechtwinkligen Dreieckes in Σ, dessen Katheten AB, AC zu den Normalrichtungen parallel sind, und nennt man $A_1B_1C_1$ die Eckpunkte des diesem Dreiecke entsprechenden Dreieckes in Σ_1, so können Σ und Σ_1 in perspectivische Lage gebracht werden, wenn es zwei solche Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ gibt, deren Hypothenusen BC, B_1C_1 gleiche Länge haben. Man würde nämlich Σ und Σ_1 in perspectivischer Lage erhalten, wenn man BC und B_1C_1 zur Coincidenz brächte. Denn die auf BC und B_1C_1 befindlichen ähnlichen Punktreihen müssten congruent sein, wenn $BC = B_1C_1$ wäre (Satz 29, 1. Abschnitt) und ihre vereinigten Träger würden die Affinitätsaxe bilden. Nimmt man eine Kathete des Dreieckes ABC, etwa AB, beliebig an, so ist die Länge der Kathete A_1B_1 vollkommen bestimmt. Wird nun vorausgesetzt, die Katheten AC und A_1C_1 hätten für den Fall als $BC = B_1C_1$ ist, beziehungsweise die Längen x und x_1, so besteht die Gleichung

$$AB^2 + x^2 = A_1B_1{}^2 + m^2x^2,$$

wenn m dass Verhältniss angibt, welches je zwei entsprechende Strecken der auf AC und A_1C_1 befindlichen Punktreihen zu einander haben. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{AB^2 - A_1B_1{}^2}{m^2 - 1}},$$

woraus zu ersehen ist, dass x auch imaginär sein kann, AB mag wie immer gewählt werden. Für diesen Fall ist es nicht möglich, die beiden Systeme in perspectivische Lage zu bringen.

Existirt ein reeller Werth von x, so sind nicht bloss die auf BC und B_1C_1 gelegenen sich entsprechenden Punktreihen, sondern überhaupt irgend zwei entsprechende Reihen, deren Träger parallel zu BC und B_1C_1 laufen, congruent. Nachdem aber, wenn x reell ist, im allgemeinen noch eine zweite Gerade aus B gezogen werden kann, deren zwischen B und AC gelegene Strecke BC' gleich der Länge der entsprechenden Strecke B_1C_1' ist, so gibt es im allgemeinen noch ein zweites System von parallelen Geraden in Σ und Σ_1, welche Träger congruenter sich entsprechender Punktreihen sind. Nur wenn $x = 0$

wird, coincidiren BC und BC' mit AB und es gibt dann eine einzige Richtung, in welcher congruente entsprechende Punktreihen liegen. Diese Richtung muss zugleich eine Normalrichtung sein.

Aus dieser Untersuchung können wir also den Schluss ziehen:

29. **Zwei affine ebene Systeme können nicht immer in perspectivische Lage gebracht werden, nachdem nicht immer congruente entsprechende Punktreihen in denselben vorhanden sind. Gibt es eine Reihe, deren entsprechende mit ihr congruent ist, so sind unendlich viele solche Reihen vorhanden. Ihre Träger haben entweder zwei verschiedene Richtungen, welche mit einer Normalrichtung gleiche Winkel bilden, oder sie sind alle parallel zu einer Normalrichtung. In diesen beiden Fällen kann man Σ und Σ_1 auf unendlich viele Arten in perspectivische Lage bringen.**

Zwei affine ebene Systeme, in welchen je zwei entsprechende Strecken dasselbe Längenverhältniss haben, werden **ähnlich** genannt. Während also in affinen ebenen Systemen nur solche entsprechende Strecken ein bestimmtes constantes Längenverhältniss haben, die denselben sich entsprechenden Richtungen parallel sind, so ist in ähnlichen ebenen Systemen das Längenverhältniss von irgend zwei entsprechenden Strecken constant, welche auch ihre Richtungen sein mögen. Die Aehnlichkeit ist somit ein specieller Fall der Affinität.

In ähnlichen ebenen Systemen haben je zwei entsprechende Winkel gleiche Grösse, wie leicht einzusehen ist, wenn man berücksichtigt, dass je zwei entsprechende Dreiecke solcher Systeme in Folge der Proportionalität ihrer Seiten einander ähnlich sein müssen. Hieraus folgt, **dass je zwei entsprechende Strahlenbüschel ähnlicher ebener Systeme congruent sind.**

Sowie bei affinen ebenen Systemen überhaupt hat auch das Verhältniss der Flächen von je zwei entsprechenden Figuren ähnlicher Systeme einen constanten Werth. Dieser Werth ist gleich dem Verhältnisse der Quadrate irgend zweier entsprechender Strecken, wie mit Benützung eines bekannten Lehrsatzes der elementaren Geometrie leicht nachgewiesen werden kann.

Liegen zwei ähnliche ebene Systeme Σ und Σ_1 perspectivisch, so bilden je zwei entsprechende Gerade mit der Collineationsaxe gleiche Winkel und da solche Gerade sich auch in dieser Axe schneiden sollen, so müssten Σ und Σ_1 congruent sein, wenn ihre Collineationsaxe in endlicher Entfernung gelegen wäre. **Die Collineationsaxe ähnlicher nicht congruenter ebener Systeme liegt somit in unendlicher Entfernung.** Hieraus kann man schliessen, **dass die Ebenen perspectivischer ähnlicher Systeme immer zu einander parallel sind, oder zusammenfallen. Das Collineationscentrum befindet sich stets in endlicher Entfernung.** Denn würde es unendlich ferne liegen,

so müssten die beiden Systeme congruent sein, nachdem in diesem Falle je zwei entsprechende Punktreihen congruent wären. — Das Collineationscentrum ähnlicher Systeme wird der **Aehnlichkeitspunkt** genannt. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte heissen **Aehnlichkeitsstrahlen.**

Befinden sich je zwei entsprechende Punkte perspectivischer ähnlicher Systeme Σ und Σ_1 zu verschiedenen Seiten des Aehnlichkeitspunktes, so sagt man, dass Σ und Σ_1 entgegengesetzt perspectivisch liegen und wenn je zwei entsprechende Punkte auf derselben Seite des Aehnlichkeitspunktes gelegen sind, so werden Σ und Σ_1 einstimmig perspectivisch genannt. Im ersteren Falle heisst der Aehnlichkeitspunkt ein innerer, im zweiten ein äusserer.

Nachdem das Verhältniss der Abstände je zweier entsprechender Punkte von der unendlich fernen Collineationsaxe ähnlicher ebener Systeme gleich der Einheit ist, so muss der Modulus solcher Systeme gleich dem Verhältnisse der Abstände irgend zweier entsprechender Punkte vom Aehnlichkeitspunkt, oder was dasselbe ist, gleich dem Längenverhältnisse von irgend zwei entsprechenden Strecken sein (Satz 18, 3. Abschnitt). Der Modulus einstimmig perspectivischer Systeme ist demnach positiv, der Modulus entgegengesetzt perspectivischer Systeme negativ.

Zwei ähnliche ebene Systeme können immer dadurch in perspectivische Lage gebracht werden, dass man irgend zwei nicht parallele Gerade des einen Systemes mit den ihnen entsprechenden Geraden des anderen Systems in parallele Lage bringt. Denn es laufen dann je zwei entsprechende Gerade zu einander parallel und schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte, welcher der Collineationsaxe angehört.

Ein specieller Fall der Aehnlichkeit ist die Congruenz, da zwei ähnliche ebene Systeme congruent genannt werden, wenn das Längenverhältniss von je zwei entsprechenden Strecken gleich der Einheit ist, also je zwei solche Strecken gleiche Länge haben. In congruenten ebenen Systemen sind somit je zwei entsprechende Strecken, sowie auch je zwei entsprechende Winkel einander gleich.

Die Collineationsaxe congruenter ebener Systeme, welche perspectivisch liegen, kann sowohl in endlicher, als auch in unendlicher Entfernung gelegen sein. Im ersteren Falle befindet sich das Collineationscentrum unendlich weit entfernt, im zweiten kann es entweder ebenfalls unendlich ferne, oder zwischen je zwei entsprechenden Punkten in gleichen Abständen von ihnen entfernt liegen. Befinden sich die zwei perspectivischen congruenten Systeme in derselben Ebene und haben sie eine in endlicher Entfernung gelegene Collineationsaxe, so stehen alle Collineationsstrahlen senkrecht auf dieser Axe und der Abstand, von je zwei entsprechenden Punkten wird durch die Axe halbirt. — Der Modulus congruenter ebener Systeme ist gleich ± 1.

Dass je zwei congruente ebene Systeme auf unendlich viele Arten in perspectivische Lage gebracht werden können, ist selbstverständlich.

e) Involution collinearer Grundgebilde der zweiten Stufe.

Haben zwei in derselben Ebene befindliche collineare Systeme Σ und Σ_1 eine derartige Lage, dass jedem Punkte A ihrer Ebene derselbe Punkt A_1 entspricht, ob man A als Punkt von Σ oder von Σ_1 betrachtet, so sagt man, dass die beiden Systeme involutorisch liegen, oder dass sie eine Involution bilden. Häufig fasst man beide Systeme als ein einziges auf und bezeichnet sie als ein involutorisches ebenes System. — Dass in zwei involutorisch liegenden ebenen Systemen auch jeder Geraden a dieselbe Gerade a_1 entspricht, man mag a als Element des einen oder des anderen Systems betrachten, ist leicht einzusehen.

Diesen Erklärungen zufolge ist jede Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte eines involutorischen ebenen Systemes eine selbstentsprechende Gerade. Sind daher A, A_1 und B, B_1 irgend zwei Paare solcher Punkte, so muss der Schnittpunkt der Geraden AA_1 und BB_1 ein selbstentsprechender Punkt und zugleich der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels sein, welchen die involutorischen ebenen Systeme entsprechend gemein haben. Hieraus folgt (nach Satz 13, 3. Abschnitt), dass zwei zu einer Involution vereinigte ebene Systeme immer perspectivisch liegen.

Nachdem die auf den Collineationsstrahlen solcher Systeme befindlichen Punktreihen (nach Satz 51, 1. Abschnitt) gleichfalls involutorisch sind, so coincidiren die Gegenpunkte von je zwei entsprechenden Reihen, deren Träger ein Collineationsstrahl ist, woraus man schliessen kann, dass die Gegenaxen involutorischer ebener Systeme zusammenfallen. Aus Satz 16, 3. Abschnitt, geht ferner hervor, dass ein Zusammenfallen dieser Gegenaxen nur dann möglich ist, wenn die ebenen Systeme entgegengesetzt perspectivisch liegen, und dass die vereinigten Axen den Abstand des Collineationscentrums von der Collineationsaxe halbiren.

Die Collineationsaxe involutorischer ebener Systeme wird Involutionsaxe, das Collineationscentrum Involutionscentrum und jeder Collineationstrahl ein Involutionsstrahl genannt.

Wir können nun den Satz aufstellen:

30. Involutorische ebene Systeme liegen immer entgegengesetzt perspectivisch. Ihre Gegenaxen fallen zusammen und halbiren den Abstand des Involutioncentrums von der Involutionsaxe, daher ist ihr Modulus immer gleich -1.

Aus der über die Involution von Punktreihen gegebenen Erklärung und dem Satze 50, 1. Abschnitt, ergibt sich:

31. Zwei collineare Systeme, welche in derselben Ebene perspectivisch liegen, bilden eine Involution, wenn ihre Gegenaxen coincidiren, wenn also ihr Modulus gleich -1 ist.

Da jede aus entsprechenden Punkten eines involutorischen ebenen Systemes bestehende Punktreihe (deren Träger ein Collineationsstrahl bildet) involutorisch ist, so werden je zwei entsprechende Punkte eines solchen Systemes durch das Involutionscentrum und die Involutionsaxe harmonisch getrennt. Dasselbe gilt bezüglich zweier entsprechender Geraden, nachdem jeder Strahlenbüschel, welcher durch entsprechende Gerade gebildet wird (also seinen Mittelpunkt in der Involutionsaxe hat), gleichfalls involutorisch ist. Es gilt daher der Satz:

32. Je zwei entsprechende Punkte, so wie auch je zwei entsprechende Gerade eines involutorischen ebenen Systems werden durch das Involutionscentrum und die Involutionsaxe harmonisch getrennt.

Kennt man zwei Paare entsprechender Punkte AA_1 und BB_1 eines involutorischen ebenen Systemes, welche nicht derselben Geraden angehören, so lässt sich zu jedem beliebigen Punkte D der entsprechende D_1 unzweideutig ermitteln; es erscheint somit durch die Angabe von zwei Paaren entsprechender Punkte ein involutorisches ebenes System vollkommen bestimmt (vergl. Satz 8, 3. Abschnitt). Das Involutionscentrum O ist nämlich der Durchschnittspunkt von AA_1 und BB_1, die Involutionsaxe c ist die Verbindungslinie der Punkte, in welchen sich AB, A_1B_1 und AB_1, A_1B schneiden, endlich muss D_1 jener Punkt in OD sein, der von D durch O und c harmonisch getrennt wird.

Aus dem Umstande, dass der Modulus involutorischer ebener Systeme immer gleich -1 ist, folgt, dass in zwei affinen ebenen Systemen, welche involutorisch liegen, die Abstände von je zwei entsprechenden Punkten durch die Involutionsaxe halbirt werden. Nachdem der Modulus ähnlicher ebener Systeme nur dann gleich -1 werden kann, wenn die Aehnlichkeit in Congruenz übergeht, so ist es nicht möglich zwei ähnliche, nicht congruente ebene Systeme zu einer Involution zu vereinigen.

Bei einer Involution, welche aus zwei congruenten ebenen Systemen besteht, kann die Involutionsaxe entweder in endlicher, oder in unendlicher Entfernung gelegen sein. Im ersteren Falle halbirt die Involutionsaxe, im zweiten Falle das Involutionscentrum die Abstände von je zwei entsprechenden Punkten, wie aus dem Umstande hervorgeht, dass der Modulus immer gleich -1 sein muss.

Da in einer Involution, welche durch affine oder congruente ebene Systeme zu Stande kommt, je zwei entsprechende Punkte von der Involutionsaxe gleich weit abstehen, so nennt man eine derartige Involution eine symetrische und ihre Involutionsaxe die Axe der Symetrie. Bei affinen involutorischen Systemen liegt die Symetrieaxe schief gegen alle Verbindungslinien entsprechender Punkte, bei congruenten involutorischen Systemen steht sie auf diesen Linien senkrecht. Jene involutorischen ebenen Systeme, mit unendlich ferner

Involutionsaxe, welche durch Vereinigung congruenter ebener Systeme entstehen, werden centrisch-symetrische Systeme genannt und ihr Involutionscentrum heisst das Centrum der Symetrie. Man hat also dreierlei Arten der Symetrie zu unterscheiden: Die schiefaxige, die normalaxige und die centrische Symetrie.*)

Von zwei collinearen Strahlenbündeln sagt man, dass sie involutorisch sind, wenn irgend zwei Elemente a und a_1 derselben sich entsprechen, ob man a als Element des einen, oder des anderen Bündels betrachtet. Zwei solche Strahlenbündel werden häufig als ein einziger aufgefasst, welchen man einen involutorischen Bündel nennt. Jeder Schein eines involutorischen ebenen Systemes ist dieser Erklärung zufolge ein involutorischer Strahlenbündel und jeder ebene Schnitt eines derartigen Bündels ein involutorisches ebenes System. Es fällt nicht schwer jene Eigenschaften involutorischer Strahlenbündel nachzuweisen, welche den Eigenschaften involutorischer ebener Systeme analog sind.

Von einem Strahlenbündel s und einem ebenen Systeme Σ sagt man, dass sie involutorisch liegen, wenn der Träger von Σ den Bündel s in einem ebenen Systeme schneidet, welches gegen Σ involutorisch liegt.

d) Collineation von ebenen Curven, insbesondere von Kegelschnitten.

Zwei ebene Curven heissen collinear, wenn sie collinearen ebenen Systemen angehören und jede derselben die Verbindungslinie jener Punkte ist, welche den Punkten der andern Curve entsprechen. Sind C und C_1 zwei derartige Curven und wird C durch irgend eine Gerade a in n Punkten geschnitten, so schneidet die der Geraden a entsprechende a_1 die Curve C_1 ebenfalls in n Punkten; denn jedem Schnittpunkte von a_1 und C_1 kann nur ein Punkt entsprechen, welcher zugleich in a und C liegt, also nur ein Schnittpunkt von a und C. Berührt a die Curve C in einem Punkte A, so ist a_1 eine Tangente von C_1, deren Berührungspunkt der dem Punkte A entsprechende A_1 ist. Würde nämlich a_1 die Curve C_1 nicht berühren, sondern schneiden, so müssten diesem Schnittpunkte die zwei in A vereinigten Schnittpunkte von a und C entsprechen, was mit dem Umstande in Widerspruch stünde, dass jedem Punkte des einen Systemes nur ein einziger Punkt des anderen entsprechen kann. Hieraus folgt, dass wenn P und P_1 irgend zwei Punkte der ebenen Systeme sind und sich aus P an die Curve C n Tangenten ziehen lassen, dass es auch möglich ist von P_1 aus an C_1 n, aber nicht mehr, Tangenten zu ziehen. Wir können somit schliessen:

33. Zwei collineare ebene Curven sind immer von derselben Ordnung und Classe. Einem Kegelschnitte kann daher nur wieder ein Kegelschnitt collinear sein.

---

*) Vergleiche den Anhang des kleinen Werkes von Chr. Paulus: „Zeichnende Geometrie". Stuttgart, 1866.

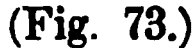


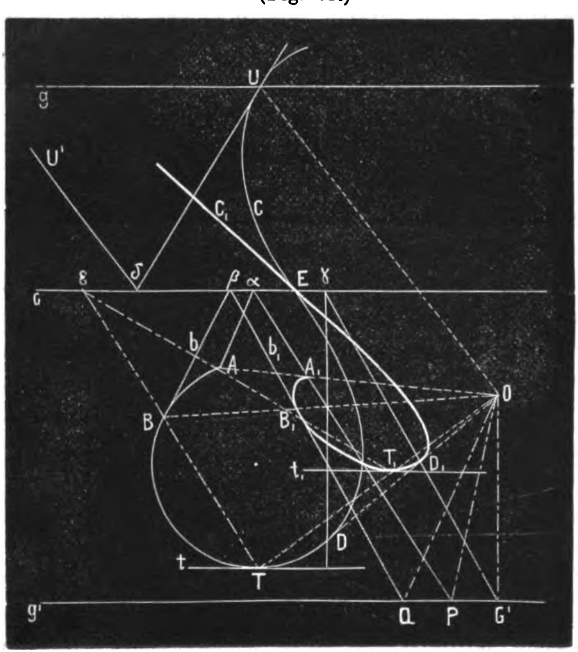
Sind g und g' die Gegenaxen der ebenen Systeme, in welchen die collinearen Curven C und C_1 liegen, und schneidet C die Axe g in n Punkten, so müssen n Punkte von C_1 in unendlicher Entfernung liegen und den n Tangenten, welche C in ihren Schnittpunkten mit g berühren, entsprechen n Asymptoten von C_1. — Berührt C die Gegenaxe g, so ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente von C_1 und haben C und g keinen reellen Punkt gemein, so besitzt C_1 keinen reellen unendlich fernen Punkt. Hieraus kann man schliessen, dass wenn C und C_1 zwei Kegelschnitte sind, die Curve C_1 eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel sein muss, je nachdem die Gegenaxe g von C nicht geschnitten, berührt, oder in zwei Punkten geschnitten wird.

Liegen die ebenen Systeme, welchen zwei collineare Curven angehören, perspectivisch, so gehen die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten dieser Curven durch ein und denselben Punkt, nämlich durch das Collineationscentrum, und zwei Tangenten, deren Berührungspunkte sich entsprechen, schneiden sich in einem Punkte der Collineationsaxe. Den Schnittpunkten irgend eines Collineationsstrahles mit der einen Curve entsprechen die Schnittpunkte desselben Strahles mit der anderen Curve, woraus folgt, dass wenn ein Collineationsstrahl die eine Curve berührt, er auch Tangente der anderen Curve sein muss und dass umgekehrt jede gemeinschaftliche Tangente beider Curven, deren Berührungspunkte sich entsprechen, durch das Collineationscentrum gehen muss. Je zwei sich entsprechende Tangenten schneiden sich in einem Punkte der Collineationsaxe, daher entspricht jeder Tangente, welche parallel zur Collineationsaxe ist, eine ebenfalls zu dieser Axe parallele Tangente. Schneiden sich zwei Tangenten der einen Curve in einem Punkte der zugehörigen Gegenaxe, so entsprechen ihnen parallele Tangenten der andern Curve und umgekehrt. Endlich müssen die beiden Curven gemeinsame Schnittpunkte und Berührungspunkte mit der Collineationsaxe haben, da Schnittpunkte jeder der zwei Curven mit dieser Axe selbstentsprechende Punkte sind.

Es fällt nun nicht schwer eine Curve C_1 zu construiren (Fig. 73), welche einer gegebenen Curve C collinear ist, und gegen dieselbe perspectivisch liegt. Als gegeben setzen wir das Collineationscentrum O, die Collineationsaxe c und die Gegenaxen g, g' voraus. Um zu dem Punkte A der Curve C den entsprechenden A_1 in C_1 zu bestimmen, zieht man den Collineationsstrahl AO in welchem A_1 liegen muss, und ermittelt zu irgend einer zweiten, durch A gehenden Geraden $A\alpha$ die entsprechende $A_1\alpha$. Der Schnittpunkt von AO und $A_1\alpha$ ist dann der gesuchte Punkt A_1. Die Gerade $A_1\alpha$ ergibt sich, wenn man durch O eine Parallele zu $A\alpha$ zieht und den Schnittpunkt P dieser Parallelen und der Gegenaxe g' mit jenem Punkte α verbindet, in welchem $A\alpha$ die Collineationsaxe schneidet. Dass αP der Geraden $A\alpha$ entspricht geht daraus hervor, dass α ein selbstentsprechender Punkte ist und P dem unendlich fernen Punkte von $A\alpha$ entsprechen muss, nachdem der Collineationsstrahl OP die Gerade $A\alpha$ in unendlicher Entfernung schneidet.

Ist b irgend eine die Curve C im Punkte B berührende Tangente und heisst ihr Schnittpunkt mit der Collineationsaxe β, so erhält man die ihr entsprechende Tangente b_1, wenn man β mit jenem Punkte Q verbindet, in welchem eine durch O zu b parallel gezogene Gerade OQ die Gegenaxe g' schneidet. Der


(Fig. 73.)



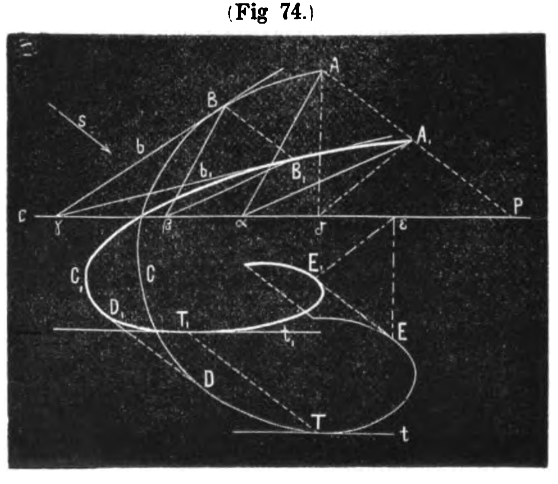
Berührungspunkt B_1 von b_1 ist der Durchschnitt von OB mit $Q\beta$. — In unserer Figur wurde auch jene Tangente t_1 ermittelt, welche der zu c parallelen Tangente t entspricht. — Dass die gesuchte Curve C_1 jene Tangenten berühren muss, welche von O an C gezogen werden können, ist leicht einzusehen. Eine solche Tangente ist OD. Der Berührungspunkt D_1 von OD mit C_1, welcher dem Berührungspunkte D entspricht, kann auf dieselbe Art bestimmt werden, wie der Punkt A_1 bestimmt wurde. Die beliebige durch D zu ziehende Gerade haben wir in unserer Figur auf der Collineationsaxe senkrecht stehend angenommen. — Der Schnittpunkt E der Curve C mit der Collineationsaxe ist zugleich ein Punkt der Curve C_1; die Tangente in E an letztere Curve lässt sich in derselben Weise construiren, wie die Tangente b_1.

Bezeichnet U den Schnittpunkt von C mit der Gegenaxe g und schneidet die in U gezogenene Tangente die Collineationsaxe in δ, so muss die Gerade $\delta U'$, welche durch δ parallel zu OU gezogen wird, eine Asymptote der Curve C_1 sein. Die Geraden δU und $\delta U'$ sind nämlich entsprechende Gerade und da δU die Curve C in einem Punkte U berührt, dessen entsprechender unendlich ferne liegt, so erscheint unsere Behauptung gerechtfertigt.

Werden g und g' in eine Gerade zusammen fallend angenommen, so erhält man durch die eben erklärte Construction eine Curve C_1, welche gegen C **involutorisch** liegt.

Soll eine Curve C_1 construirt werden (Fig. 74), welche mit einer gegebenen Curve C **affin** ist und gegen letztere perspectivisch liegt, so kann man wie folgt verfahren. Gegeben seien die Collineationsaxe c, die Richtung s der Collineationsstrahlen und der Modulus m, also das Verhältniss der Abstände irgend zweier entsprechender Punkte der beiden Curven von der Collineationsaxe.

(Fig 74.)



Der dem Punkte A entsprechende A_1 wird erhalten, indem man durch A eine Parallele zu s, also einen Collineationsstrahl zieht und die Strecke AP des letzteren zwischen A und c in jenem Verhältnisse theilt, welches der Modulus angibt, so dass

$$\frac{AP}{A_1P} = m$$

wird. Den entsprechenden Punkt B irgend eines anderen Curvenpunktes B findet man einfach auf folgende Art. Man verbindet A und A_1 mit demselben beliebigen Punkte α der Collineationsaxe, zieht durch B eine Parallele zu $A\alpha$, welche c in β schneidet, und aus β eine Parallele zu $A_1\alpha$. Der durch B gehende Collineationstrahl schneidet dann letztere Parallele im gesuchten Punkte B_1. Denn der Geraden $A\alpha$ entspricht $A_1\alpha$ und nachdem in affinen ebenen Systemen parallele Gerade des einen Systemes parallelen Geraden des anderen entsprechen, so müssen $A_1\alpha$ und $B_1\beta$ zu einander parallel sein. Um die Tangente in B_1 zu erhalten, hat man nur in B an die gegebene Curve eine Tangente zu ziehen und den Punkt γ, in welchem sie die Collineationsaxe schneidet, mit B_1 zu verbinden. — Der zur Collineationsaxe parallelen Tangente t von C entspricht eine ebenfalls zu dieser Axe parallele Tangente t_1 und jede Tangente von C, welche parallel zu s ist, muss auch C_1 berühren. Der Berührungspunkt E_1 einer solchen gemeinsamen Tangente, welche C in E berührt, wurde in unserer Figur mit Benützung zweier entsprechender Geraden bestimmt, wovon die eine, nämlich $E\varepsilon$, senkrecht auf der Collineationsaxe steht. Fällt man von A eine Senkrechte auf c und verbindet ihren Fusspunkt δ mit A_1, so ergeben sich zwei entsprechende Gerade $A\delta$ und $A_1\delta$; wird also durch den Fusspunkt

einer von E auf c gefällten Senkrechten eine Parallele zu $A_1\delta$ gezogen, so erhält man im Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Collineationsstrahle von E den gewünschten Punkt E_1.

Dass allen parallelen Tangenten von C parallele Tangenten von C_1 entsprechen, folgt aus dem Satze 20 dieses Abschnittes.

Wäre der Modulus negativ angenommen worden, so müssten je zwei entsprechende Punkte zu verschiedenen Seiten der Collineationsaxe liegen. Wählt man den Modulus — 1, so liegen C und C_1 involutorisch. Die Construction der Curve C_1 kann für diesen Fall ebenso wie für beliebige Werthe des Modulus durchgeführt werden.

Ist C ein Kreis, so wird C_1 eine Ellipse. Die eben erklärte Construction von C_1 wird für diesen speciellen Fall häufig angewendet, besonders wenn die Collineationsstrahlen senkrecht auf der Collineationsaxe stehen. Als diese Axe nimmt man gewöhnlich einen Durchmesser des Kreises an. Mehrere bekannte Constructionen der Ellipse und die Lösung verschiedener die Ellipse betreffender Aufgaben finden ihre Rechtfertigung in den Beziehungen, welche zwei perspectivisch liegende affine Curven im allgemeinen zu einander haben. — Auf dieses Gebiet näher einzugehen, würde uns hier zu weit führen. *)

Wir gehen nun zur Betrachtung der collinearen Verwandtschaft der Kegelschnittslinien über.

Zunächst untersuchen wir die Frage, ob irgend zwei beliebige Kegelschnitte collinear verwandt sind. Die beiden Kegelschnitte nennen wir K, K_1, drei beliebige Punkte in K und K_1 seien beziehungsweise ABC und $A_1B_1C_1$, ferner bezeichnen wir die Tangenten in den Punkten A, B, A_1, B_1 durch a, b, a_1, b_1 und heissen endlich die Schnittpunkte der Tangenten a, b, so wie der Tangenten a_1, b_1 beziehungsweise D und D_1. Mann kann nun $ABCD$ als Punkte eines ebenen Systemes Σ betrachten, welche den Punkten $A_1B_1C_1D_1$ eines zweiten mit Σ collinear verwandten Systemes Σ_1 entsprechen. (Satz 8, 3. Abschnitt). Dem Kegelschnitte K in Σ muss ein Kegelschnitt K_2 in Σ_1 entsprechen (Satz 33, 3. Abschnitt), welcher a_1 in A_1 und b_1 in B_1 berührt und durch C_1 geht. Nachdem aber ein Kegelschnitt durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und einen dritten Punkt unzweideutig bestimmt wird, so müssen K_1 und K_2 identisch sein, woraus folgt:

34. Zwei beliebige Kegelschnitte können immer als collineare Curven betrachtet werden. In jedem derselben kann mann drei Punkte beliebig wählen und einander als entsprechend zuweisen; daher lassen sich irgend zwei

---

*) Vom Standpunkte der darstellenden Geometrie erscheint die Curve C_1 in Fig. 73 als perspectivische, in Fig. 74 als schiefe Projection der Curve C. Die Gerade g der ersteren Figur kann als „Horizont" die Collineationsaxe c als „Grundlinie" und O als „Distanzpunkt" betrachtet werden.



Kegelschnitte auf unendlich viele Arten collinear auf einander beziehen.

Dass man zwei beliebige Kegelschnitte nicht immer als affine Curven betrachten kann, lässt sich schon aus dem Umstande schliessen, dass zwei affine Curven eine gleiche Anzahl unendlich ferner Punkte haben müssen, nachdem in zwei affinen Systemen jedem unendlich fernen Punkte des einen ein unendlich ferner Punkt des anderen entspricht. Somit können nur zwei Ellipsen, zwei Hyperbeln, oder zwei Parabeln affin sein, nicht aber eine Ellipse und eine Hyperbel u. s. w.

Es frägt sich nun, ob irgend zwei beliebige Kegelschnitte derselben Gattung als affine Curven betrachtet werden können. Um diese Frage zu beantworten, weisen wir vor allem den folgenden Satz nach:

35. Die Mittelpunkte affiner Kegelschnitte sind entsprechende Punkte der ebenen Systeme, welchen die beiden Curven angehören, und je zwei conjugirten Durchmessern der einen Curve entsprechen conjugirte Durchmesser der anderen.

Jedem Paare von parallelen Tangenten des einen von zwei affinen Kegelschnitten K und K_1 entspricht nämlich ein Paar paralleler Tangenten des andern (Satz 20, 3. Abschnitt) und da die Verbindungslinie der Berührungspunkte von je zwei parallelen Tangenten durch den Mittelpunkt der betreffenden Curve geht, so erscheint obiger Satz gerechtfertigt. — Auch der nachstehende Satz ist leicht zu begründen:

36. Wenn in zwei collinear auf einander bezogenen Kegelschnitten derselben Gattung die Mittelpunkte sich entsprechen, so sind die beiden Curven affin.

Denn irgend einem Durchmesser AB der einen Curve K entspricht ein Durchmesser A_1B_1 der anderen Curve K_1 und da auch die Punkte AA_1 und BB_1, so wie die Mittelpunkte sich entsprechen, so bilden AB und A_1B_1 Träger ähnlicher Punktreihen, woraus folgt, dass die unendlich fernen Punkte der genannten Durchmesser sich entsprechen. Dasselbe gilt nun auch für irgend ein anderes Paar entsprechender Durchmesser, demnach erscheint der obige Satz gerechtfertigt.

37. Zwei beliebige Ellipsen können affin auf einander bezogen werden, indem man irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der einen Curve einem beliebigen Paare conjugirter Durchmesser der anderen Curve als entsprechend zuweist.

Heissen die beiden Ellipsen K und K_1, sind a, b die gewählten conjugirten Durchmesser von K und a_1, b_1 die ihnen als entsprechend zugewiesenen Durchmesser von K_1, so entspricht dem Schnittpunkte von a, b der Schnittpunkt von a_1, b_1, also dem Mittelpunkte von K der Mittelpunkt jener Ellipse K_2, welche durch die conjugirten Durchmesser a_1, b_1 bestimmt wird. Hieraus folgt,

dass K und K_2 affin sind. Nachdem nun K_1 und K_2 identisch sein müssen, weil zwei conjugirte Durchmesser (a_1, b_1) einen Kegelschnitt unzweideutig bestimmen, so sind K und K_1 affin auf einander bezogen.

38. **Zwei beliebige Hyperbeln können affin auf einander bezogen werden, indem man irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der einen Curve einem beliebigen Paare conjugirter Durchmesser der anderen derart als entsprechend zuweist, dass die zwei eigentlichen und die zwei uneigentlichen Durchmesser sich entsprechen.**

Dieser Satz kann in derselben Weise begründet werden, wie der vorhergehende.

Dass die Asymptoten affiner Hyperbeln sich entsprechen müssen, folgt aus dem Umstande, dass sowohl die Mittelpunkte, als auch die unendlich fernen Punkte solcher Curven sich entsprechen. — Wie leicht einzusehen, entsprechen sich die Asymptoten zweier Hyperbeln, sobald man irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der einen Curve einem Paare conjugirter Durchmesser der anderen als entsprechend zuweist. Die Asymptoten ergeben sich ja als Diagonalen eines Parallelogrammes, dessen gegenüberliegende Seiten durch die Endpunkte der conjugirten Durchmesser halbirt werden.

39. **Zwei beliebige Parabeln können affin auf einander bezogen werden, indem man irgend einer Sehne und dem ihr conjugirten Durchmesser der einen Curve eine beliebige Sehne und den ihr conjugirten Durchmesser der anderen Curve als entsprechend zuweist.**

Um diesen Satz zu rechtfertigen nennen wir die beiden Parabeln K, K_1, die in K gewählte Sehne AB, die ihr als entsprechend zugewiesene A_1B_1 und die Endpunkte der diesen Sehnen conjugirten Durchmesser d, d_1 beziehungsweise C und C_1. Die Parabel K ist jener Parabel K_2 affin, für welche d_1 ein Durchmesser mit dem Endpunkte C_1 und A_1B_1 eine diesem Durchmesser conjugirte Sehne ist. Nun müssen aber K_1 und K_2 identisch sein, nachdem es nur eine Parabel gibt, welche durch $A_1B_1C_1$ geht, und d_1 als Durchmesser hat, folglich sind K und K_1 unter den gemachten Voraussetzungen affin. — dass es nur eine Parabel gibt, welche die Punkte $A_1B_1C_1$ enthällt und d_1 zum Durchmesser hat, ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass die Tangente in C_1, nachdem sie parallel zu A_1B_1 sein muss, so wie der in d_1 gelegene unendlich ferne Punkt der Parabel gegeben erscheinen. Durch eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt und andere drei Punkte des Umfanges wird ja ein Kegelschnitt unzweideutig bestimmt.

Aus den drei zuletzt aufgestellten Sätzen geht nun hervor, **dass zwei Kegelschnitte derselben Gattung sich auf unendlich viele Arten affin auf einander beziehen lassen.**

Sind Σ und Σ_1 zwei collineare ebene Systeme und K, K_1 zwei entsprechende Kegelschnitte derselben, so entsprechen je zwei Punkten oder Geraden, welche einander in Bezug auf K conjugirt sind, zwei in Bezug auf K_1 conjugirte Punkte oder Gerade in Σ_1. Denn ist P irgend ein Punkt in Σ und heisst seine Polare p, so theilen P und p jede durch P gehende Sehne AB des Kegelschnittes harmonisch (Satz 29, 2. Abschnitt). Ebenso wird die der Sehne AB entsprechende durch den Punkt P_1, welcher dem Punkte P entspricht, und die Polare p_1 von P_1 harmonisch getheilt. Da nun in collinearen ebenen Systemen je zwei entsprechende Punktreihen projectivisch sind, so muss jeder harmonischen Reihe des einen Systemes eine harmonische Reihe des anderen entsprechen, woraus folgt, dass p und p_1, entsprechende Gerade sind. Jedem Punkte in p, also jedem, welcher P conjugirt ist, entspricht daher ein Punkt in p_1, also ein dem Punkte P_1 conjugirter. — Dass auch je zwei conjugirte Gerade in Bezug auf K zwei Geraden entsprechen, welche in Bezug auf K_1 conjugirt sind, ist nun leicht einzusehen, nachdem jeder Geraden in Σ, welche durch P geht, also der Geraden p conjugirt ist, eine durch P_1 gehende Gerade in Σ_1 entsprechen muss. Wir können somit den Satz aufstellen:

40. Sind K und K_1 zwei sich entsprechende Kegelschnitte collinearer ebener Systeme, so entsprechen je zwei Punkten oder Geraden, welche in Bezug auf K conjugirt sind, zwei in Bezug auf K_1 conjugirte Punkte oder Gerade.

Liegen die beiden collinearen Systeme in derselben Ebene perspectivisch und heissen A, B irgend zwei Punkte der Collineationsaxe, welche einander in Bezug auf K conjugirt sind, so müssen A und B auch in Bezug auf K_1 conjugirte Punkte sein, weil jeder Punkt der genannten Axe sich selbst entspricht. Ebenso sind je zwei in Bezug auf K conjugirte Collineationsstrahlen einander auch in Bezug auf K_1 conjugirt. Es gilt somit der Satz:

41. Die Collineationsaxe zweier Systeme, welche in derselben Ebene perspectivisch liegen, ist eine gemeinschaftliche Secante und das Collineationscentrum ein Contingenzpunkt für je zwei entsprechende Kegelschnitte dieser Systeme.

Zwei entsprechende Kegelschnitte involutorischer ebener Systeme können auch coincidiren. Dass eine solche Coincidenz in perspectivisch liegenden ebenen Systemen nur dann eintreten kann, wenn die Systeme involutorisch sind, lehrt eine einfache Betrachtung. Heissen die beiden in derselben Ebene perspectivisch liegenden Systeme Σ und Σ_1, ihr Collineationscentrum O, und die Collineationsaxe c, so muss, wenn jedem Punkte A des in Σ gelegenen Kegelschnittes K stets nur ein in K befindlicher Punkt A_1 entsprechen soll, auch dem Punkt A_1 in Σ der Punkt A in Σ_1 entsprechen, woraus folgt, dass der Modulus von Σ und Σ_1 unter der gemachten Voraussetzung gleich -1 ist, dass die beiden Systeme also involutorisch liegen.

Nachdem für diesen Fall je zwei entsprechende Punkte durch das Collineationscentrum und die Collineationsaxe harmonisch getrennt werden, so bildet O den Pol von c in Bezug auf K. — Wir können demnach behaupten:

42. Wenn in zwei collinearen Systemen Σ und Σ_1, welche in derselben Ebene perspectivisch liegen, ein Kegelschnitt K sich selbst entspricht, so liegen Σ und Σ_1 involutorisch und das Involutionscentrum ist der Pol der Involutionsaxe in Bezug auf K.

Umgekehrt kann man Pol und Polare irgend eines Kegelschnittes immer als Involutionscentrum und Involutionsaxe eines involutorischen ebenen Systemes betrachten, in welchem der Kegelschnitt sich selbst entspricht. Dieser Umstand kann benützt werden, wenn man untersuchen will, ob irgend ein gegebenes Segment eines Kegelschnittes elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist.

Man zieht in zwei beliebigen (möglichst weit von einander entfernten) Punkten A, B des Segmentes die Tangenten und ermittelt jene zu AB parallele Gerade g, welche den Abstand des Schnittpunktes O der beiden Tangenten von der Geraden AB halbirt. Betrachtet man nun AB als Involutionsaxe und O als Involutionscentrum eines ebenen Systemes, in welchem das gegebene Segment einen Theil eines sich selbst entsprechenden Kegelschnittes K bildet, so muss g die Gegenaxe sein und je nachdem g das Segment schneidet, berührt, oder nicht schneidet, ist K eine Hyperbel, Parabel, oder Ellipse.

Der folgende Satz bedarf nun keiner weiteren Begründung mehr:

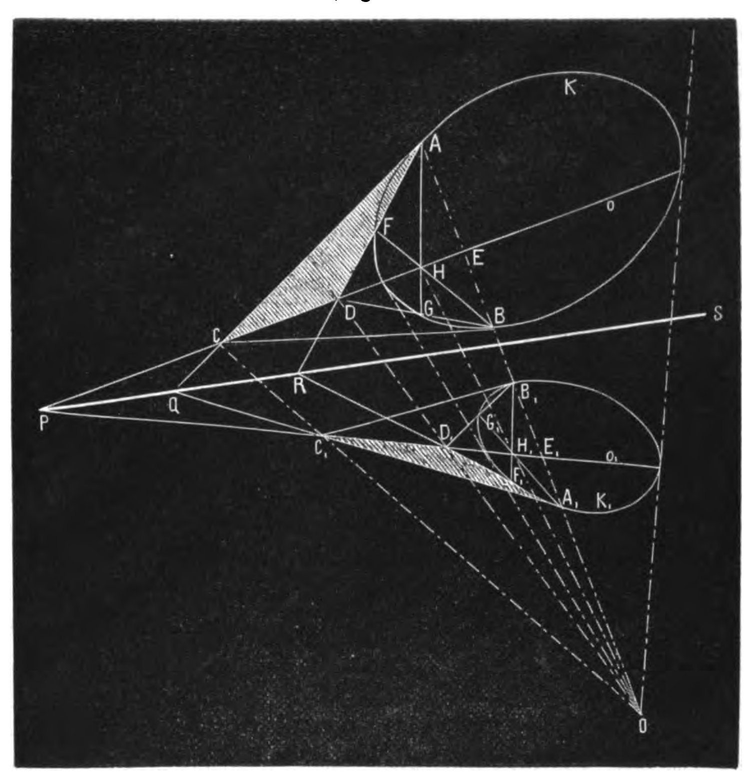
43. Jeder Kegelschnitt kann als eine sich selbst entsprechende Curve eines involutorischen ebenen Systemes betrachtet werden, dessen Involutionscentrum und Involutionsaxe irgend ein Punkt und seine Polare bilden. Der Kegelschnitt wird dann ein involutorischer genannt.

Nachdem die Collineationsaxe und das Collineationscentrum zweier Systeme, welche in derselben Ebene perspectivisch liegen für je zwei entsprechende Kegelschnitte dieser Systeme beziehungsweise eine gemeinschaftliche Secante und einen Contingenzpunkt bilden, so drängt sich die Frage auf, ob nicht irgend zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte als entsprechende Curven perspectivisch liegender ebener Systeme betrachtet werden können, wenn man eine ihrer gemeinschaftlichen Secanten als Collineationsaxe und einen ihrer Contingenzpunkte als Collineationscentrum annimmt.

K und K_1 (Fig. 75) seien zwei beliebige in derselben Ebene gelegene Kegelschnitte, s eine gemeinschaftliche Secante und O ein Contingenzpunkt derselben. Bezüglich der Secante s nehmen wir an, dass alle ihre Punkte, welche innerhalb oder ausserhalb K gelegen sind, beziehungsweise auch innerhalb oder ausserhalb K_1 liegen. Die Secante s hat demnach die Eigen-

schaft, dass wenn sich von irgend einem Punkte M derselben reelle Tangenten an K ziehen lassen, auch von M ausgehende reelle Tangenten an K_1 möglich sind. Von einer derartigen Secante sagt man, dass sie eine gleichartige Lage habe, während gemeinschaftliche Secanten, bei welchen die ausserhalb, oder innerhalb des einen Kegelschnittes gelegenen Strecken beziehungsweise innerhalb, oder ausserhalb der anderen Curve liegen, ungleichartig

(Fig. 75.)



liegende gemeinschaftliche Secanten heissen. Secanten der letzteren Art kommen in dem Falle vor, wenn beide Aeste einer Hyperbel von einer Ellipse geschnitten werden.

Der auf s befindliche gemeinschaftliche Pol sei P und der Contingenzpunkt O liege auf der Polaren von P (Satz 82, 2. Abschnitt). Dieser Voraussetzung gemäss hat O eine derartige Lage, dass jede durch O gehende Gerade, welche K in reellen Punkten schneidet, auch K_1 in reellen Punkten trifft.

Liegt nämlich P ausserhalb K und K_1, so schneidet seine Polare beide Kegelschnitte und liegt P innerhalb K und K_1, so befindet sich seine Polare ganz ausserhalb beider Curven. Nun kann ein Contingenzpunkt — als Durch-

schnitt zweier reeller oder imaginärer gemeinschaftlicher Tangenten — nur entweder ausserhalb oder innerhalb beider Curven gelegen sein. In dem Falle, wenn der Contingenzpunkt innerhalb liegt, schneidet jede durch ihn gehende Gerade beide Curven, in dem Falle, wenn er ausserhalb liegt, können sich beide Curven entweder in demselben Winkel α der gemeinschaftlichen Tangenten befinden, dann nennt man den Contingenzpunkt gleichartig liegend, oder eine Curve befindet sich im Winkel α und die andere im Nebenwinkel von α, dann wird der Contingenzpunkt ungleichartig liegend genannt. Wie leicht einzusehen, hat ein gleichartig liegender Contingenzpunkt die Eigenschaft, dass jede durch ihn gehende Gerade, welche die eine Curve schneidet, auch die andere Curve trifft, was bei ungleichartig liegenden Contingenzpunkten nicht der Fall ist. Wenn nun durch O, unseren Voraussetzungen gemäss, eine gemeinschaftliche Polare geht, welche entweder ganz ausserhalb K und K_1 liegt, oder beide Curven schneidet, so muss O ein gleichartig liegender Contingenzpunkt sein und jede durch O gehende Gerade, welche K schneidet, muss auch K_1 treffen.

Die Polaren des Punktes O in Bezug auf K und K_1, welche wir beziehungsweise o und o_1 nennen wollen, schneiden sich in P, nachdem O unserer Annahme zufolge auf der Polaren von P liegt. Zieht man aus O irgend eine Gerade, welche K in den Punkten A, B und K_1 in $A_1 B_1$ schneidet, und construirt in diesen vier Punkten die Tangenten, so liegt der Schnittpunkt C der in A und B berührenden Tangenten auf o und der Schnittpunkt C_1 der Tangenten in A_1 und B_1 auf o_1 (Satz 30, 2. Abschnitt). Die Gerade OC ist der Geraden OA in Bezug auf K und die Gerade OC_1 derselben Geraden OA in Bezug auf K_1 conjugirt. Nachdem nun sowohl OC, als auch OC_1 von OA durch die in O sich schneidenden gemeinschaftlichen Tangenten harmonisch getrennt wird, so fallen OC und OC_1 zusammen, d. h. OC geht durch den Punkt C_1.

Wir ziehen nun eine zweite beliebige Gerade durch O, welche o in D und o_1 in D_1 schneidet, und verbinden D mit A, sowie auch D_1 mit A_1. Die Dreiecke ACD und $A_1 C_1 D_1$ haben eine solche gegenseitige Lage, dass die drei Verbindungslinien der Eckpunkte AA_1 dann CC_1 und DD_1 im Punkte O zusammentreffen, daher liegen die Schnittpunkte P, Q, R der Dreieckseiten CD, $C_1 D_1$, dann AC, $A_1 C_1$ und AD, $A_1 D_1$ auf ein und derselben Geraden. (Satz 14, 3. Abschnitt). Wir können also die genannten zwei Dreiecke als entsprechende Figuren zweier perspectivisch liegender ebener Systeme Σ und Σ_1 ansehen, deren Collineationscentrum der Contingenzpunkt O ist, und welche zur Collineationsaxe die Gerade PQ haben. Die Systeme Σ und Σ_1 sind vollkommen bestimmt, nachdem die vier Punkte $ACDO$ in Σ den Punkten $A_1 C_1 D_1 O$ in Σ_1 als entsprechend zugewiesen erscheinen. In diesem Systeme müssen B und B_1 entsprechende Punkte sein. Denn heissen E und E_1 die Schnittpunkte von OA mit o und o_1, so bilden $A_1 E_1 B_1 O$ eine harmonische Reihe, welcher eine ebenfalls harmonische Reihe entsprechen muss, und da von

der letzteren die Punkte A_1, E_1, O den Punkten A, E, O zugewiesen sind, so entsprechen sich B und B_1. Nennt man die Schnittpunkte der Geraden AD und BD mit dem Kegelschnitte K beziehungsweise F und G und verbindet A mit G, so wie auch B mit F, so müssen sich AG und BF in einem Punkte H der Polaren o schneiden, denn H ist zufolge der angegebenen Construction der Pol der Geraden OD (Satz 30, 2. Abschnitt). Ebenso liegt der Punkt H_1, welcher in analoger Weise wie der Punkt H erhalten wird — indem man A_1D_1 und B_1D_1 zieht und die in K_1 gelegenen Punkte F_1, G_1 dieser Geraden beziehungsweise mit B_1 und A_1 verbindet — auf der Geraden o_1. Nachdem nun OH und OD einander in Bezug auf K conjugirt sind, so müssen sie es auch in Bezug auf K_1 sein, woraus folgt, dass OH und OH_1 zusammenfallen, d. h. die Gerade OH geht durch den Punkt H_1. Aus dem Umstande, dass H und H_1 auf entsprechenden Geraden o, o_1 der Systeme Σ, Σ_1 und auf demselben Collineationsstrahle liegen, lässt sich schliessen, dass H und H_1 entsprechende Punkte sind. Auch ist leicht einzusehen, dass F und F_1 sich entsprechen, nachdem F der Schnittpunkt von AD, BH und F_1 der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden A_1D_1, B_1H_1 ist.

Betrachtet man nun den Kegelschnitt K als eine Curve des Systemes Σ, so muss jene Curve, welche K im Systeme Σ_1 entspricht, ein Kegelschnitt sein, der die Geraden A_1C_1 und B_1C_1 beziehungsweise in A_1 und B_1 berührt und durch den Punkt F_1 geht.

Dieser Kegelschnitt ist aber kein anderer, als jener, welchen wir K_1 genannt haben. Die beiden Kegelschnitte K und K_1 bilden also entsprechende Curven der Systeme Σ und Σ_1.

Die Collineationsaxe PQ von Σ und Σ_1 ist eine gemeinschaftliche Secante von K und K_1 (Satz 41, 3. Abschnitt), welche durch den auf der gemeinschaftlichen Secante s gelegenen Pol P geht. Da nun durch einen gemeinschaftlichen Pol nur zwei gemeinschaftliche Secanten gehen können, so muss die Collineationsaxe PQ entweder mit s, oder mit der zweiten durch P gehenden gemeinschaftlichen Secante s_1 coincidiren. Je nachdem man A und A_1, so wie B und B_1, oder A und B_1, so wie B und A_1 als entsprechende Punkte ansieht, ergibt sich s oder s_1 als Collineationsaxe. Unsere Figur stellt den ersteren Fall dar. Hätten wir die zuletzt genannten Punktpaare als entsprechend betrachtet, so würde sich die zweite gemeinschaftliche Secante ergeben haben. Die in Rede stehenden zwei Fälle unterscheiden sich wesentlich dadurch, dass in dem einen Σ und Σ_1 entgegengesetzt, im anderen einstimmig perspectivisch liegen.

Als Endergebniss dieser Untersuchung können wir nun den folgenden Satz aufstellen:

44. Zwei in derselben Ebene befindliche Kegelschnitte können immer als entsprechende Curven perspectivisch liegender ebener Systeme angesehen werden. Als Colline-

ationsaxe kann man irgend eine gleichartig liegende gemeinschaftliche Secante s und als Collineationscentrum jeden der zwei Contingenzpunkte betrachten, welche auf der Polaren des in s befindlichen gemeinschaftlichen Poles liegen.

Mit Benützung dieses Satzes lassen sich zwei gemeinschaftliche Secanten zweier Kegelschnitte K, K_1 leicht ermitteln, wenn ein Contingenzpunkt O gleichartiger Lage bekannt ist. Man zieht durch O eine beliebige Gerade, welche K in AB und K_1 in A_1B_1 schneidet, und construirt in den zuletzt genannten vier Punkten die Tangenten, so ist der Schnittpunkt der Tangenten in A und A_1 so wie auch der Schnittpunkt der Tangenten in B und B_1 ein Punkt einer gemeinschaftlichen Secante s. Der Durchschnitt der in A und B_1, so wie der in B und A_1 gezogenen Tangenten gehört der zweiten gemeinschaftlichen Secante s_1 an.

Wie zwei Contingenzpunkte bestimmt werden können, wenn eine gemeinschaftliche Secante gegeben ist, bedarf wohl keiner besonderen Erklärung.

e) Reciprocität der Grundgebilde zweiter Stufe.

Wenn zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 derart auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte P in Σ eine Gerade p_1 in Σ_1 und jeder durch P gehenden Geraden in Σ ein in p_1 gelegener Punkt in Σ_1 entspricht, so sagt man, dass die beiden Systeme reciprok verwandt, oder reciprok sind. Zwei Strahlenbündel s und s_1 nennt man reciprok, wenn jedem Strahle p in s eine Ebene π_1 in s_1 und jeder durch p gehenden Ebene in s ein in π_1 gelegener Strahl von s_1 entspricht. Endlich werden ein ebenes System Σ und ein Strahlenbündel s reciprok genannt, wenn jedem Punkte P von Σ eine Ebene π von s und jeder durch P gehenden Geraden von Σ ein in π gelegener Strahl von s entspricht. Allgemein kann man daher sagen:

Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe sind reciprok, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P und q des einen Gebildes, von welchen P in q liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des anderen entsprechen, von denen P_1 durch q_1 geht. *)

Aus dieser Erklärung folgt, dass der Verbindungslinie irgend zweier Punkte A, B eines ebenen Systemes Σ jener Punkt eines mit Σ reciprok verwandten ebenen Systemes entsprechen muss, in welchem sich die den Punkten A, B entsprechenden Geraden schneiden. Bezeichnet man nämlich diese Geraden durch a_1, b_1 und jenen Punkt, welcher der Geraden AB entspricht, durch P_1, so muss P_1 sowohl auf a_1, als auch auf b_1 liegen; er

*) Staudt's „Geometrie der Lage", Seite 60.



kann demnach nur der Schnittpunkt von a_1 und b_1 sein. Umgekehrt entspricht in zwei reciproken ebenen Systemen dem Schnittpunkte zweier Geraden des einen Systemes die Verbindungslinie jener Punkte des anderen, welche den zwei Geraden entsprechen. In zwei reciproken Strahlenbündeln finden analoge Beziehungen statt. Es entspricht nämlich jeder durch irgend zwei Strahlen des einen Bündels bestimmten Ebene jener Strahl des anderen Bündels, in welchem sich die den zwei Strahlen entsprechenden Ebenen schneiden.

Bezüglich eines ebenen Systemes Σ und eines mit demselben reciprok verwandten Strahlenbündels s findet die Beziehung statt, dass der Verbindungslinie irgend zweier Punkte A und B in Σ die Durchschnittslinie jener Ebenen in s entspricht, welche den Punkten A und B entsprechen, und dem Schnittpunkte irgend zweier Geraden a und b in Σ entspricht in s jene Ebene, welche durch die den Geraden a und b entsprechenden Strahlen bestimmt wird. — Alle diese Behauptungen finden ihre Rechtfertigung in obiger Definition der reciproken Verwandtschaft.

Aus dieser Definition und der für die collineare Verwandtschaft gegebenen kann man schliessen:

45. Wenn zwei Grundgebilde der zweiten Stufe einem dritten reciprok sind, so müssen sie collinear sein und wenn von zwei collinearen Grundgebilden der zweiten Stufe das eine mit einem dritten solchen Grundgebilde reciprok ist, so ist es auch das andere.

Sind zwei ebene Systeme reciprok, so entspricht der unendlich fernen Geraden des einen Systemes ein bestimmter Punkt des anderen Systemes, welcher der Mittelpunkt des letzteren genannt wird. Jede Gerade eines ebenen Systemes, welche durch den Mittelpunkt geht, heisst ein Durchmesser. Aus den vorausgehenden Erklärungen lässt sich nun leicht der Satz folgern:

46. In zwei reciproken ebenen Systemen entsprechen parallelen Geraden des einen Systemes Punkte des anderen, welche auf ein und demselben Durchmesser liegen.

Die Richtung des letzteren und jene der parallelen Geraden werden conjugirte Richtungen genannt. Auch nennt man einen Durchmesser und die Richtung der seinen Punkten entsprechenden parallelen Geraden conjugirt. Zwei Durchmesser deren Richtungen conjugirt sind, heissen conjugirte Durchmesser.

Liegt der Mittelpunkt des einen von zwei reciproken ebenen Systemen in unendlicher Entfernung, so liegt auch jener des anderen Systemes unendlich ferne. Denn heissen m und m_1 die unendlichen fernen Geraden der zwei Systeme, M, M_1 ihre Mittelpunkte, von denen wir annehmen wollen, dass M auf m gelegen sei, so muss M_1 auf m_1 liegen, also unendlich weit entfernt sein. Sind demnach in zwei reciproken ebenen Systemen die Durchmesser des einen Systemes unter einander parallel, so sind es auch die Durchmesser des anderen.

Je zwei einförmige Grundgebilde G und g_1, welche sich in zwei verschiedenen reciproken Grundgebilden der zweiten Stufe befinden, nennt man entsprechende Gebilde, wenn G aus Elementen besteht, die den Elementen von g_1 in den beiden reciproken Grundgebilden entsprechen. Sind z. B. Σ und Σ_1 reciproke ebene Systeme und bezeichnet R irgend eine Punktreihe in Σ, deren Elemente dem in Σ_1 befindlichen Strahlenbüschel S_1 in Bezug auf Σ und Σ_1 entsprechen, so sagt man, dass R und S_1 entsprechende, Gebilde der beiden Systeme sind.

Aus der Definition der reciproken Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe und dem Satze 73, 1. Abschnitt, ergibt sich unmittelbar der nachstehende Satz:

47. Je zwei einförmige Grundgebilde, welche einander in reciproken Grundgebilden der zweiten Stufe entsprechen, sind projectivisch.

Sind Σ und Σ_1 zwei reciproke ebene Systeme und S ein Strahlenbüschel, dessen Elemente Durchmesser des Systemes Σ bilden, so schneidet die unendlich ferne Gerade von Σ diesen Büschel in einer Punktreihe R, welcher in Σ_1 ein Strahlenbüschel S_1 entspricht, dessen Elemente ebenfalls Durchmesser sind. Nach obigem Satze müssen nun R und S_1 projectivisch sein und da S gegen R perspectivisch liegt, so sind auch S und S_1 projectivisch. Entsprechende Elemente dieser Büschel sind je zwei conjugirte Durchmesser, nachdem jedem Strahle a in S jener Strahl in S_1 entspricht, der dem unendlich fernen Punkte von a in Bezug auf Σ und Σ_1 zugewiesen ist. Wir können also den Satz aufstellen:

48. Je zwei conjugirte Durchmesser reciproker ebener Systeme bilden entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte sich in den Mittelpunkten der beiden Systeme befinden.

In jedem dieser Strahlenbüschel gibt es ein Paar, oder unendlich viele Paare von auf einander senkrecht stehenden Strahlen, deren entsprechende im anderen Büschel ebenfalls auf einander stehen. Jeden solchen Strahl nennt man eine Axe des betreffenden Systemes. Die Axen eines jeden von zwei reciproken ebenen Systemen sind also zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, denen zwei, gleichfalls einen rechten Winkel bildende Durchmesser des anderen Systemes conjugirt sind. In zwei reciproken ebenen Systemen kommen entweder nur zwei, oder unendlich viele Paare von Axen vor.

Mit Hilfe des Satzes 47 kann der folgende in einfacher Weise begründet werden.

49. Will man zwei Grundgebilde der zweiten Stufe reciprok auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben vier gleichartige Elemente, von denen keine drei demselben einförmigen Grundgebilde angehören, beliebig

wählen und einander als entsprechend zuweisen; jedem fünften Elemente des einen Grundgebildes entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des anderen. Dabei wird vorausgesetzt, dass nur solche Elemente als entsprechend betrachtet werden, welche in reciproken Gebilden überhaupt einander entsprechen können, nähmlich in zwei ebenen Systemen Punkt und Gerade, in zwei Strahlenbündeln Strahl und Ebene, endlich in einem ebenen Systeme und einem Strahlenbündel Punkt und Ebene, oder Gerade und Strahl.

Der Beweis dieses Satzes für zwei ebene Systeme lässt sich auf folgende Art geben: Σ und Σ_1 seien die zwei reciproken ebenen Systeme, $ABCD$ vier beliebig gewählte Punkte in Σ und $a_1 b_1 c_1 d_1$ die vier diesen Punkten als entsprechend zugewiesenen Geraden in Σ_1. Zu irgend einem fünften Punkte E in Σ kann die entsprechende Gerade e_1 in Σ_1 dann nicht mehr beliebig gewählt werden, wie aus nachstehender Betrachtung hervorgeht. Verbindet man A mit $BCDE$, so erhält man nach obigem Satze 47 einen Strahlenbüschel S, welcher jener Punktreihe projectivisch ist, die von den Schnittpunkten der Geraden $b_1 c_1 d_1 e_1$ mit der Geraden a_1 gebildet wird. Der Schnittpunkt von a_1 und e_1 erscheint nun durch die übrigen Durchschnittspunkte von a_1 mit $b_1 c_1 d_1$ vollkommen bestimmt (Satz 11, 1. Abschnitt); ebenso ist der Durchschnittspunkt von e_1 etwa mit b_1 vollkommen bestimmt, nachdem dieser Punkt der Verbindungslinie der Punkte B und E entsprechen muss und BE mit den Geraden BA, BC, BD, einen Strahlenbüschel bildet, welcher mit jener Punktreihe projectivisch ist, die sich als Schnitt von b_1 mit $a_1 c_1 d_1 e_1$ ergibt. Demnach ist die Gerade e_1, sobald der ihr entsprechende Punkt E angenommen wurde, durch die übrigen bereits gemachten Annahmen ebenfalls unzweideutig bestimmt und kann nicht mehr willkürlich gewählt werden. Dasselbe gilt für irgend einen andern in Σ angenommenen Punkt und die ihm entsprechende Gerade in Σ_1, woraus der obige Satz, insoferne er sich auf reciproke ebene Systeme bezieht, hervorgeht.

Mit Benützung des eben erhaltenen Resultates lassen sich alle übrigen Fälle, auf welche sich der in Rede stehende Satz noch bezieht, leicht begründen. Der Beweis für zwei reciproke Strahlenbündel kann z. B. dadurch hergestellt werden, dass man sich beide Bündel durch je eine Ebene geschnitten denkt, wodurch sich zwei reciproke ebene Systeme ergeben, und aus der Beziehung dieser Systeme auf jene der beiden Bündel schliesst.

Die Bestimmung eines Grundgebildes G der zweiten Stufe, welches einem vollständig gegebenen zweiten solchen Gebilde G_1 reciprok sein soll, wenn man in G vier gleichartige Elemente $ABCD$ kennt, die den Elementen $a_1 b_1 c_1 d_1$ in G_1 entsprechen, geschieht mit Benützung des Satzes 47 und ist der oben erklärten Bestimmung des einen von zwei collinearen Grundgebilden G, G_1 der zweiten Stufe, für den Fall als in denselben vier Paare entsprechender Elemente bekannt sind, ganz analog. Diese Bestimmung beruht nämlich ebenfalls auf der

Construction eines vierten Element das es, einem Grundgebilde der ersten Stufe angehört, wenn von letzterem drei Elemente *ABC*, dann ein mit demselben projectivisch verwandtes Grundgebilde *g* und in *g* die drei den Elementen *ABC* entsprechenden bekannt sind.

Aus dem Satze 49 folgt unmittelbar:

50. Ein aus vier gleichartigen Elementen bestehendes Grundgebilde der zweiten Stufe ist mit jedem zweiten aus vier gleichartigen Elementen bestehenden Grundgebilde der zweiten Stufe reciprok verwandt, wenn diese Elemente solche sind, die sich überhaupt in reciproken Gebilden entsprechen können.

So z. B. ist jedes ebene Viereck mit jedem ebenen Vierseit und jedes Vierkant mit jedem Vierseit im Strahlenbündel reciprok verwandt. —

Wir wollen nun untersuchen, wie viele Punkte in einer Ebene *ε*, welche zwei reciproke Systeme Σ und Σ_1 enthält, vorhanden sind, die derselben Geraden entsprechen, ob man sie als Punkte von Σ oder Σ_1 betrachtet.

Fasst man sämmtliche Gerade der Ebene *ε* als Elemente von Σ auf, so entsprechen denselben Punkte in Σ_1, deren Gesammtheit ein ebenes System bildet, welches wir Σ_2 nennen wollen; betrachtet man dieselben Geraden als Elemente von Σ_1, so bilden die ihnen entsprechenden Punkte in Σ gleichfalls ein ebenes System, welches wir durch Σ_3 bezeichnen. Σ_2 und Σ_3 sind nun mit demselben Systeme von Geraden reciprok verwandt, daher müssen sie unter einander collinear verwandt sein (Satz 45, 3. Abschnitt). Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme haben nach Satz 19, 3. Abschnitt, im allgemeinen nur einen reellen Punkt oder drei, oder alle ihre Punkte entsprechend gemein. Jedem Punkte, welchen die Systeme Σ_2 und Σ_3 entsprechend gemein haben, aber auch nur solchen Punkten, entspricht nun ein und dieselbe Gerade in Σ und Σ_1, ob man ihn als Element des einen oder des anderen dieser Systeme ansieht, man kann daher sagen:

51. In zwei reciproken Systemen, die in derselben Ebene liegen, gibt es im allgemeinen entweder nur einen reellen Punkt, welcher derselben Geraden entspricht, ob man ihn als Element des einen oder des anderen Systemes betrachtet, oder es sind drei solche Punkte vorhanden, oder allen Punkten kommt diese Eigenschaft zu.

Bezüglich zweier reciproker, concentrisch liegender Strahlenbündel gilt ein analoger Satz, wie man sich leicht überzeugt, wenn man annimmt zwei solche Bündel würden durch eine beliebige Ebene geschnitten und berücksichtigt, dass in dieser Ebene reciproke Systeme als Schnitte der beiden Bündel zu Stande kommen.

Zwei in derselben Ebene liegende reciproke Systeme, in denen einem jeden Punkte dieselbe Gerade entspricht, ob man ihn als Punkt des einen oder

des anderen Systemes betrachtet, nennt man involutorisch liegend, oder kürzer involutorisch. Beide Systeme werden dann meistens als ein einziges System aufgefasst, welches man ein ebenes Polarsystem nennt.

Zwei concentrisch liegende reciproke Strahlenbündel heissen ebenfalls involutorisch, wenn jedem Strahle dieselbe Ebene entspricht, ob man ihn als Element des einen oder des anderen Bündels betrachtet. Die beiden Bündel werden dann auch als ein einziger aufgefasst, welchen man ein Polarsystem im Strahlenbündel nennt.

Ein ebenes System Σ und ein mit demselben reciprok verwandter Strahlenbündel s liegen involutorisch, wenn jenes ebene System, welches durch den Schnitt von s mit der Ebene von Σ zu Stande kommt, gegen Σ involutorisch liegt.

52 Zwei reciproke Systeme Σ und Σ_1, welche in derselben Ebene liegen, bilden ein Polarsystem, wenn den Eckpunkten A, B, C eines Dreieckes in Σ die ihnen gegenüberliegenden Seiten a_1, b_1, c_1 dieses Dreieckes in Σ_1 entsprechen. Zwei concentrische reciproke Strahlenbündel s und s_1 bilden ein Polarsystem, wenn den Kanten a, b, c eines Dreikantes in s die ihnen gegenüberliegenden Seiten α_1, β_1, γ_1 dieses Dreikantes in s_1 entsprechen.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu rechtfertigen beweisen wir zunächst, dass jedem Eckpunkte des genannten Dreieckes die gegenüberliegende Seite entspricht, ob man ihn als Punkt von Σ oder Σ_1 betrachtet. Dem Schnittpunkte der Seiten b_1 und c_1 in Σ_1 — nämlich dem Punkte A — entspricht die Verbindungslinie der Punkte B und C in Σ; unserer Annahme zufolge entspricht aber A, als Punkt des Systemes Σ betrachtet, ebenfalls die Gerade BC, es entspricht daher diesem Punkte die ihm gegenüberliegende Dreieckseite, ob man ihn als Element von Σ oder Σ_1 ansieht. Ein gleiches gilt offenbar auch bezüglich der zwei übrigen Eckpunkte B und C.

Dass Σ und Σ_1 involutorisch liegen, also ein Polarsystem bilden, lässt sich wie folgt zeigen:

Irgend einem Punkte D (Fig. 76) in a_1, als Punkt des Systemes Σ betrachtet, entspricht eine durch A gehende Gerade d_1 in Σ_1, deren Schnittpunkt mit a_1 wir D' nennen wollen. Dem Punkte D' als Punkt von Σ_1 betrachtet, entspricht eine durch A und D gehende Gerade d'_1 in Σ, nachdem D' sowohl in a_1, als auch in d_1 gelegen ist. Fasst man D als Punkt des Systemes Σ_1 auf, so entspricht demselben, als Durchschnittspunkt von a_1 und d'_1 die Verbindungslinie der Punkte A und D', also wieder die Gerade d_1, wie in dem Falle, wenn D als Element von Σ betrachtet wird. Nachdem nun D ganz beliebig in a_1 gewählt wurde, so muss jeder Punkt in a_1 die Eigenschaft haben, dass ihm dieselbe durch A gehende Gerade entspricht, ob man ihn als Punkt von Σ oder Σ_1 betrachtet. Ebenso lässt sich zeigen, dass jedem Punkte in b_1 oder c_1 eine

beziehungsweise durch B oder C gehende Gerade doppelt entsprechen muss. Umgekehrt entspricht also einer durch A, B oder C gehenden Geraden ein und derselbe beziehungsweise in a_1, b_1 oder c_1 gelegene Punkt, man mag eine solche Gerade als Element von Σ oder Σ_1 ansehen.

(Fig. 76.)

Ist nun P irgend ein Punkt von Σ, so kann man denselben als Schnittpunkt zweier Geraden m und n auffassen, von welchen die eine durch A, die andere durch B geht. Dieser Schnittpunkt entspricht der Verbindungslinie p_1 jener zwei beziehungsweise in a_1 und b_1 gelegener Punkte M_1, N_1, welche den Geraden m und n entsprechen. Fasst man P als Punkt von Σ_1, nämlich als Schnittpunkt der in Σ_1 gelegenen Geraden m und n auf, so findet man, dass ihm gleichfalls die Gerade p_1 in Σ entsprechen muss. Da nun der Punkt P ganz beliebig gewählt wurde und demselben als Element von Σ oder Σ_1 betrachtet, dieselbe Gerade entspricht, so muss ein Gleiches für alle Punkte der Ebene beider Systeme gelten, d. h. diese Systeme liegen involutorisch. — Der zweite, auf Strahlenbündel sich beziehende Theil des obigen Satzes lässt sich mit Benützung des ersten Theiles, welcher soeben bewiesen wurde, leicht rechtfertigen. Man hat sich nur beide Bündel durch eine Ebene geschnitten zu denken, und kann dann aus den Beziehungen der zwei sich als Schnitte ergebenden Systeme auf jene der zwei Strahlenbündel schliessen.

Aus dem in Rede stehenden und dem obigen Satze 49 wird die Möglichkeit klar, dass zwei Grundgebilde der zweiten Stufe überhaupt involutorisch liegen können. Zwei in derselben Ebene befindliche Systeme lassen sich ja immer derart reciprok auf einander beziehen, dass den Eckpunkten eines Dreieckes die ihnen gegenüberliegenden Seiten desselben Dreieckes entsprechen, und ebenso kann man in zwei concentrischen reciproken Strahlenbündeln den Kanten eines Dreikantes die ihnen gegenüberliegenden Seiten immer als entsprechend zuweisen.

Jeder Punkt und die ihm entsprechende Gerade eines ebenen Polarsystemes werden P o l und P o l a r e genannt. Jeder Punkt und irgend ein zweiter auf der Polaren des ersteren gelegene Punkte heissen c o n j u g i r t e P u n k t e und jede Gerade und irgend eine zweite durch den Pol der ersteren gehende Gerade nennt man c o n j u g i r t e G e r a d e. Man kann also sagen:

Zwei conjugirte Punkte eines ebenen Polarsystemes sind solche, deren jeder auf der Polaren des anderen liegt.

Zwei conjugirte Gerade eines ebenen Polarsystemes sind solche, deren jede durch den Pol der anderen geht.

Bezüglich des Polarsystemes im Strahlenbündel geben wir folgende Erklärung:

Zwei Strahlen eines Polarsystemes im Strahlenbündel sind conjugirt, wenn jeder in der Ebene liegt, welche dem anderen entspricht.

Zwei Ebenen eines Polarsystemes im Strahlenbündel sind conjugirt, wenn jede durch den Strahl geht, welcher der anderen entspricht.

Ein in der Ebene eines Polarsystemes gelegenes Dreieck, dessen Ecken die Pole der gegenüberliegenden Seiten sind, heisst man ein Polardreieck und ein Dreikant, welches einem Polarsysteme im Strahlenbündel angehört, wird ein Polardreikant genannt, wenn jede Kante desselben der ihr gegenüberliegenden Seite entspricht.

In jedem ebenen Polarsysteme sind unendlich viele Polardreiecke vorhanden; jeder Punkt des Systemes, welcher nicht auf seiner Polaren liegt, kann ein Eckpunkt eines solchen Dreieckes sein.

Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich aus Folgendem: Um ein Polardreieck zu erhalten kann man irgend einen Punkt A der Ebene, in welcher die beiden reciproken Systeme Σ und Σ_1 involutorisch liegen, als Eckpunkt des Dreieckes beliebig wählen. Die Polare a_1 von A betrachtet man als eine Seite und irgend einen Punkt B von a_1 als zweiten Eckpunkt. Die Polare b_1 von B muss dann durch A gehen und bestimmt in ihrem Schnittpunkte C mit a_1 den dritten Eckpunkt des Polardreieckes. Damit ist obige Behauptung gerechtfertigt. — Ein analoger Satz gilt bezüglich des Polarsystemes im Strahlenbündel.

Nachdem es in den meisten Fällen sehr leicht ist aus den Beziehungen zweier reciproker ebener Systeme auf die Beziehungen zu schliessen, welche zwischen zwei reciproken Strahlenbündeln bestehen, so wollen wir uns in der Regel damit begnügen, nur reciproke ebene Systeme in Betracht zu ziehen.

53. Ein ebenes Polarsystem ist vollkommen bestimmt, sobald man in demselben ein Polardreieck und irgend einen Pol und seine Polare gewählt hat; doch darf dieser Pol auf keiner Seite des gewählten Dreieckes liegen, also seine Polare durch keinen Eckpunkt des Dreieckes gehen.

Der Beweis hiefür ergibt sich unmittelbar aus obigen Sätzen 49 und 52.

Aus dem Satze 53 lässt sich schliessen:

54. Zwei reciproke ebene Systeme können immer dadurch zu einem Polarsysteme vereinigt werden, dass man ihre Mittelpunkte und je zwei einander nicht conjugirte Axen zur Coincidenz bringt.

Die vereinigten Axen und die unendlich ferne Gerade bilden nämlich dann ein Dreieck, in welchem jeder Eckpunkt der ihm gegenüberliegenden Seite entspricht, woraus folgt, dass die beiden Systeme involutorisch liegen (Satz 52, 3. Abschnitt).

Dass umgekehrt in jedem ebenen Polarsysteme die Mittelpunkte, sowie die nicht conjugirten Axen der beiden Systeme, aus welchen es besteht, coincidiren müssen, ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass die unendlich fernen Geraden der zwei Systeme zusammenfallen.

Eine wichtige Eigenschaft der in Rede stehenden involutorischen Gebilde drückt folgender Satz aus:

55. Je zwei einförmige Grundgebilde, welche sich in zwei reciproken involutorisch liegenden Grundgebilden der zweiten Stufe entsprechen, liegen im allgemeinen ebenfalls involutorisch.

Für das ebene Polarsystem lässt sich dieser Satz in nachstehender Weise begründen. Die zwei zu einem Polarsystem vereinigten ebenen Systeme seien Σ und Σ_1, A sei irgend ein nicht auf seiner Polaren gelegener Punkt in Σ und a_1 seine Polare (Fig. 76). Ist D irgend ein Punkt in a_1, d_1 seine durch A gehende Polare und D' der Durchschnittspunkt von a_1 und d_1, so muss D' der Pol der Geraden AD sein, welche wir d'_1 nennen wollen. Alle Punkte D in a_1 bilden eine Punktreihe R, welche mit dem aus allen Geraden d_1 gebildeten Strahlenbüschel S_1 projectivisch ist (Satz 47, 3. Abschnitt); daher muss R auch mit jener Reihe R' projectivisch verwandt sein, welche durch den Schnitt von S_1 mit a_1, nämlich durch alle Punkte D' zu Stande kommt. Da nun dem Punkte D der Punkt D' entspricht, ob man ihn als Element von R oder R' betrachtet, so liegen R und R', folglich auch R und S_1 involutorisch. — In ähnlicher Weise kann der Satz 55 auch für die übrigen Fälle, auf welche er sich bezieht, nachgewiesen werden.

Nachdem D und D' conjugirte Punkte sind, kann man sagen, dass alle Paare conjugirter Punkte, welche ein und derselben Geraden angehören, eine involutorische Reihe und alle Paare conjugirter Geraden (d_1, d'_1), welche durch ein und denselben Punkt gehen, einen involutorischen Strahlenbüschel bilden. — Analoge Beziehungen finden auch in jedem aus Strahlenbündeln bestehenden Polarsysteme statt; wir können somit die Sätze aufstellen:

56. In jedem ebenen Polarsysteme bilden alle Paare conjugirter Punkte ein und derselben Geraden eine involutorische Punktreihe und alle durch ein und denselben Punkt gehenden Paare conjugirter Geraden einen involutorischen Strahlenbüschel.

In jedem Polarsysteme im Strahlenbündel bilden alle Paare conjugirter Ebenen, welche durch ein und dieselbe Gerade gehen, einen involutorischen Ebenenbüschel und alle in ein und derselben Ebene befindlichen Paare conjugirter Strahlen einen involutorischen Strahlenbüschel.

Ist C irgend eine ebenen Curve eines Systemes Σ und bezeichnet man durch Σ_1 irgend ein mit Σ reciprok verwandtes ebenes System, so entspricht der stetigen Aufeinanderfolge von Punkten, welche die Curve C bilden, eine

stetige Aufeinanderfolge von Geraden in Σ_1. Die Curve C_1, welche alle diese Geraden berührt, bezeichnet man als die der Curve C entsprechende und nennt C und C_1 reciproke Curven. Stellt man sich vor C würde durch einen beweglichen Punkt P erzeugt, so kann man annehmen C_1 entstehe durch eine bewegliche Tangente p_1. So oft P irgend eine bestimmte in Σ gelegene Gerade g_1 trifft, ebenso oft geht p_1 durch den der Geraden g_1 entsprechenden Punkt G, woraus man schliessen kann:

57. Sind zwei Curven reciprok, so ist die Ordnungszahl der einen gleich der Classenzahl der anderen. Ein Kegelschnitt kann daher nur wieder einem Kegelschnitte reciprok sein.

Zwei unendlich nahe Lagen des beweglichen Punktes P bestimmen eine Tangente von C und entsprechen zwei unendlich nahen Tangenten von C_1, deren Durchschnittspunkt als ein Punkt der Curve und zugleich als Berührungspunkt der beiden Tangenten betrachtet werden kann. Hieraus folgt:

58. Jeder Tangente und ihrem Berührungspunkte einer Curve C entspricht beziehungsweise ein Berührungspunkt und die dazu gehörige Tangente einer jeden mit C reciprok verwandten Curve.

Für reciproke Strahlenbündel gelten analoge Beziehungen, welche aufzufinden und nachzuweisen keine Schwierigkeiten bietet.

Befinden sich zwei reciproke Systeme in derselben Ebene, so kann man fragen: Wie viele Punkte gibt es, denen in beiden Systemen dieselbe Gerade und wie viele Gerade, denen derselbe Punkt entspricht? Zur Beantwortung dieser Frage führt eine einfache Untersuchung, welche jener ganz ähnlich ist, die uns zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Pole und Polaren zweier in derselben Ebene befindlicher Kegelschnitte geführt hat. Man findet, dass es in zwei reciproken Systemen, welche in derselben Ebene liegen, im allgemeinen drei Punkte gibt, denen dieselben Geraden doppelt entsprechen. Von diesen drei Punkten können zwei imaginär sein (Satz 81, 2. Abschnitt). — Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen, da ein näheres Eingehen auf den in Rede stehenden Gegenstand grösstentheils Wiederholung sein müsste.

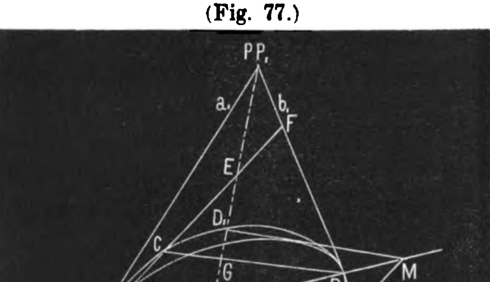
Es soll nun untersucht werden, welche gegenseitige Lage jene Punkte zweier reciproker, in derselben Ebene befindlicher Systeme haben, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen. Die beiden Systeme nennen wir Σ und Σ_1, A sei irgend ein Punkt und a_1 die ihm entsprechende Gerade in Σ_1. Dem Satze 47, 3. Abschnitt, zufolge bildet A den Mittelpunkt eines in Σ befindlichen Strahlenbüschels S, welchem eine auf a_1 gelegene, mit S projectivisch verwandte Reihe R_1 entspricht. Die Gerade a_1 schneidet den Büschel S in einer Reihe R, welche der Reihe R_1 projectivisch ist. R und R_1 sind also zwei conjectivische, auf a_1 befindliche Reihen. Dieselben haben entweder zwei reelle

oder zwei imaginäre Doppelpunkte $D_1 D'_1$. Jeder dieser Doppelpunkte, als Element von Σ_1 betrachtet, liegt auf dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels S. Die Gerade, welche dem Punkte D_1 des Systemes Σ_1 entspricht sei d, die dem Punkte D'_1 desselben Systemes entsprechende Gerade heisse d'. Betrachtet man D_1 als Punkt von Σ, so entspricht ihm eine Gerade in Σ_1, welche durch D_1 geht, nachdem D_1 auf d gelegen ist. D_1 liegt also auf der ihm entsprechenden Geraden, ob man ihn als Punkt von Σ oder Σ_1 auffasst. Betrachtet man die Gerade d als Element von Σ, so entspricht ihr der Punkt D_1 in Σ_1, sieht man d als Gerade von Σ_1 an, so muss ihr, da sie durch D_1 geht, ein auf d gelegener Punkt entsprechen. — Aus dieser Untersuchung ergibt sich nun der Satz:

59. Jeder Punkt in der Ebene zweier reciproker Systeme, der als Element des einen Systemes betrachtet auf der ihm entsprechenden Geraden liegt, ist auch als Element des anderen Systemes auf der ihm entsprechenden Geraden gelegen und jede Gerade, welche als Element des einen Systemes durch den ihr entsprechenden Punkt geht, enthält auch als Element des anderen Systemes betrachtet jenen Punkt, der ihr entspricht.

Ist D_1 ein Punkt irgend einer Geraden a_1, welcher auf der ihm entsprechenden Geraden d liegt, so gibt es auf a_1 im allgemeinen noch einen zweiten Punkt D'_1, durch welchen die ihm entsprechende Gerade geht, nachdem jede conjectivische Reihe im allgemeinen zwei Doppelpunkte besitzt. Zieht man also durch D_1 beliebig viele Gerade in der Ebene der beiden reciproken Systeme, so enthält jede solche Gerade ausser D_1 noch einen zweiten Punkt, welcher auf der ihm entsprechenden Geraden liegt. Alle diese Punkte befinden sich auf einem Kegelschnitte, wie wir nun zeigen wollen.

(Fig. 77.)



In Fig. 77 sei P ein — jedenfalls vorhandener — Punkt, welcher derselben Geraden p entspricht, ob man ihn als Element von Σ oder Σ_1 betrachtet. Als Element von Σ nennen wir diesen Punkt P, als Element von Σ_1 heisse er P_1 und die entsprechenden Geraden seien beziehungsweise p und p_1. Einer auf p, oder was dasselbe ist, auf p_1 befindlichen Reihe R entspricht ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte P, welcher Büschel von

p in einer Reihe R_1 geschnitten wird. A und B seien die Doppelpunkte von R und R_1, also Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden, durch P gehenden Geraden a_1, b_1 liegen. Dass den Punkten A und B dieselben Geraden entsprechen, ob man sie als Elemente von Σ oder Σ_1 betrachtet ist leicht einzusehen. Dem Punkte A z. B. entspricht als Punkt von Σ die Gerade a_1, wie wir angenommen haben; als Punkt von Σ_1, und zwar als Schnittpunkt von a_1 und p_1, entspricht ihm die Verbindungslinie der Punkte A und P, also wieder die Gerade a_1. — Zieht man durch A irgend eine Gerade AD_1, so enthält dieselbe, wie wir oben erklärt haben, ausser A noch einen zweiten Punkt D_1, durch welchen die ihm entsprechende Gerade geht. Ebenso enthält die Gerade D_1P ausser D_1 noch einen zweiten derartigen Punkt D'_1. Die Gerade D_1P_1 als Element von Σ_1 nennen wir m_1 und der ihr entsprechende Punkt, welcher auf p gelegen sein muss, nachdem m_1 durch P_1 geht, heisse M.

m_1 kann nun als Träger einer Punktreihe r betrachtet werden, welche einem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte M entspricht. Dieser Büschel schneidet m_1 in einer Reihe r_1 und die beiden Reihen r und r_1, welche projectivisch sind, müssen ihre Doppelpunkte in $D_1D'_1$ haben. Dass r und r_1 involutorisch liegen, ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass der Schnittpunkt Q der Geraden m_1 und p_1 dem Punkte P entspricht, ob man ihn als Punkt von r oder r_1 ansieht (Satz 51, 1. Abschnitt), nachdem P und p_1 sich unserer Voraussetzung gemäss doppelt entsprechen. Hieraus folgt, dass P und Q durch die Punkte $D_1D'_1$ harmonisch getrennt werden.

Die Gerade m_1, insoferne sie ein Element von Σ bildet, nennen wir m und der ihr entsprechende Punkt, welcher auf p_1 liegen muss, heisse M_1. Einer auf m befindlichen Punktreihe ϱ entspricht ein Strahlenbüschel, welcher seinen Mittelpunkt in M_1 hat und von m in einer mit ϱ projectivischen Punktreihe ϱ_1 geschnitten wird. ϱ und ϱ_1 liegen involutorisch aus demselben Grunde, welchen wir angegeben haben, um die involutorische Lage der Reihen r und r_1 nachzuweisen. Es ist nun leicht einzusehen, dass die beiden durch rr_1 und $\varrho\varrho_1$ gebildeten Involutionen identisch sind. Sie haben ja gemeinschaftliche Doppelpunkte $D_1D'_1$ und jedes Paar von Punkten der Geraden m, welches durch $D_1D'_1$ harmonisch getrennt wird, bildet ein Paar entsprechender Punkte beider Involutionen. Hieraus folgt, dass irgend einem Punkte einer durch P gehenden Geraden m als Punkt von Σ und Σ_1 betrachtet zwei Gerade entsprechen, welche sich in einem Punkte von m schneiden.

Mit Benützung dieses Ergebnisses kann der Punkt P in einfacher Weise bestimmt werden. Man wählt einen beliebigen Punkt α der Ebene von Σ und Σ_1, ermittelt den Schnittpunkt β der beiden diesem Punkte entsprechenden Geraden und verbindet α mit β. Die Gerade $\alpha\beta$ enthält dann den Punkt P. Durch Wiederholung derselben Construction ergibt sich eine zweite Gerade $\gamma\delta$, in welcher P ebenfalls liegen muss. P wird daher im Schnittpunkte von $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ erhalten.

Zieht man durch A irgend eine nicht durch D_1 oder D'_1 gehende Gerade AC, so enthält dieselbe ausser A noch einen Punkt C, welcher auf der ihm entsprechenden Geraden liegt. Die Schnittpunkte von AC mit m und b_1 nennen wir beziehungsweise E und F und der Schnittpunkt der Geraden BC mit m sei G.

Den Punkten der Geraden AC entspricht in Σ und Σ_1 je ein Strahlenbüschel S und S_1, deren Mittelpunkte sich in a_1 befinden, nachdem AC durch A hindurchgeht. S und S_1 sind projectivisch, wie man aus dem Satze 47, 3. Abschnitt, schliessen kann, und liegen perspectivisch, da sie den Strahl a_1 entsprechend gemein haben, welcher dem Punkte A doppelt entspricht. Der perspectivische Durchschnitt der beiden Büschel geht durch die Punkte B und C. Denn es entsprechen dem Punkte F, weil er auf b_1 liegt, zwei sich in B schneidende Gerade und dem Punkte C entsprechen nach Satz 59, 3. Abschnitt, zwei Gerade, welche durch C gehen. Dem Punkte E entsprechen daher zwei Gerade, welche sich in einem Punkte von BC schneiden, nachdem aber E auf m gelegen ist, so gehört der Schnittpunkt dieser zwei Geraden auch der Linie m an, folglich schneiden sich die zwei dem Punkte E entsprechenden Geraden im Punkte G, woraus man schliessen kann, dass E und G entsprechende Punkte der auf m befindlichen involutorischen Reihen rr_1 bilden.

Wir denken uns nun durch A unendlich viele Gerade AC gezogen und sämmtliche Punkte C mit B verbunden. Alle Punkte E bilden dann eine Reihe r, welche der durch alle Punkte G entstehenden Reihe r_1 projectivisch ist. Die beiden aus allen Geraden AC und BC bestehenden Strahlenbüschel sind daher ebenfalls projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt k, welchem sämmtliche Punkte C angehören, die auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen. Dieser Kegelschnitt berührt die Geraden a_1 und b_1 beziehungsweise in den Punkten A und B. Die Curve k geht nämlich durch A und B, nachdem diese Punkte in den ihnen entsprechenden Geraden liegen, sie kann aber weder a_1 noch b_1 schneiden; denn würde z. B. a_1 mit k noch einen Punkt H ausser A gemein haben, so müsste H einer von a_1 verschiedenen Geraden entsprechen und diese Gerade müsste nicht nur durch H, sondern auch durch A gehen, weil H auf a_1 liegt. Die Gerade AH ist aber von a_1 nicht verschieden, es würden also die zwei Punkte A und H als Punkte desselben Systemes ein und derselben Geraden entsprechen, was unmöglich ist.

Dem Kegelschnitte k, als Curve des Systemes Σ betrachtet, entspricht ein Kegelschnitt k_1, welcher von allen Geraden berührt wird, die den Punkten von k entsprechen, also von allen Geraden, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen (In Fig. 77 sind z. B. D_1M und D'_1M solche Gerade). Demnach müssen die Schnittpunkte irgend einer Tangente von k_1 mit der Curve k jene Punkte sein, welche dieser Tangente entsprechen. Betrachtet man k als Curve

des Systemes Σ_1, so entspricht ihr gleichfalls ein Kegelschnitt k_2 in Σ. Dieser Kegelschnitt ist identisch mit k_1; denn wie eben erwähnt, entsprechen die Schnittpunkte $\Delta\Delta_1$ irgend einer Tangente t von k_1 dieser Tangente t und ein gleiches müsste bezüglich der Curve k_2 gelten. Wären k_1 und k_2 verschiedene Curven, so müsste es möglich sein aus Δ eine von t verschiedene Tangente t' an k_2 zu ziehen und Δ müsste auch der Geraden t' entsprechen, was unmöglich ist, nachdem jedem Punkte des einen Systemes nur eine einzige Gerade des anderen Systemes entsprechen kann.

Der Kegelschnitt k_1 berührt die Geraden a_1 und b_1 weil a_1 und b_1 durch die ihnen entsprechenden Punkte A und B gehen. Die Berührungspunkte müssen A und B sein; denn wären es andere Punkte, so würde man aus A und B von a_1 und b_1 verschiedene Tangenten ziehen können, welche dann ebenfalls den Punkten A und B entsprechen müssten.

Die Geraden a_1 und b_1 werden daher sowohl von k, als auch von k_1 in den Punkten A und B berührt.

Dass k_1 stets innerhalb der Curve k gelegen ist, geht daraus hervor, dass jede Tangente von k_1 den Kegelschnitt k in reellen Punkten, nämlich in den ihr entsprechenden treffen muss.

Sind die Doppelpunkte $D_1 D'_1$ aller involutorischen Reihen deren Träger die durch P gehenden Geraden m bilden imaginär, so gibt es keinen reellen Kegelschnitt k. Dann ist aber auch keine reelle Curve k_1 vorhanden. Existirt nämlich keine reelle Curve k, also auch kein reeller Punkt, welcher auf der ihm entsprechenden Geraden liegt, so gibt es selbstverständlich auch keine reelle Gerade, welche durch den ihr entsprechenden Punkt geht. k und k_1 sind demnach entweder zugleich reell oder zugleich imaginär.

Haben die auf p befindlichen conjectivischen Reihen R und R_1 imaginäre Doppelpunkte A und B, so kann man zwei Fälle unterscheiden: Entweder haben alle involutorischen Reihen, deren Träger die durch P gehenden Geraden m bilden, imaginäre Doppelpunkte, dann sind k und k_1 imaginär, oder alle diese Reihen besitzen reelle Doppelpunkte, dann gibt es reelle Curven k und k_1, welche sich in den zwei imaginären Doppelpunkten A und B berühren. Dass im letzteren Falle die Gerade p keine der Curven k oder k_1 schneiden kann, also P innerhalb beider Curven liegen muss, ist leicht einzusehen.

Als Resultat der eben durchgeführten Untersuchung stellen wir nun folgenden Satz auf:

60. Liegen zwei reciproke Systeme in derselben Ebene, so gehören alle Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen, im allgemeinen einem Kegelschnitte k an und alle Geraden, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, berühren einen Kegelschnitt k_1. Diese Curven sind entweder beide reell, oder beide imaginär und berühren

sich im allgemeinen in zwei reellen oder imaginären Punkten. Kein Punkt der Curve k_1 liegt ausserhalb k.

Für zwei concentrisch liegende reciproke Strahlenbündel gilt ein analoger Satz, welchen aufzustellen und nachzuweisen nicht schwer fällt.

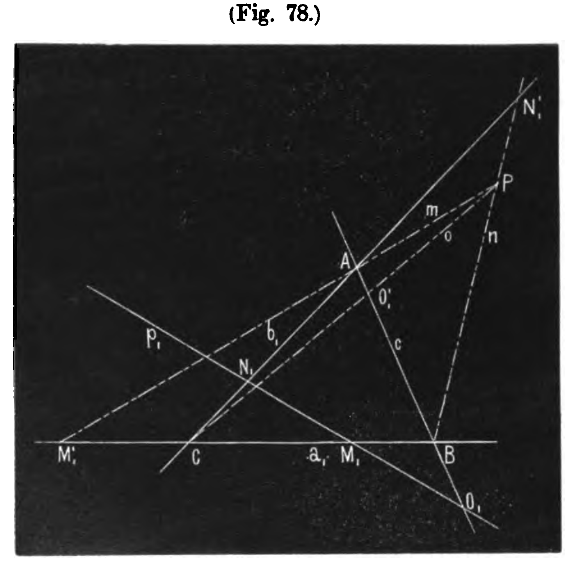
Wenn die zwei in derselben Ebene befindlichen reciproken Systeme involutorisch liegen, also ein Polarsystem bilden, so fallen die beiden Curven k und k_1 zusammen. Denn ist a irgend eine Tangente von k_1, so schneidet sie die Curve k in zwei ihr entsprechenden Punkten A und B, welche im allgemeinen nicht coincidiren können, wenn k und k_1 verschiedene Curven sind. Im ebenen Polarsysteme entspricht aber jeder Geraden a ein und derselbe Punkt, ob man a als Element des einen oder des anderen Systemes betrachtet, folglich müssen A und B, also auch k und k_1 zusammenfallen. Der Punkt A welcher der Tangente a entspricht liegt auf k und zugleich auf a, daher muss A der Berührungspunkt von a mit k sein. Der Pol einer jeden Tangente der Curve k ist somit der Berührungspunkt dieser Tangente.

Sind ABC die Eckpunkte irgend eines Polardreieckes, das einem ebenen Polarsysteme angehört, und hat keine der durch conjugirte Punkte gebildeten involutorischen Reihen, deren Träger die Seiten $a_1 b_1 c_1$ dieses Dreieckes sind reelle Doppelpunkte (Satz 56, 3. Abschnitt), so kann die Curve k keine der drei Seiten schneiden. Dann müsste es aber auch möglich sein aus jedem der Punkte A, B oder C zwei Tangenten an k zu ziehen. Bezeichnet man eine der in A sich schneidenden Tangenten durch d_1, ihren Schnittpunkt mit a_1 durch D und den Berührungspunkt derselben durch B, so ist B der Pol von d_1; aber auch D müsste, als Schnittpunkt von a_1 und d_1 der Geraden AD, nämlich der Tangente a_1 entsprechen, was nur denkbar ist, wenn man annimmt, dass B und D zusammenfallen, d. h. dass k die Gerade a_1 schneidet. Dies widerspricht nun unserer Voraussetzung, folglich kann es keinen reellen Kegelschnitt k geben, wenn keine der auf den drei-Seiten irgend eines Polardreieckes befindlichen, durch conjugirte Punkte gebildeten Reihen reelle Doppelpunkte hat.

Von der Möglichkeit eines ebenen Polarsystemes, in welchem keine Seite eines Polardreieckes Doppelpunkte besitzt, also keine reelle Curve k vorhanden ist, kann man sich durch Folgendes überzeugen: Nach Satz 53 ist es gestattet ein Polardreieck, dann irgend einen Punkt und seine Polare beliebig zu wählen. Die Ecken dieses Dreieckes seien ABC (Fig. 78), seine Seiten $a_1 b_1 c_1$, der gewählte Punkt heisse P und seine Polare p_1. Der Geraden m, welche die Punkte A und P verbindet, entspricht der Schnittpunkt M_1 von a_1, p_1, der Geraden n, nämlich der Verbindungslinie von B und P, entspricht der Schnittpunkt N_1 von b_1, p_1 und endlich entsprechen sich der Schnittpunkt O_1 von c_1, p_1 und die Verbindungslinie o der Punkte C, P. Heissen die Durchschnittspunkte von a_1 und m, dann von b_1 und n, ferner von c_1 und o, beziehungsweise M'_1, N'_1, O'_1, so sind $M_1 M'_1$, sowie auch $N_1 N'_1$ und $O_1 O'_1$ conjugirte

Punkte. Durch diese drei Punktpaare und die Ecken des gewählten Polardreieckes ABC wird auf den Seiten des letzteren je eine involutorische Punktreihe vollkommen bestimmt, welche durch conjugirte Punkte zu Stande kommt, nachdem in jeder Seite zwei Paare conjugirter Punkte gegeben erscheinen (Satz 58, 1. Abschnitt). In Fig. 78 haben nun diese bestimmenden Punktpaare auf jeder Seite eine solche gegenseitige Lage, dass keine der drei in Rede stehenden involutorischen Reihen reelle Doppelpunkte haben kann. Die Punkte A, B werden nämlich durch O_1, O'_1, die Punkte A, C durch N_1, N'_1 und die Punkte B, C durch M_1, M'_1 getrennt, woraus geschlossen werden kann, dass die drei Reihen einstimmig verlaufen, also keine Doppelpunkte besitzen. In diesem Falle ist aber kein reeller Kegelschnitt k denkbar, und doch ist das Polarsystem, welches durch ABC, den Punkt P und seine Polare p_1 bestimmt wird, möglich; es muss daher auch ebene Polarsysteme geben, in denen keine reelle Curve k vorhanden ist, also kein reeller Punkt in seiner Polaren liegt.

(Fig. 78.)



Jeder auf seiner Polaren gelegene Punkt eines ebenen Polarsystemes wird ein O r d n u n g s p u n k t, jede durch ihren Pol gehende Gerade ein O r d n u n g s s t r a h l und der Kegelschnitt k, welcher alle Ordnungspunkte enthält, die O r d n u n g s c u r v e oder D i r e c t r i x des Polarsystemes genannt.

Der folgende Satz bedarf nun keines besonderen Beweises mehr.

61. A l l e O r d n u n g s p u n k t e e i n e s e b e n e n P o l a r s y s t e m e s g e h ö r e n e i n e m r e e l l e n o d e r i m a g i n ä r e n K e g e l s c h n i t t e, d e r D i r e c t r i x d e s S y s t e m e s, a n, w e l c h e r v o n a l l e n O r d n u n g s s t r a h l e n i n d e n i h n e n e n t s p r e c h e n d e n O r d n u n g s p u n k t e n b e r ü h r t w i r d.

Es ist nun leicht einzusehen, dass jeder Kegelschnitt als Directrix eines ebenen Polarsystemes betrachtet werden kann und dass je ein Punkt und seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt entsprechende Elemente dieses Systemes bilden. Auch fällt es nicht schwer sich zu überzeugen, dass je zwei entsprechende Elemente eines ebenen Polarsystemes Pol und Polare in Bezug auf die Directrix sein müssen. Hieraus folgt, dass die A x e n und der M i t t e l p u n k t

eines ebenen Polarsystemes mit den Axen und dem Mittelpunkte der Directrix zusammenfallen.

In jedem ebenen Polarsysteme gibt es im allgemeinen zwei, auf einer der Axen befindliche, vom Mittelpunkte gleich weit entfernte Punkte, welche eine derartige Lage haben, dass je zwei durch ein und denselben von diesen Punkten gehende conjugirte Gerade auf einander senkrecht stehen. Diese Punkte werden Brennpunkte und jene Axe, auf welcher sie liegen, die Hauptaxe des Polarsystemes genannt. Die beiden Brennpunkte können auch im Mittelpunkte coincidiren, dann stehen je zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht und das Polarsystem wird ein rechtwinkeliges genannt. Besitzt letzteres eine reelle Directrix, so muss dieselbe ein Kreis sein.

Wird ein Polarsystem im Strahlenbündel durch irgend eine Ebene geschnitten und hat das sich als Schnitt ergebende Polarsystem eine reelle Directrix, so gibt es offenbar eine dem Polarsysteme im Strahlenbündel angehörige reelle Kegelfläche zweiter Ordnung, deren sämmtliche Strahlen auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen. Diese Kegelfläche geht durch die Directrix des ebenen Polarsystemes. Man nennt sie die Ordnungsfläche oder Directrix des Polarsystemes im Strahlenbündel. Dass es auch Systeme gibt, in welchen keine reelle Ordnungsfläche existirt, ist leicht einzusehen.

Mit Hilfe der Gesetze der Reciprocität, welche wir bisher kennen gelernt haben, ist es möglich aus gewissen Eigenschaften eines Gebildes, das einem Grundgebilde zweiter Stufe angehört, auf die Eigenschaften eines anderen Gebildes zu schliessen, welches dem ersteren reciprok ist. Wenn etwa mehrere Gerade einer ebenen Figur sich in demselben Punkte schneiden, so können wir behaupten, dass in der reciproken ebenen Figur die Punkte, welche den erwähnten Geraden entsprechen, auf ein und derselben Geraden liegen. Wenn mehrere Punkte einer ebenen Figur sich auf einem Kegelschnitte befinden, so berühren in der reciproken Figur jene Geraden, welche den erwähnten Punkten entsprechen, ebenfalls einen Kegelschnitt u. s. w. Alle bisher aufgestellten Doppelsätze bilden Beispiele hiefür und jeder von zweien dieser Doppelsätze kann aus dem anderen mit Hilfe der Reciprocitätsgesetze unmittelbar abgeleitet werden. Man hat eben nur, wenn es sich um zwei ebene Gebilde handelt, statt Punkt Gerade, statt Durchschnittspunkt Verbindungslinie, statt Punkt einer Curve Tangente einer Curve u. s. w. zu setzen, um aus dem einen den anderen Satz zu erhalten. Will man aus einem Satze, der sich auf Gebilde im Strahlenbündel bezieht, mit Hilfe der Gesetze der Reciprocität einen zweiten Satz ableiten, der ebenfalls auf Gebilde im Strahlenbündel Bezug hat, so muss statt Strahl Ebene, statt Durchschnittslinie zweier Ebenen Ebene zweier Strahlen, statt Strahl einer Kegelfläche tangirende Ebene einer Kegelfläche u. s. w. gesetzt werden. Bezieht sich endlich ein Satz auf ebene Gebilde und soll aus demselben ein anderer Satz abgeleitet werden, der für Gebilde im Strahlen-

bündel gilt, so hat man statt Punkt Ebene, statt Gerade Strahl, statt Punkt einer Curve, tangirende Ebene einer Kegelfläche u. s. w. zu setzen.

Der auf solche Art abgeleitete Satz bedarf dann keines besonderen Beweises mehr, wenn der andere bereits nachgewiesen ist. Je zwei solche Sätze werden reciproke Sätze genannt.

Nicht aus jedem Satze lässt sich indess durch die in Rede stehende Transformation ein ebenfalls giltiger ableiten. So z. B. kann der folgende in der angegebenen Weise nicht transformirt werden: „Jede Tangente eines Kreises steht auf dem Durchmesser, welcher durch ihren Berührungspunkt geht, senkrecht". Nicht transformirbar nach dieser einfachen Methode sind eben im allgemeinen alle Sätze, welche sich auf einfache Massverhältnisse beziehen und Eigenschaften ausdrücken, denen keine Doppelverhältnisse, sondern nur einfache zu Grunde liegen.

Vierter Abschnitt.

Flächen zweiter Ordnung.

---

a) Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe.

Sind s und s_1 zwei reciproke Strahlenbündel, von denen wir im allgemeinen annehmen wollen, dass ihre Mittelpunkte nicht coincidiren, so liegen alle Punkte, in welchen sich je zwei entsprechende Elemente von s und s_1 schneiden, auf einer Fläche, die als ein Erzeugniss der beiden Bündel betrachtet werden kann. Man nennt dieses Erzeugniss eine Fläche zweiter Ordnung. Die Mittelpunkte der erzeugenden Bündel liegen auf der genannten Fläche, nachdem die Verbindungslinie dieser Punkte, ob man sie als Element des einen oder des anderen Bündels betrachtet, die ihr entsprechende Ebene in einem der Mittelpunkte trifft. Der Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit irgend einer Ebene ε ist eine Kegelschnittslinie. Denn die zwei ebenen Systeme, welche sich als Schnitte von ε mit s und s_1 ergeben, sind einander reciprok und da sie denselben Träger ε haben, so gehören im allgemeinen alle Punkte von ε, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen, einem Kegelschnitte K an. (Satz 60, 3. Abschnitt.) Jeder Punkt von K liegt aber in der Fläche zweiter Ordnung, nachdem jeder solche Punkt den Durchschnitt von zwei entsprechenden Elementen der beiden Bündel s und s_1 bildet; es muss daher die Curve K der Durchschnitt der Ebene ε mit der Fläche zweiter Ordnung sein. Geht die genannte Ebene durch den Mittelpunkt eines der erzeugenden Strahlenbündel, etwa durch den Mittelpunkt von s, so ist der Schnitt ebenfalls im allgemeinen eine Kegelschnittslinie, wie folgende Betrachtung lehrt. Die Ebene ε kann in diesem Falle als Element von s betrachtet werden, welchem irgend ein bestimmter Strahl e_1 in s_1 entspricht und allen in ε gelegenen Strahlen von s müssen Ebenen von s_1 entsprechen, die durch e_1 gehen. Alle in ε gelegenen Strahlen von s bilden einen Strahlenbüschel S, welchem ein Ebenenbüschel E_1 in s_1 entspricht, dessen Axe e_1 ist. E_1 wird nun durch ε in einem Strahlenbüschel geschnitten, der dem Büschel S projectivisch ist, also mit ihm einen Kegelschnitt erzeugt, und dieser Kegelschnitt gehört der Fläche zweiter Ordnung an, nachdem in jedem seiner Punkte zwei entsprechende Elemente von s und s_1 zusammentreffen. Geht endlich ε durch die Mittelpunkte beider erzeugender Bündel, so gelangt man

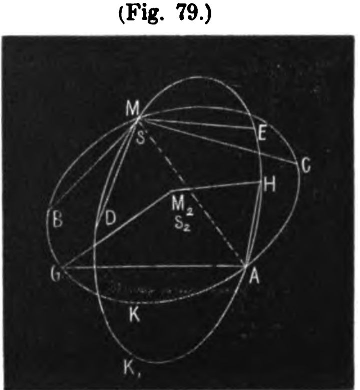
durch dieselbe Schlussfolgerung, wie in dem eben vorausgesetzten Falle zu dem Resultate, dass der in Rede stehende Schnitt eine Kegelschnittslinie sein muss. Es gilt somit der Satz:

1. Der Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit irgend einer Ebene ist im allgemeinen eine Kegelschnittslinie.

Hieraus folgt, **dass eine Fläche zweiter Ordnung von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.***)

Wir beweisen nun zunächst, dass je zwei beliebige Punkte einer Fläche zweiter Ordnung als Mittelpunkte zweier diese Fläche erzeugender Strahlenbündel angenommen werden können. M sei der Mittelpunkt eines der erzeugenden Bündel s (Fig. 79), K, K_1 zwei beliebige durch M gehende ebene Schnitte der Fläche, welche sich noch in einem zweiten Punkte A schneiden, endlich heisse M_2 irgend ein beliebiger, ausserhalb K und K_1 befindlicher Punkt der Fläche zweiter Ordnung. In dem Kegelschnitte K wählen wir zwei beliebige Punkte B, C, in der Curve K_1 zwei beliebige Punkte D, E und legen durch die Punkte M_2 und A irgend eine Ebene, welche K in G und K_1 in H schneidet. Die vier Geraden, welche den Punkt M mit $BCDE$ verbinden, betrachten wir als Strahlen des erzeugenden Bündels s und M_2 als Mittelpunkt eines zweiten mit s reciprok verwandten Bündels s_2, dessen Strahlen M_2G, M_2H wir den Ebenen der Curven K und K_1 als entsprechend zuweisen. Unter dieser Voraussetzung muss der Strahl MA in s der Ebene M_2A in s_2 entsprechen, weil MA der Durchschnitt der Ebenen von K und K_1 ist, während die Ebene M_2A durch jene Strahlen M_2G, M_2H geht, die den Ebenen der zwei Curven entsprechen. Den Strahlen MB, MC in s weisen wir in s_2 beziehungsweise die Ebenen M_2GB und M_2GC, dann den Strahlen MD, ME beziehungsweise die Ebenen M_2HD und M_2HE als entsprechend zu. Die gemachten Annahmen sind nach Satz 49, 3. Abschnitt, gestattet, denn in jedem der beiden reciproken Strahlenbündel s und s_2 wurden nur je vier Elemente beliebig gewählt und einander als entsprechend zugewiesen. Durch diese Annahmen sind aber dem erwähnten Satze zufolge die beiden Bündel vollkommen bestimmt und wir haben nun zu untersuchen, ob durch s und s_2 die gegebene Fläche zweiter Ordnung, welche ein Erzeugniss der Bündel s und s_1 ist, ebenfalls erzeugt wird.

(Fig. 79.)



Der Kürze des Ausdruckes wegen nennen wir die gegebene Fläche zweiter Ordnung F und jene Fläche zweiter Ordnung, welche durch s und s_2 zu Stande

*) Im allgemeinen wird eine Fläche, die von keiner Geraden in mehr als n Punkten geschnitten wird, eine Fläche n^{ter} Ordnung genannt.

kommt, heisse F_1. Vor allem ist leicht einzusehen, dass F und F_1 die Curven K und K_1, sowie auch den Punkt M_2 gemein haben. Dass K auch der Fläche F_1 angehört, geht daraus hervor, dass die fünf Punkte $ABCGM$, welche K bestimmen, unseren Annahmen zufolge auf F_1 gelegen sind. Ebenso muss K_1 der Fläche F_1 angehören, nachdem die fünf Punkte $AEDHM$ von K_1 auf dieser Fläche liegen. Ist nun P irgend ein Punkt von F und legt man durch P und M_2 irgend eine Ebene ε, welche K und K_1 in je zwei Punkten schneidet, so erhält man als Schnitt von ε, sowohl mit F, als auch mit F_1 eine Kegelschnittslinie. Diese beiden Curven müssen aber identisch sein, nachdem sie fünf Punkte, nämlich M_2 und die vier Schnittpunkte mit K und K_1 gemein haben, daher gehört P auch der Fläche F_1 an. P wurde beliebig auf der Fläche F angenommen, also liegt nicht nur P, sondern auch jeder andere Punkt von F auf der Fläche F_1 d. h. F und F_1 sind identisch.

Denkt man sich durch M_2 — so wie vorhin durch M — zwei schneidende Ebenen gelegt und einen beliebigen Punkt M_3 der Fläche als Mittelpunkt eines Strahlenbündels s_3 angenommen, so ist leicht einzusehen, dass s_3 derart reciprok auf den Bündel s_2 bezogen werden kann, dass die Fläche F durch s_2 und s_3 erzeugt wird.

Aus dieser Untersuchung geht auch hervor, dass die Fläche F durch K und K_1 und den Punkt M_2 vollkommen bestimmt ist.

Wenn die Schnittpunkte A und M der beiden Curven K und K_1 in M coincidiren, so berühren sich K und K_1 in diesem Punkte, welche Voraussetzung ebenfalls gemacht werden kann, ohne dass die Resultate der eben durchgeführten Untersuchung eine Aenderung erleiden würden.

Es lassen sich nun folgende Sätze aufstellen:

2. Je zwei Punkte einer Fläche zweiter Ordnung können als Mittelpunkte zweier die Fläche erzeugender Strahlenbündel betrachtet werden. Diese beiden Bündel lassen sich auf unendlich viele Arten reciprok auf einander beziehen.

3. Eine Fläche zweiter Ordnung ist durch zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Kegelschnitte K und K_1, welche sich entweder berühren, oder in zwei Punkten schneiden, und durch einen ausserhalb der Ebenen von K und K_1 gelegenen Punkt vollkommen bestimmt.

Der zweite Theil des ersteren Satzes leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass die Ebene, welche durch M_2 und A gelegt wurde, nämlich die Ebene in s_2, die dem Strahle MA in s entspricht, eine beliebige Lage haben kann.

Sind s und s_2 (Fig. 79) zwei eine Fläche zweiter Ordnung F erzeugende Strahlenbündel, deren Mittelpunkte M und M_2 heissen mögen, ε irgend eine durch M gehende Ebene von s, welche F in der Curve K schneidet, und bezeichnet man den der Ebene ε entsprechenden Strahl durch M_2G, so muss die Tangente t an K im Punkte M jener Ebene entsprechen, welche durch M und M_2G

bestimmt wird. Denkt man sich nämlich den Strahl MB, welcher K in B schneidet, so lange in der Ebene von K um M gedreht, bis der Punkt B mit M coincidirt, also MB zur Tangente wird, so fällt die Ebene M_2BG, welche dem Strahle MB entspricht, mit der Ebene MM_2G zusammen. Nachdem nun ε beliebig durch M gelegt wurde, so entspricht jeder Tangente t eines durch M gehenden Kegelschnittes der Fläche F eine Ebene in s_2, welche durch die Gerade M_2M geht. Alle durch M_2M gehenden Ebenen bilden einen Ebenenbüschel, welchem ein Strahlenbüschel in s entsprechen muss, daher liegen alle Tangenten t auf einer Ebene und zwar auf derjenigen, die dem Strahle MM_2 entspricht. Diese Ebene ist die tangirende Ebene im Punkte M. Sie bildet den Träger eines aus Tangenten der Fläche bestehenden Strahlenbüschels in s, welcher einem Ebenenbüschel in s_2 entspricht, dessen Axe der gemeinschaftliche Strahl MM_2 der erzeugenden Büschel s, s_2 ist.

Bezeichnet ε eine Ebene, welche eine Fläche zweiter Ordnung F in irgend einem Punkt M berührt, den wir als Mittelpunkt eines der zwei erzeugenden Strahlenbündel s und s_1 betrachten wollen, und heisst der aus sämmtlichen in ε gelegenen Tangenten von F gebildete Strahlenbüschel S, so schneidet s jenen Ebenenbüschel, welcher dem Strahlenbüschel S entspricht, in einem mit S projectivisch verwandten concentrisch liegenden Strahlenbüschel S_1 (Satz 47, 3. Abschnitt). Die beiden Büschel S und S_1 können nun entweder reelle oder imaginäre Doppelstrahlen haben. Ist ersteres der Fall, so liegt jeder Doppelstrahl seiner ganzen Ausdehnung nach auf der Fläche F. Denn jeder Punkt eines solchen Strahles gehört zugleich zwei entsprechenden Elementen der erzeugenden Büschel an.

Da M als ein beliebiger Punkt der Fläche F angenommen wurde und in zwei concentrisch liegenden, projectivischen Strahlenbüscheln entweder keine, zwei coincidirende, zwei gesonderte, oder unendlich viele reelle Doppelstrahlen vorhanden sind, so kann man behaupten, dass durch einen beliebigen Punkt einer Fläche zweiter Ordnung entweder keine, zwei coincidirende, zwei gesonderte, oder unendlich viele reelle Gerade gehen, welche ganz auf der Fläche liegen. Die Fälle, in welchen es keine oder nur zwei solche Gerade gibt, sind die allgemeinen.

Man nennt jede Gerade, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt, eine gerade Erzeugende der Fläche, weil wie wir später sehen werden, jede solche Linie als eine einzelne Lage einer die Fläche erzeugenden Geraden betrachtet werden kann.

Nachdem zwei durch einen bestimmten Punkt M einer Fläche zweiter Ordnung gehende gerade Erzeugende Doppelstrahlen jener zwei Büschel S und S_1 sind, deren gemeinschaftlicher Träger die tangirende Ebene im Punkte M bildet, so muss umgekehrt jede durch zwei gerade Erzeugende gelegte Ebene die Fläche im Schnittpunkte dieser Erzeugenden berühren.

Wird durch eine gerade Erzeugende irgend eine Ebene gelegt, so muss diese Ebene die Fläche im allgemeinen noch ein zweites Mal, und zwar wieder in einer Geraden schneiden. Der ebene Schnitt, welcher nach Satz 1 immer eine Curve zweiter Ordnung oder eine Specialität einer solchen Curve ist, geht nämlich in diesem Falle in zwei sich schneidende Gerade über. Hieraus ergibt sich, dass eine Fläche zweiter Ordnung entweder keine, oder unzählig viele, nicht aber bloss eine endliche Anzahl von geraden Linien enthalten kann. Gibt es eine auf der Fläche befindliche Gerade, so muss jede durch sie gelegte Ebene die Fläche im allgemeinen noch in einer zweiten Geraden schneiden und geht durch irgend einen Punkt M der Fläche keine gerade Erzeugende, so kann es auf der Fläche überhaupt keine solche Linie geben. Denn wäre etwa d irgend eine gerade Erzeugende, so müsste die Ebene, welche durch M und d bestimmt wird, die Fläche in einer durch M gehenden Geraden schneiden, was der gemachten Voraussetzung widerspricht.

Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

4. Eine Fläche zweiter Ordnung hat entweder keine oder unendlich viele gerade Erzeugende. Durch jeden beliebigen Punkt einer solchen Fläche gehen im allgemeinen entweder keine oder zwei gerade Erzeugende. Jede durch eine gerade Erzeugende gelegte Ebene schneidet die Fläche im allgemeinen noch in einer zweiten Geraden und berührt die Fläche im Schnittpunkte der zwei Geraden. Jede tangirende Ebene einer Fläche zweiter Ordnung mit geraden Erzeugenden schneidet im allgemeinen die Fläche in zwei geraden Linien, deren Schnittpunkt der Berührungspunkt ist.

Eine Fläche zweiter Ordnung mit geraden Erzeugenden wird eine Regel- oder Strahlenfläche zweiter Ordnung genannt, da man überhaupt Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstanden gedacht werden können, Regel- oder Strahlenflächen heisst.

Wir haben bereits erklärt, dass durch einen beliebigen Punkt einer Regelfläche entweder nur eine (zwei coincidirende) oder zwei gesonderte, oder unendlich viele gerade Erzeugende gehen können. Ist M irgend ein Punkt einer Regelfläche durch den nur eine gerade Erzeugende d geht, so kann es keinen ausserhalb d befindlichen Punkt M_1 der Fläche geben, durch welchen mehr als eine gerade Erzeugende geht. Denn würden zwei in M_1 sich schneidende Gerade der Fläche existiren, so müsste die eine, nämlich jene, welche in der Ebene $M_1 d$ liegt, von d geschnitten werden, während die andere mit d nicht in einerlei Ebene liegen könnte, nachdem diese Ebene sonst drei Gerade mit der Fläche gemein hätte. Würde nun durch jene Gerade, welche d nicht schneidet, und den Punkt M eine Ebene gelegt, so müsste dieselbe mit der Regelfläche einen durch M gehenden geradlinigen Schnitt geben, der von d ver-

schieden wäre, was unserer Voraussetzung widerspricht. Aus dem Umstande, dass durch keinen ausserhalb d gelegenen Punkt der Fläche mehr als eine gerade Erzeugende geht, kann nun geschlossen werden, dass alle geraden Erzeugenden in einem Punkte zusammentreffen. Sind nämlich d und d' zwei, beziehungsweise durch M und M_1 gehende gerade Erzeugende, deren Schnittpunkt S heissen möge, und würde etwa d' von einer dritten solchen Geraden d'' in einem von S verschiedenen Punkte geschnitten, so müsste die Ebene, welche durch M und d'' bestimmt wird, die Regelfläche in einer von d verschiedenen Geraden schneiden, was gegen die Voraussetzung ist, dass durch M nur eine gerade Erzeugende geht. Hieraus folgt, dass d'' ebenfalls durch S gehen muss, dass also, nachdem d'' beliebig gewählt wurde, alle geraden Erzeugenden im Punkte S zusammentreffen. — Eine derartige Regelfläche zweiter Ordnung, bei welcher alle geraden Erzeugenden durch ein und denselben Punkt S gehen, wird eine Kegelfläche zweiter Ordnung genannt. Der Punkt S heisst die Spitze oder der Mittelpunkt der Kegelfläche. Liegt S in unendlicher Entfernung, so sind alle geraden Erzeugenden parallel und die Kegelfläche geht in eine Cilinderfläche zweiter Ordnung über.

Der oben erwähnte Fall, dass in einer tangirenden Ebene einer Fläche zweiter Ordnung unendlich viele durch den Berührungspunkt M gehende Gerade der Fläche angehören, tritt unter folgender Voraussetzung ein. Sind s und s_1 die erzeugenden Bündel, deren Mittelpunkte wir M und M_1 nennen, und entspricht jenem Strahlenbüschel S, der von sämmtlichen, die Fläche in M berührenden Tangenten gebildet wird, ein Ebenenbüschel E_1, welcher gegen S perspectivisch liegt, so gehören alle diese Tangenten ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche an und sind also zugleich gerade Erzeugende.

Betrachtet man E_1 als einen Ebenenbüschel des Bündels s, so muss demselben in s_1 ein Strahlenbüschel S_1 entsprechen, welcher gegen E_1 ebenfalls perspectivisch liegt. Denn ist α irgend eine Ebene von E_1, welche durch den Strahl a des Büschels S geht, so entspricht der Ebene α in s ein Strahl a_1 in s_1, welcher in dem entsprechenden Elemente von a, nämlich in α liegt, nachdem α durch a geht. Sämmtliche Strahlen des Büschels S_1 gehören somit ebenfalls der Fläche zweiter Ordnung an.

Dass die Fläche in diesem Falle keinen Punkt besitzt, der ausserhalb der Träger der beiden Strahlenbüschel S und S_1 gelegen wäre, geht aus Folgendem hervor: Ist β eine beliebige Ebene von s, welche nicht durch MM_1 geht, so enthält dieselbe irgend einen Strahl b des Büschels S. Dem Strahle b entspricht eine Ebene β_1 in s_1, welche durch b geht, und der Ebene β muss eine in β_1 gelegene Gerade b_1 entsprechen, weil β die Gerade b enthält. Das beliebig gewählte Paar entsprechender Elemente β und b_1 schneiden sich nun in der Ebene des Büschels S, daher erscheint unsere Behauptung gerechtfertigt. Die Fläche zweiter Ordnung geht also in zwei Ebenen über, wenn in den

erzeugenden Strahlenbündeln ein Strahlenbüschel und der ihm entsprechende Ebenenbüschel perspectivisch liegen.

Aus unserer Untersuchung geht hervor, dass man als Specialitäten der Regelflächen zweiter Ordnung aufzufassen hat: Die Kegel- und Cilinderflächen zweiter Ordnung und zwei beliebige Ebenen.

Sowie die Kegelschnittslinien nach der Anzahl ihrer reellen unendlich fernen Punkte in verschiedene Gattungen eingetheilt werden, kann man auch die Flächen zweiter Ordnung nach der Anzahl und gegenseitigen Lage ihrer reellen unendlich fernen Punkte von einander unterscheiden. — Bevor wir auf diesen Gegenstand eingehen bemerken wir, dass alle unendlich fernen Punkte des Raumes auf ein und derselben Ebene liegen müssen. Würden nämlich alle unendlich fernen Punkte auf einer krummen Fläche liegen, oder überhaupt nicht ein und derselben Ebene angehören, so müsste es Gerade geben, welche mehr als einen unendlich fernen Punkt besitzen, da eine krumme Fläche, oder ein System von Punkten, die nicht auf derselben Ebene gelegen sind, nicht von allen denkbaren Geraden nur in einem Punkte getroffen werden kann.

Zunächst betrachten wir die Flächen zweiter Ordnung, welche keine geraden Erzeugenden besitzen.

Hat eine solche Fläche mit der unendlich fernen Ebene keinen reellen Punkt gemein, so wird sie ein Ellipsoid genannt, weil alle ihre ebenen Schnitte Curven zweiter Ordnung ohne unendlich fernen reellen Punkten, nämlich Ellipsen sind. Dass ein Ellipsoid keine Regelfläche sein kann, leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass jede Gerade einen unendlich fernen Punkt besitzt.

Wird eine Fläche zweiter Ordnung, auf welcher keine Geraden vorhanden sind, von der unendlich fernen Ebene berührt, so heisst die Fläche ein elliptisches Paraboloid. Der Schnitt einer Ebene mit einem elliptischen Paraboloide ist eine Parabel, wenn die Ebene durch den unendlich fernen Punkt der Fläche geht. Jede andere Ebene kann die Fläche, wie leicht einzusehen, nur in einer Ellipse schneiden.

Ist der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit einer Fläche zweiter Ordnung, welche keine geraden Erzeugenden besitzt, eine Kegelschnittslinie, nennt man die Fläche ein zweifaches Hyperboloid. Wie wir später sehen werden, besteht diese Fläche aus zwei Theilen. Sie kann durch Ebenen sowohl nach Ellipsen, Parabeln, als auch nach Hyperbeln geschnitten werden. Heisst K der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der Fläche und ε irgend eine Ebene, welche letztere schneidet, so wird der Schnitt von ε eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem ε die Curve K nicht schneidet, berührt, oder schneidet.

Die Bedingungen unter welchen ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid, oder ein zweifaches Hyperboloid durch reciproke Strahlenbündel erzeugt wird, können aus Folgendem entnommen werden.

Sind s und s_1 die erzeugenden Strahlenbündel mit den Mittelpunkten M und M_1 und verschiebt man den einen dieser Bündel, etwa s_1 derart, dass seine Elemente zu ihren ursprünglichen Richtungen parallel bleiben, bis M_1 mit M zusammenfällt, so kann es sein, dass kein Strahl des verschobenen Bündels, den wir s'_1 nennen wollen, in jener Ebene von s liegt, welche demselben entspricht. Um dies einzusehen braucht man sich nur s und s'_1 durch irgend eine Ebene geschnitten zu denken, welche nicht durch M geht. Jede solche Ebene schneidet die beiden concentrischen Bündel in zwei reciproken ebenen Systemen, welche eine reelle oder imaginäre Ordnungscurve besitzen. Im letzteren Falle gibt es keinen reellen Strahl von s'_1, welcher in der ihm entsprechenden Ebene liegt, und dann ist auch in s_1 kein reeller Strahl vorhanden, welcher zu der ihm entsprechenden Ebene in s parallel wäre. Die durch s und s_1 erzeugte Fläche zweiter Ordnung hat also dann keinen reellen unendlich fernen Punkt und ist somit eine Ellipsoid.

Schneidet eine beliebige Ebene die beiden concentrischen Strahlenbündel s und s'_1 in reciproken ebenen Systemen, bei welchen die Ordnungscurve in einen einzigen Punkt übergegangen ist, so gibt es nur einen einzigen Strahl in s_1, welcher zu der ihm entsprechenden Ebene in s parallel läuft, und die erzeugte Fläche hat nur einen einzigen reellen unendlich fernen Punkt. Die erzeugte Fläche ist dann ein elliptisches Paraboloid. — Es fällt nun nicht schwer die Beziehungen zu ermitteln, welche zwischen s und s_1 stattfinden müssen, damit ein zweifaches Hyperboloid zu Stande komme.

Wird eine Regelfläche zweiter Ordnung von der unendlich fernen Ebene in einer Curve zweiter Ordnung — worunter hier nicht auch Specialitäten einer solchen Curve zu verstehen sind — geschnitten, so heisst die Fläche, wenn sie keine Kegelfläche ist, ein einfaches Hyperboloid. Diese Fläche besteht nur aus einem Theile, wie später gezeigt werden wird. Ihre ebenen Schnitte können Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln oder zwei Gerade sein.

Besteht der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit einer Regelfläche zweiter Ordnung, welche keine Kegelfläche ist, aus zwei Geraden, so berührt diese Ebene die Fläche im Durchschnittspunkte der beiden Geraden (Satz 4, 4. Abschnitt); die Fläche heisst dann hyperpolisches Paraboloid, weil ihre ebenen Schnitte, wenn sie nicht geradlinig sind, nur Parabeln oder Hyperbeln sein können. Heissen nämlich d und d' die zwei unendlich fernen geraden Erzeugenden der Fläche und M der Schnittpunkt von d und d', so ist leicht einzusehen, dass alle schneidenden Ebenen, welche gegen M gerichtet sind, parabolische Schnitte geben, während jede andere Ebene ε, wenn sie keine gerade Erzeugende in sich enthält, einen hyperbolischen Schnitt geben muss, dessen unendlich ferne Punkte die Durchschnittspunkte von ε mit den Geraden d und d' bilden.

Gehört eine Regelfläche zur Gattung der Kegelflächen zweiter Ordnung und hat sie mit der unendlich fernen Ebene zwei Gerade gemein, so ist die

Fläche entweder eine hyperbolische Cilinderfläche, oder sie besteht aus zwei Ebenen. Jeder ebene Schnitt einer solchen Cilinderfläche ist entweder geradlinig oder hyperbolisch, denn jede schneidende Ebene, welche nicht durch die unendlich ferne Spitze der Fläche geht, trifft die zwei unendlich fernen Erzeugenden in zwei Punkten.

Hat die unendlich ferne Ebene mit einer Regelfläche zweiter Ordnung nur eine gerade Linie gemein, so ist die Fläche entweder eine Cilinderfläche zweiter Ordnung, oder sie besteht aus zwei parallelen Ebenen. Die Fläche muss nämlich zu jenen Regelflächen gehören, bei welchen durch einen beliebigen Punkt entweder nur eine, oder unendlich viele gerade Erzeugende gehen, weil ja sonst der Schnitt der unendlich fernen Ebene nicht bloss eine Gerade der Fläche enthalten könnte. Eine Kegelfläche mit einer in endlicher Entfernung gelegenen Spitze kann die Fläche nicht sein, nachdem die unendlich ferne Erzeugende jedenfalls den Schnittpunkt aller Erzeugenden in sich enthält, also ist die Fläche entweder eine Cilinderfläche, oder sie besteht aus zwei parallelen Ebenen. Jeder ebene Schnitt einer solchen Cilinderfläche, wenn er nicht geradlinig ist, muss eine Parabel sein, da er nur einen unendlich fernen Punkt besitzt; man nennt desshalb die Fläche eine parabolische Cilinderfläche.

Wird eine Regelfläche zweiter Ordnung von der unendlich fernen Ebene nur in einem unendlich fernen Punkte getroffen, so müssen alle geraden Erzeugenden durch diesen Punkt gehen, weil die Fläche sonst mehr als einen unendlich fernen Punkt hätte. Hieraus folgt dass alle geraden Erzeugenden unter einander parallel sind, also einer Cilinderfläche angehören. Diese Fläche wird eine elliptische Cilinderfläche genannt, weil sie, wie leicht einzusehen, von Ebenen nur in Ellipsen oder geraden Linien geschnitten werden kann.

Man unterscheidet demnach folgende Gattungen von Flächen zweiter Ordnung:

Flächen ohne gerade Erzeugende: Das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweifache Hyperboloid.

Regelflächen: Das einfache Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid, die Kegelfläche zweiter Ordnung, die elliptische, parabolische und hyperbolische Cilinderfläche und das System von zwei Ebenen.

Eine Fläche zweiter Ordnung wird auch durch zwei reciproke ebene Systeme erzeugt, von denen wir im allgemeinen annehmen wollen, dass sie nicht in derselben Ebene liegen. Legt man durch je zwei entsprechende Elemente (Punkt und Gerade) von zwei solchen Systemen eine Ebene, so berühren alle so erhaltenen Ebenen eine Fläche zweiter Ordnung, wie wir später zeigen werden. Letztere wird in diesem Falle als ein Erzeugniss zweier reciproker ebener Systeme, oder auch als umhüllende Fläche aller jener

Ebenen bezeichnet, welche sie berühren. Die Gesammtheit dieser Ebenen nennt man einen Ebenenbündel zweiter Ordnung.

Die Träger der erzeugenden Systeme berühren die umhüllende Fläche ebenfalls. Denn heissen die beiden Systeme Σ und Σ_1, ihre Träger beziehungsweise ε, ε_1 und ihre Durchschnittslinie d, so entspricht der Geraden d als ein Element von Σ betrachtet ein Punkt D_1 in ε_1 und derselben Geraden d als Element von Σ_1 ein Punkt D in Σ, woraus folgt, dass ε und ε_1 Elemente des Ebenenbündels zweiter Ordnung bilden.

An die umhüllende Fläche eines Ebenenbündels zweiter Ordnung lassen sich im allgemeinen aus einer Geraden g nicht mehr als zwei berührende Ebenen legen, wie nachstehende Betrachtung lehrt. Ist M der Schnittpunkt der Geraden g mit dem Träger ε des Systemes Σ und legt man durch g beliebig viele Ebenen, so schneidet der durch letztere gebildete Ebenenbüschel E die Ebene ε in einem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte M, welchen Büschel wir S nennen wollen. Dem Strahlenbüschel S entspricht in Σ_1 eine Punktreihe R_1, deren Träger die dem Punkte M entsprechende Gerade m bildet. Diese Gerade wird von dem Ebenenbüschel E in einer Punktreihe R geschnitten, welche mit R_1 projectivisch ist, nachdem S und R_1, also auch E und R_1 projectivisch sind. (Satz 47, 3. Abschnitt). R und R_1 haben nun im allgemeinen nicht mehr als zwei Doppelpunkte. Jeder solche Doppelpunkt bestimmt mit der Geraden g, eine Ebene des Ebenenbündels zweiter Ordnung, woraus folgt, dass höchstens zwei durch g gehende Ebenen vorhanden sein können, welche die umhüllende Fläche berühren. Würden die Reihen R und R_1 mehr als zwei Doppelpunkte besitzen, so müssten sie identisch sein. Die Ebenen des Büschels E wären dann alle tangirende Ebenen der umhüllenden Fläche, was nur in dem speciellen Falle möglich ist, wenn g der Fläche selbst angehört.

Der eben nachgewiesenen Eigenschaft wegen, wird die umhüllende Fläche eines Ebenenbündels zweiter Ordnung auch eine Fläche zweiter Classe genannt.*) Eine weitere charakteristische Eigenschaft der Flächen zweiter Classe ergibt sich aus folgender Untersuchung: Ist P irgend ein ausserhalb der Träger von Σ und Σ_1 gelegener Punkt und denkt man sich P als Mittelpunkt zweier Strahlenbündel s und s_1, von denen s einen Schein des Systemes Σ und s_1 einen Schein des Systemes Σ_1 bildet, so ist leicht einzusehen, dass jede durch P gehende Ebene, welche entsprechende Elemente von Σ und Σ_1 enthält, also die Fläche zweiter Classe berührt, eine besondere Lage in s und s_1 haben muss. Jede solche Ebene als Element von s betrachtet, enthält nämlich den ihr entsprechenden Strahl von s_1 und als Element von s_1 den ihr entsprechenden Strahl von s und alle derartigen Ebenen berühren ein und die-

*) Im allgemeinen nennt man eine Fläche, an welche aus keiner nicht auf der Fläche befindlichen Geraden mehr als n tangirende Ebenen gelegt werden können, eine Fläche n^{ter} Classe.



selbe **Kegelfläche zweiten Ordnung**. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur anzunehmen s und s_1 würden durch irgend eine Ebene geschnitten und sich an die Sätze 59 und 60, 3. Abschnitt, zu erinnern. Sämmtliche aus P an die Fläche zweiter Classe gelegten berührenden Ebenen umhüllen somit eine Kegelfläche zweiter Ordnung und alle aus P an die Fläche zweiter Classe gezogenen Tangenten bilden gerade Erzeugende dieser Kegelflächen.

Nimmt man an, der Punkt P befinde sich in dem Träger eines der beiden erzeugenden Systeme, etwa Σ, und falle nicht mit dem Berührungspunkte dieses Trägers zusammen, so kommt man zu demselben Resultate. Alle durch P gehenden Geraden von Σ bilden einen Strahlenbüschel S, welchem eine Punktreihe R_1 in Σ_1 entspricht, deren Träger, unserer Voraussetzung gemäss, dass P nicht auf der Fläche zweiter Classe liege, eine vom Durchschnitte d der Systeme Σ und Σ_1 verschiedene Gerade sein muss. Jede Ebene, welche zwei entsprechende Elemente von S und R_1 enthält, berührt die Fläche zweiter Classe und alle diese Ebenen umhüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung. Letztere Behauptung, kann wie folgt gerechtfertigt werden. Der Strahlenbüschel S schneidet die Durchschnittslinie d in einer Punktreihe R', welche mit S, also auch mit R_1 projectivisch verwandt ist. Jede Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte von R_1 und R' bildet nun den Durchschnitt einer von den in Rede stehenden Ebenen mit dem Träger von Σ_1 und alle diese Verbindungslinien umhüllen einen Kegelschnitt, folglich berühren alle aus P an die Fläche zweiter Classe gelegten tangirenden Ebenen eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Nimmt man an, P falle mit dem Berührungspunkte eines der Träger von Σ oder Σ_1 zusammen, oder befinde sich überhaupt auf der Fläche zweiter Classe, so geht die umhüllende Kegelfläche selbstverständlich in eine Ebene über.

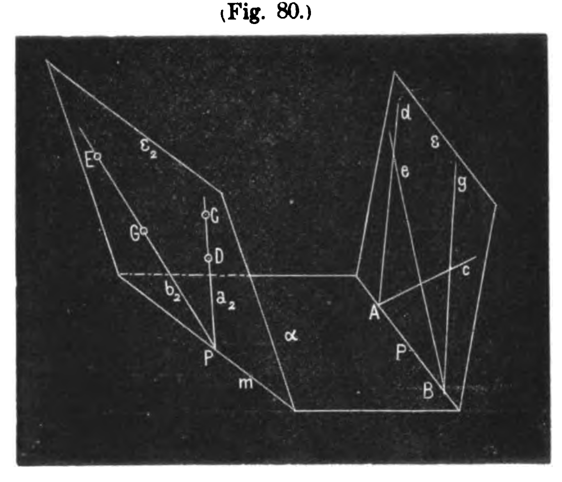
Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

5. **An eine Fläche zweiter Classe können aus irgend einer Geraden, welche nicht auf der Fläche liegt, höchstens zwei tangirende Ebenen gelegt werden. Sämmtliche tangirende Ebenen einer Fläche zweiter Classe, welche durch einen nicht auf der Fläche gelegenen Punkt gehen, umhüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung, deren sämmtliche gerade Erzeugende die Fläche zweiter Classe berühren.**

Es soll nun gezeigt werden, dass je zwei beliebige tangirende Ebenen einer Fläche zweiter Classe als Träger von ebenen Systemen angenommen werden können, welche diese Fläche erzeugen. Σ und Σ_1 seien die beiden ursprünglichen erzeugenden Systeme, deren Träger wir beziehungsweise ε und ε_1 nennen (Fig. 80), A und B zwei beliebige in ε befindliche Punkte, die wir uns als Mittelpunkte von zweien die Fläche zweiter Classe F umhüllenden Kegelflächen k und k_1 denken, und α heisse die zweite berührende Ebene, welche durch die

Gerade AB ausser ε noch an F gelegt werden kann. ε_2 sei ferner irgend eine die Fläche F berührende Ebene, welche jedoch keine der Berührungsebenen von k oder k_1 sein soll, und m die Durchschnittslinie von ε_2 und α. An die Kegelfläche k denken wir uns zwei beliebige berührende Ebenen gelegt, welche ε in den Geraden c und d schneiden, und an k_1 zwei berührende Ebenen, deren Schnitt mit ε wir e und g nennen. Dass c, d in A und e, g in B zusammentreffen müssen, ist selbstverständlich. In der Geraden m wählen wir einen Punkt P als Element eines ebenen Systemes Σ_2, dessen Träger ε_2 ist, und weisen diesem Punkte die Verbindungslinie p der Punkte A und B als entsprechendes Element in Σ zu. Aus P denken wir uns ferner je eine tangirende Ebene an k und k_1 gelegt und bezeichnen die Durchschnittslinien dieser zwei Ebenen mit ε_2 durch a_2 und b_2. Den Geraden a_2, b_2 weisen wir die Punkte A, B als entsprechende Elemente zu. C und D seien die Schnittpunkte von a_2 mit jenen tangirenden Ebenen der Kegelfläche k, welche durch c und d gehen, und E, G die Schnittpunkte von b_2 mit den durch e und g gehenden berührenden Ebenen der Kegelfläche k_1. Den Punkten $CDEG$ in Σ_2 weisen wir endlich in Σ die Geraden $cdeg$ als entsprechende Elemente zu.

(Fig. 80.)



Von den beiden reciproken Systemen Σ und Σ_2 sind nun vier Paare sich entsprechender Elemente angenommen, nämlich Cc, Dd, Ee und Gg, durch welche nach Satz 49, 3. Abschnitt, diese Systeme vollkommen bestimmt werden. Sie erzeugen eine Fläche zweiter Classe F_1, welche von k und k_1, so wie auch von der Ebene ε_2 berührt wird. k ist nämlich durch die fünf berührenden Ebenen ε, α, Aa_2, Cc, Dd, der Fläche zweiter Classe F_1, und k_1 durch die fünf berührenden Ebenen ε, α, Bb_2, Ee, Gg bestimmt, während ε_2, als Träger eines der erzeugenden Systeme, die Fläche F_1 tangiren muss. Die gegebene Fläche F und die durch Σ und Σ_2 erzeugte F_1 werden demnach von k, k_1 und ε_2 gemeinschaftlich berührt. Dass in Folge dessen F und F_1 identisch sind, zeigt nachstehende Betrachtung.

β sei irgend eine berührende Ebene von F, Q ein beliebiger Punkt der Durchschnittslinie von ε_2 und β, endlich nennen wir k_2, k_3 jene Kegelflächen, welche ihre gemeinschaftliche Spitze in Q haben und beziehungsweise die Flächen F und F_1 umhüllen. Diese Kegelflächen müssen identisch sein, da beide

dieselben fünf Ebenen berühren, nämlich ε_2 und die vier Ebenen welche aus Q an die beiden Kegelflächen k und k_1 berührend gelegt werden können. Nachdem nun β die Kegelfläche k_2 berührt, so muss sie auch k_3, folglich auch F_1 berühren, woraus sich ergibt, dass F und F_1 identisch sind. Denn β wurde beliebig gewählt, daher müssen alle berührenden Ebenen von F auch die Fläche F_1 berühren, was nur möglich ist, wenn F und F_1 zusammenfallen.

Nimmt man in ε_2 — wie vorhin in ε — zwei beliebige Punkte als Mittelpunkte zweier die Fläche F umhüllender Kegelflächen und eine beliebige berührende Ebene von F als Träger eines ebenen Systemes Σ_3 an, so ist nun leicht einzusehen, dass Σ_3 derart auf Σ_2 bezogen werden kann, dass Σ_2 und Σ_3 die Fläche F erzeugen.

Diese Untersuchung zeigt auch, dass F durch k, k_1 und die berührende Ebene ε_2 vollkommen bestimmt wird.

Ganz dieselben Resultate würden sich ergeben haben, wenn wir angenommen hätten, dass k und k_1 von einer Ebene längs einer geraden Erzeugenden gemeinschaftlich berührt werden.

Es gelten demnach folgende Sätze, welche den sich auf Flächen zweiter Ordnung beziehenden Sätzen 2 und 3 dieses Abschnittes analog sind:

6. **Je zwei tangirende Ebenen einer Fläche zweiter Classe können als Träger von Systemen angenommen werden, welche die Fläche erzeugen. Diese beiden Systeme lassen sich auf unendlich viele Arten reciprok auf einander beziehen.**

7. **Eine Fläche zweiter Classe ist durch zwei nicht concentrische Kegelflächen zweiter Ordnung k und k_1, welche sich entweder nur in zwei Punkten, oder längs einer geraden Erzeugenden berühren, und durch eine berührende Ebene, welche keine der Kegelflächen k und k_1 tangirt, vollkommen bestimmt.**

Der zweite Theil des ersten Satzes wird klar, wenn man berücksichtigt, dass der Punkt P (Fig. 80), welchem die Gerade p als entsprechend zugewiesen wurde, irgendwo in m angenommen werden kann.

Wir beweisen nun zunächst, dass Flächen zweiter Ordnung und Flächen zweiter Classe identisch sind. Um diesen Beweis herzustellen, leiten wir vorerst einen wichtigen Satz ab, der sich auf Flächen zweiter Ordnung bezieht.

Ist K irgend ein ebener Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung F und heissen ABC drei beliebige Punkte von K, so schneiden sich die drei Ebenen, welche F in ABC berühren, in einem Punkte, den wir P nennen wollen. Die Ebene von K bezeichnen wir durch π. Legt man durch A, B und P eine Ebene α und heisst der Schnitt von α mit der Fläche zweiter Ordnung K_1, so müssen, wie leicht einzusehen, die in den Punkten A und B an K_1 gezogenen Tangenten

im Punkte P zusammentreffen. Zieht man durch P eine beliebige in α gelegene Gerade g, welche die Fläche F, also auch K_1 in den Punkten M und N schneidet, so bilden die Punkte M, N, P und der Schnittpunkt O der Geraden g mit der Ebene π eine harmonische Punktreihe (Satz 29, 2. Abschnitt). Wird nun durch g und den Punkt C eine Ebene gelegt, welche F in der Curve K_2 schneidet, und bezeichnet man den zweiten Schnittpunkt von K und K_2 durch D, so müssen sich die an K_2 in den Punkten C und D gezogenen Tangenten im Punkte P treffen. Dass die Tangente in C durch P geht, folgt aus dem Umstande, dass die in C berührende Ebene unseren Voraussetzungen gemäss den Punkt P enthält. Denkt man sich aus P eine zweite Tangente an K_2 gezogen, welche K_2 in D' berührt, so ist CD' die Polare von P in Bezug auf K_2 und schneidet g in einem Punkte O', der mit M, N, P eine harmonische Reihe bildet. Dies ist jedoch nur möglich, wenn O und O' zusammenfallen, weil ja auch die Reihe $MNOP$ harmonisch ist. Wenn nun O mit O' coincidirt, so fällt auch D mit D' zusammen, d. h. eine der aus P an K_2 gezogenen Tangenten berührt die Fläche zweiter Ordnung in einem Punkte D der Curve K. Nachdem aber die durch P gehende Gerade g beliebig in α gewählt wurde und durch Veränderung der Lage von g der Punkt D nach und nach die ganze Curve K durchläuft, so müssen die Berührungspunkte aller aus P an die Fläche F gezogener Tangenten in der Curve K liegen und alle in den Punkten von K an F berührend gelegten Ebenen durch ein und denselben Punkt P gehen.

Nimmt man an P sei irgend ein beliebiger Punkt, von welchem aus sich tangirende Ebenen an die Fläche zweiter Ordnung legen lassen, so ist nun leicht einzusehen, dass die Berührungspunkte aller aus P an die Fläche berührend gelegter Ebenen auf einem Kegelschnitte K liegen. K wird erhalten, indem man aus P drei beliebige berührende Ebenen legt und die Fläche durch jene Ebene schneidet, welche die drei Berührungspunkte dieser Ebenen enthält.

Wir können nun den Satz aufstellen:

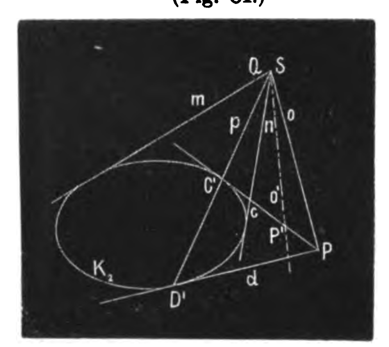
8. Sämmtliche Ebenen, welche eine Fläche zweiter Ordnung in den Punkten eines ebenen Schnittes derselben berühren, gehen durch einen bestimmten Punkt und die Berührungspunkte sämmtlicher Ebenen oder Geraden, welche aus irgend einem bestimmten Punkte an eine Fläche zweiter Ordnung berührend gelegt werden können, befinden sich auf einer ebenen Curve, nämlich auf einem Kegelschnitte.

Ganz dieselben Beziehungen lassen sich für Flächen zweiter Classe nachweisen.

P sei der Mittelpunkt irgend einer Kegelfläche k, welche eine Fläche zweiter Classe F umhüllt, A, B, C nennen wir die Berührungspunkte von F mit irgend drei Berührungsebenen der Kegelfläche k, und π heisse die durch

A, B, C bestimmte Ebene. Letztere schneidet k in einer Curve zweiter Ordnung (Satz 5, 4. Abschnitt), welche wir K nennen. In den Punkten A und B ziehen wir je eine Tangente an K, bezeichnen den Schnittpunkt dieser Tangenten durch Q und heissen jene Kegelfläche, welche ihre Spitze in Q hat und die Fläche F umhüllt k_1. Wird nun in der Ebene π irgend eine durch Q gehende Gerade g gezogen und legt man aus g berührende Ebenen μ, ν an F (also auch an k_1), so bilden die Ebenen μ, ν, π und die durch P und g bestimmte Ebene ω einen harmonischen Ebenenbüschel, wie man leicht einsieht, wenn man sich k_1, den in Rede stehenden Ebenenbüschel und die Kegelfläche k durch die Ebene ABP geschnitten denkt. Legt man im Punkte C an F (also auch an k) eine berührende Ebene γ, welche g im Punkte R schneidet, und betrachtet man R als Spitze einer dritten die Fläche F umhüllenden Kegelfläche k_2, so wird letztere von den Ebenen μ und ν berührt, weil die Spitze R in der Durchschnittslinie g von μ und ν gelegen ist. Werden nun durch die Gerade PR tangirende Ebenen an die Fläche F gelegt, so müssen die Berührungspunkte C und D dieser Ebenen in π liegen. Dass der Berührungspunkt C der einen Ebene sich in π befindet, bedarf keines Beweises, nachdem unseren Voraussetzungen gemäss sowohl P als auch R der die Fläche in C berührenden Ebene γ angehören. Es ist also noch zu zeigen, dass auch der Berührungspunkt D der zweiten aus PR an F berührend gelegten Ebene δ in π liegen muss. Zu diesem Zwecke denken wir uns durch P und Q irgend eine Ebene φ gelegt. Die Curve zweiter Ordnung, welche sich als Schnitt von k_2 mit dieser Ebene ergibt, nennen wir K_2 (Fig. 81). Die Durchschnittslinien von φ mit den Ebenen $\gamma\delta\mu\nu\omega$ und π heissen wir beziehungsweise $cdmnop$ und die Punkte, in welchen p die Curve K_2 trifft, seien C' und D'. Die in Q sich schneidenden Geraden $mnop$ bilden einen harmonischen Strahlenbüschel S, nachdem S ein Schnitt des harmonischen Ebenenbüschels $\mu\nu\omega\pi$ ist. Zwei Strahlen von S, nämlich m und n berühren K_2 und der Strahl o enthält den Punkt P. Die Gerade c tangirt die Curve K_2 in C', denn als Schnittlinie von φ mit der Berührungsebene γ der Kegelfläche k_2 muss sie eine Tangente von K_2 sein, und der Berührungspunkt dieser Tangente fällt mit C' zusammen, weil die gerade Erzeugende, in welcher γ die Fläche k_2 berührt, der Ebene π angehört. Dass auch d die Curve K_2 berührt ist leicht einzusehen. Wir haben jetzt nur mehr nachzuweisen, dass D' der Berührungspunkt von d mit K_2 sein muss. Denn hieraus kann dann geschlossen werden, dass die Berührungslinie von δ und k_2 in π liegt, also auch der Berührungspunkt D von δ und F der Ebene π angehört. Zieht man in D' eine Tangente an K_2, so erhält man im Schnittpunkte


(Fig. 81.)



P' derselben mit c den Pol der Geraden p in Bezug auf K_2 und die Gerade o', welche durch P' und Q bestimmt wird, bildet mit mnp einen harmonischen Strahlenbüschel. Nun ist aber auch der Büschel $mnop$ harmonisch, daher fällt o mit o' und P mit P' zusammen. Eine der aus P gezogenen Tangenten berührt demnach K_2 in D', woraus folgt, dass der Berührungspunkt D der aus PR an F berührend gelegten Ebene δ in π liegt.

Verändert man die Lage der durch Q in der Ebene π gezogenen Geraden g, so erhält man andere Punkte R, also auch andere berührende Ebenen δ. Für alle möglichen Geraden g ergeben sich alle möglichen tangirenden Ebenen δ und die Berührungspunkte D aller dieser Ebenen liegen in ein und derselben Ebene π. Diese Ebene schneidet demnach die Kegelfläche zweiter Ordnung k und die Fläche F in derselben Curve K, wir können also behaupten, dass die Berührungspunkte aller aus ein und demselben Punkte P an eine Fläche zweiter Classe berührend gelegter Ebenen oder Geraden in einer Curve zweiter Ordnung liegen.

Betrachtet man die Ebene π als eine beliebig gewählte, so ist leicht einzusehen, dass sämmtliche Ebenen, welche eine Fläche zweiter Classe in den Punkten eines ebenen Schnittes derselben berühren, durch einen bestimmten Punkt gehen, dass also, nachdem die von solchen Berührungsebenen umhüllte Fläche eine Kegelfläche zweiter Ordnung ist (Satz 5, 4. Abschnitt), jeder ebene Schnitt einer Fläche zweiter Classe eine Curve zweiter Ordnung sein muss.

Vergleicht man diese Resultate mit obigem Satze 8, so zeigt sich, dass der letztere auch Geltung hat, wenn in demselben statt Fläche zweiter Ordnung, Fläche zweiter Classe gesetzt wird.

Es fällt nun nicht schwer die Identität der Flächen zweiter Ordnung und der Flächen zweiter Classe nachzuweisen.

k und k_1 seien irgend zwei eine Fläche zweiter Classe F umhüllende Kegelflächen, welche von zwei Ebenen gemeinschaftlich berührt werden, K und K_1 seien die Kegelschnitte, in denen k und k_1 die Fläche F berühren, α nennen wir ferner irgend eine berührende Ebene von F, welche nicht auch k oder k_1 berührt, und A den Berührungspunkt von α. Durch k, k_1 und die Ebene α wird F vollkommen bestimmt (Satz 7), während die Curven K, K_1 und der Punkt A eine Fläche zweiter Ordnung bestimmen (Satz 3), welche wir F_1 nennen wollen. Dass F und F_1 identisch sind geht aus Folgendem hervor. P sei irgend ein Punkt von F; durch P und A legen wir irgend eine Ebene π, welche die Curven K und K_1 schneidet. Die vier Schnittpunkte von π mit K und K_1, sowie der Punkt A bestimmen einen auf der Fläche F gelegenen Kegelschnitt K_3, der den Punkt P in sich enthält. Wir können nun annehmen, K, K_1 und der Punkt A liegen auf der Fläche zweiter Ordnung F_1. Diese Fläche wird von π ebenfalls in einer Curve zweiter Ordnung K'_3 geschnitten, welche

mit der Curve K_3 identisch sein muss, nachdem K_3 und K'_3 die vier Schnittpunkte von π mit K, K_1 und den Punkt A gemein haben. Hieraus folgt, dass der beliebig gewählte Punkt P der Fläche zweiter Classe F auch der Fläche zweiter Ordnung F_1 angehört, dass also alle Punkte von F in F_1 liegen, was nur möglich ist, wenn F und F_1 identisch sind. Da nun vorausgesetzt wurde, F sei eine ganz beliebige Fläche zweiter Classe, so kann man schliessen, dass jede Fläche zweiter Classe eine Fläche zweiter Ordnung ist.

Um zu zeigen, dass auch jede Fläche zweiter Ordnung eine Fläche zweiter Classe sein muss, nehmen wir an, K und K_1 seien irgend zwei auf einer Fläche zweiter Ordnung F_1 gelegene Kegelschnitte, welche sich in zwei Punkten schneiden; k und k_1 nennen wir jene zwei die Fläche F_1 umhüllenden Kegelflächen, deren Berührungslinien mit F_1 beziehungsweise K und K_1 sind, M sei irgend ein ausserhalb K und K_1 gelegener Punkt von F_1 und μ jene Ebene, welche F_1 in M tangirt. Durch K, K_1 und M ist die Fläche F_1 vollkommen bestimmt, während k, k_1 und die Ebene μ eine Fläche zweiter Classe bestimmen, die wir F heissen wollen. Dass F und F_1 identisch sind, lässt sich auf ganz dieselbe Art zeigen, wie vorhin gezeigt wurde, dass alle Punkte von F in F_1 liegen. Wir können also behaupten, dass jede Fläche zweiter Ordnung auch eine Fläche zweiter Classe ist, woraus folgt, nachdem auch jede Fläche zweiter Classe eine Fläche zweiter Ordnung sein muss, dass die Flächen zweiter Ordnung und jene zweiter Classe identisch sind.*)

Es gelten somit alle Sätze, welche für Flächen zweiter Ordnung aufgestellt wurden, auch für Flächen zweiter Classe und umgekehrt.

b) Erzeugung der Regelflächen zweiter Ordnung durch Grundgebilde der ersten Stufe.

Die Regelflächen zweiter Ordnung können, wie wir nun zeigen wollen, auch durch projectivische Grundgebilde der ersten Stufe erzeugt werden.

Nehmen wir an, R und R_1 seien irgend zwei projectivische Punktreihen deren Träger nicht in derselben Ebene liegen. Durch $ABC \dots$ bezeichnen wir die Punkte von R und durch $A_1 B_1 C_1 \dots$ die diesen Punkten entsprechenden Elemente von R_1. Die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten nennen wir Projectionsstrahlen. Nachdem man sich R und R_1 durch gleichzeitige stetige Bewegung zweier Punkte entstanden denken kann, welche in jedem bestimmten Momente mit zwei entsprechenden Punkten von R und R_1 coincidiren, so folgen die Projectionsstrahlen ebenfalls stetig auf einander und ihre Gesammtheit bildet eine Fläche F, die zur Gattung der Regelflächen gehört.

*) Im allgemeinen ist eine Fläche n^{ter} Ordnung von der $n(n-1)^2$ Classe.

Sie wird ein Erzeugniss der zwei Punktreihen R und R_1 genannt. Der Schnitt dieser Fläche mit irgend einer Ebene ε ist eine Curve zweiter Ordnung, wie sich aus Folgendem ergibt. Den Träger von R denken wir uns als Axe eines Ebenenbüschels E, der gegen R_1 perspectivisch liegt, und den Träger von R_1 als Axe eines Ebenenbüschels E_1, der gegen R perspectivisch gelegen ist. Diese beiden Büschel sind projectivisch. Einer Ebene RA_1 in E entspricht die Ebene R_1A in E_1 und je zwei solche entsprechende Ebenen schneiden sich in einem Projectionsstrahle AA_1. Die Fläche F kann somit auch als ein Erzeugniss der zwei Ebenenbüschel E, E_1 betrachtet werden Die beliebig angenommene Ebene ε schneidet E und E_1 in zwei projectivischen Strahlenbüscheln S und S_1, welche einen Kegelschnitt erzeugen. Dieser Kegelschnitt liegt auf der Fläche F, nachdem die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Strahlen der Büschel S und S_1 auch Punkte des Schnittes von je zwei entsprechenden Ebenen der Büschel E und E_1 sein müssen. Jede Ebene schneidet demnach die Fläche F in einem Kegelschnitte, woraus folgt, dass diese Fläche von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.

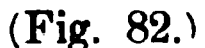
Dass das Erzeugniss irgend zweier projectivischer Ebenenbüschel E und E_1, deren Axen sich nicht schneiden, immer auch als ein Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen R und R_1 betrachtet werden kann, deren Träger die Axen der beiden Ebenenbüschel bilden, ist nun leicht einzusehen. Entsprechende Punkte dieser Reihen sind je zwei Punkte, welche in entsprechenden Ebenen von E und E_1 liegen. Wir können also sagen: Jene Flächen, welche durch zwei projectivische, sich nicht schneidende Punktreihen erzeugt werden, und jene Flächen, welche durch zwei projectivische Ebenenbüschel zu Stande kommen, deren Axen sich nicht schneiden, sind identisch.

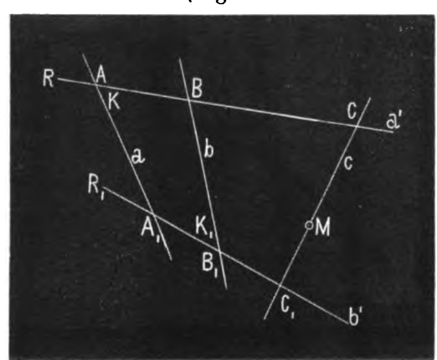
Schneiden sich die Axen zweier projectivischer Ebenenbüschel E, E_1, so ist das Erzeugniss von E und E_1 eine Kegelfläche zweiter Ordnung. Denn alle Durchschnittslinien von je zwei entsprechenden Ebenen treffen im Schnittpunkte der Axen zusammen und irgend eine beliebige Ebene ε schneidet die erzeugte Fläche in einer Curve zweiter Ordnung, nämlich in dem Erzeugnisse jener zwei Strahlenbüschel, welche sich als Schnitte von ε mit E und E_1 ergeben.

Bevor wir die durch projectivische Punktreihen oder Ebenenbüschel erzeugten Flächen näher untersuchen, bemerken wir, dass ausser diesen keine anderen Flächen durch Grundgebilde der ersten Stufe erzeugt werden können. Es sind hier sechs Fälle denkbar. Als erzeugende Gebilde kann man annehmen: 1. Zwei Punktreihen. 2. Eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel. 3. Eine Punktreihe und einen Ebenenbüschel. 4. Zwei Strahlenbüschel. 5. Einen Strahlenbüschel und einen Ebenenbüschel. 6. Zwei Ebenenbüschel. Dass die Erzeugnisse in den Fällen 1 und 6 identisch sind, wenn man voraussetzt, dass

die Axen der Ebenenbüschel sich nicht schneiden, wurde bereits nachgewiesen. In den Fällen 3, 4 und 5 kann das Erzeugniss keine Fläche sein, wie man sich leicht überzeugt. Im Falle 2 ist das Erzeugniss im allgemeinen eine Kegelfläche zweiter Ordnung. Heisst nämlich die Punktreihe R und der Strahlenbüschel S, von welchem wir annehmen, dass seine Ebene die Reihe R nicht enthält, so gehen alle Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Elemente der Reihe und des Büschels bestimmt werden, durch den Mittelpunkt M von S und alle diese Ebenen umhüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung, wie leicht einzusehen, wenn man sich durch R irgend eine Ebene s gelegt denkt, welche den Mittelpunkt M nicht enthält. Die Ebene s schneidet den Büschel S in einer Punktreihe R_1, welche mit R projectivisch verwandt ist. Die Projectionsstrahlen von R und R_1 umhüllen aber einen Kegelschnitt und da jeder Projectionsstrahl den Durchschnitt von s mit einer der Ebenen bildet, welche durch entsprechende Elemente von R und S bestimmt werden, so erscheint unsere Behauptung, dass R und S eine Kegelfläche zweiter Ordnung erzeugen, gerechtfertigt.

Von den erwähnten sechs Fällen haben wir also nur den ersten und letzten in Betracht zu ziehen. Zunächst weisen wir nach, dass die Fläche, welche durch zwei sich nicht schneidende Punktreihen R und R_1 (Fig. 82) erzeugt wird, eine Fläche zweiter Ordnung ist. Die Träger der beiden Reihen nennen wir $a'b'$, irgend drei Projectionsstrahlen abc und die in letzteren befindlichen Punkte von R und R_1, beziehungsweise ABC und $A_1B_1C_1$. In dem Punkte A schneiden sich a und a', im Punkte B_1 die Geraden b und b'. Die Geraden aa' sowohl, als auch die Geraden bb' kann man daher als einen Kegelschnitt betrachten. Den einen, aus a und a' bestehenden, nennen wir K, den anderen, welcher durch b und b' gebildet wird, K_1.


(Fig. 82.)



Diese beiden Kegelschnitte liegen in verschiedenen Ebenen, wie aus dem Umstande folgt, dass die Träger von R und R_1, nämlich a' und b' sich nicht schneiden. Doch haben K und K_1 die Punkte A_1 und B gemein, sie entsprechen also den Bedingungen, welche die im Satze 3, 4. Abschnitt, erwähnten Kegelschnitte erfüllen sollen. Ist M ein beliebiger Punkt in c, welcher nicht auch den erzeugenden Reihen angehört, so kann M weder in der Ebene von K, noch in der Ebene von K_1 liegen. Denn würde sich M in der Ebene von K befinden, so müssten a und c, also auch a' und b' derselben Ebene angehören, was gegen die Voraussetzung ist, und würde M in der Ebene von K_1 liegen, so müssten sich b und c, also auch a' und b' schneiden. Die Kegelschnitte K und K_1, sowie der Punkt M haben daher jene gegenseititige Lage, welche nach Satz 3 erforderlich

ist, damit eine Fläche zweiter Ordnung durch zwei Kegelschnitte und einen Punkt vollkommen bestimmt werde. Wir können also annehmen, durch die Geraden $aba'b'$ und den Punkt M sei eine Fläche zweiter Ordnung F bestimmt. Dass diese Fläche mit dem Erzeugnisse F_1 der gegebenen Punktreihen R und R_1 identisch sein muss, ist nun leicht nachzuweisen. Legt man durch M irgend eine Ebene ε, welche K und K_1 in vier Punkten schneidet, so wird sowohl F, als auch F_1 in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten. Diese beiden Curven fallen aber zusammen, nachdem sie fünf Punkte, nämlich die erwähnten vier Schnittpunkte von ε mit K und K_1 und den Punkt M gemein haben. Daraus folgt, dass F und F_1 identisch sein müssen Mit Rücksicht auf die obigen Resultate können wir nun den Satz aufstellen:

9. Das Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen, deren Träger sich nicht schneiden, sowie auch das Erzeugniss zweier projectivischer Ebenenbüschel ist eine Regelfläche zweiter Ordnung.

Von den sämmtlichen Projectionsstrahlen abc .... liegen keine zwei in ein und derselben Ebene, denn würden z. B. a und b derselben Ebene angehören, so müssten auch die Punkte ABA_1B_1, also auch a' und b' in derselben Ebene gelegen sein. Es ist aber bereits gezeigt worden, dass jede Ebene, welche eine Fläche zweiter Ordnung in einer Geraden schneidet, mit der Fläche immer noch eine zweite Gerade gemein hat, wenn die Fläche keine Kegelfläche ist. Daher muss es ausser den Geraden abc .... noch andere, und zwar unendlich viele Gerade geben, welche dem Erzeugnisse von R und R_1 angehören. In anderer Weise lässt sich dies auf folgende Art zeigen.

abc seien drei beliebige Projectionsstrahlen und M ein beliebiger Punkt von c. Durch M und die Gerade b denken wir uns eine Ebene gelegt, deren Schnittpunkt mit a wir N nennen. Die Gerade MN schneidet dann alle drei Projectionsstrahlen a, b und c. Legt man nun durch MN und die Punkte der Reihe R Ebenen, so bilden letztere einen Ebenenbüschel E, welcher die Gerade b' nach Satz 64, 1. Abschnitt, in einer mit R projectivisch verwandten Punktreihe R' schneidet. Diese Reihe ist aber identisch mit R_1, denn R' ist projectivisch mit R, also auch mit R_1 und hat die drei Punkte $A_1B_1C_1$ mit R_1 entsprechend gemein. Jede Ebene des Büschels E schneidet demnach a' und b' in entsprechenden Punkten der Reihen R und R_1 und die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte sind Projectionsstrahlen von R und R_1. Ist δ irgend eine Ebene des Büschels E, welche a' in D und b' in D' trifft, so schneidet die Gerade DD' die drei Geraden a', MN und b'. Die Gerade DD' kann nun als ein ganz beliebiger Projectionsstrahl angesehen werden, wir können daher schliessen, dass sämmtliche Projectionstrahlen die Gerade MN schneiden, dass also MN ganz auf der durch R, R_1 erzeugten Fläche F liegt. Nun ist aber MN eine beliebige Gerade, welche die drei Projectionsstrahlen abc schneidet, folglich gilt für jede andere, diese drei Strahlen schneidende Gerade dasselbe wie für MN,

nämlich es müssen alle diese Geraden ganz auf der Fläche F gelegen sein. Von denselben können sich keine zwei schneiden, denn würde dies der Fall sein, so müssten, wie leicht einzusehen, auch a, b und c, folglich auch R und R_1 in derselben Ebene liegen, was gegen die Voraussetzung ist. Jede Gerade MN schneidet aber sämmtliche Projectionsstrahlen und umgekehrt schneidet jeder Projectionsstrahl sämmtliche Geraden MN. Die letzteren bilden eine stetige Aufeinanderfolge; denn wenn man M nur um unendlich wenig in c verschiebt, so ändert auch der Schnittpunkt der Ebene Mb mit a seine Lage nur unendlich wenig. Man kann demnach die sämmtlichen Geraden, welche alle Projectionsstrahlen schneiden, als ein System von geraden Erzeugenden der Regelfläche F betrachten. Ein anderes System von geraden Erzeugenden derselben Fläche bilden, wie bereits bemerkt, die Projectionsstrahlen.

Die Gesammtheit der Geraden, welche zu ein und demselben Systeme gehören, nennt man eine Schaar. Jede der zwei Schaaren ist durch drei Gerade der andern Schaar vollkommen bestimmt, wie man leicht einsieht; es erscheint daher auch die Regelfläche F vollkommen bestimmt, sobald irgend drei Gerade ein und derselben Schaar gegeben sind.

Nimmt man eine von den drei gegebenen Geraden abc, etwa c, als Axe eines Ebenenbüschels E an, ermittelt die Durchschnittspunkte einer beliebigen Ebene des letzteren mit a und b und verbindet diese Schnittpunkte, so erhält man eine Gerade der Schaar, welcher abc nicht angehören. Nachdem nun a und b von dem Ebenenbüschel E in projectivischen Punktreihen geschnitten werden, so kann man behaupten, dass die Geraden einer Schaar alle Geraden der anderen Schaar in projectivischen Punktreihen schneiden und dass also irgend zwei Gerade, welche derselben Schaar angehören, als Träger von zwei die Regelfläche erzeugenden Punktreihen betrachtet werden können.

Bereits im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, dass durch jeden Punkt einer Regelfläche zweiter Ordnung, welche weder eine Kegelfläche ist, noch aus zwei Ebenen besteht, zwei aber nicht mehr gerade Erzeugende gehen, dass ferner jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugende, also auch noch durch eine zweite geht, die Fläche im Schnittpunkte dieser beiden Geraden berührt und dass umgekehrt jede berührende Ebene die Fläche in zwei geraden Erzeugenden schneidet. Ersteres folgt, von unserem jetzigen Standpunkte betrachtet, aus dem Umstande, dass keine zwei derselben Schaar angehörige Gerade sich treffen, aber jede Gerade der einen Schaar alle Geraden der anderen Schaar schneiden muss.

Dass die durch zwei sich nicht schneidende projectivische Reihen erzeugte Fläche nur ein einfaches Hyperboloid, oder ein hyperbolisches Paraboloid sein kann, bedarf mit Rücksicht auf die vorausgegangenen Erklärungen keines Beweises mehr.

Als Resultat der eben durchgeführten Untersuchung ergibt sich folgender Satz:

10. Jede Regelfläche zweiter Ordnung, ausgenommen die Kegel- und Cilinderfläche, oder das System von zwei Ebenen, enthält zwei Schaaren von Geraden, welche eine derartige Lage haben, dass keine zwei, derselben Schaar angehörige Geraden sich schneiden, aber jede Gerade der einen Schaar alle Geraden der anderen schneidet und durch jeden Punkt der Fläche zwei, aber nicht mehr Gerade gehen. Je zwei Gerade der einen Schaar werden durch die Geraden der anderen Schaar in projectivischen Punktreihen geschnitten. Durch drei Gerade, von denen keine zwei sich schneiden, ist eine Regelfläche vollkommen bestimmt; sie kann durch eine Gerade entstanden gedacht werden, welche an den drei gegebenen Geraden hingleitet.

Bezüglich der berührenden Ebenen gilt folgender Satz, welcher eigentlich nur in einer bestimmteren Form ausdrückt, was bereits im Satze 4 dieses Abschnittes ausgesprochen ist:

11. Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugende einer Regelfläche zweiter Ordnung geht, die weder eine Kegelfläche ist, noch aus zwei Ebenen besteht, schneidet die Fläche noch in einer zweiten Geraden und berührt die Fläche im Schnittpunkte dieser Geraden. Umgekehrt wird jede solche Fläche von jeder dieselbe berührenden Ebene in zwei Geraden geschnitten, welche durch den Berührungspunkt gehen.

Sind die zwei eine Regelfläche zweiter Ordnung erzeugenden Punktreihen R und R_1 ähnlich, so liegt der Projectionsstrahl, welcher die unendlich fernen Punkte von R und R_1 verbindet, in der unendlich fernen Ebene. Diese Ebene schneidet also die Regelfläche in einer geraden Erzeugenden, daher hat sie noch eine zweite Gerade mit der Fläche gemein und berührt die letztere. Unseren im vorigen Kapitel gegebenen Erklärungen zufolge ist dann die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. Wir können somit sagen:

12. Zwei sich nicht schneidende projectivische Punktreihen erzeugen entweder ein einfaches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid je nachdem die Reihen nicht ähnlich oder ähnlich sind.

Dass die Regelfläche, welche durch zwei ähnliche Punktreihen R und R_1 erzeugt wird, mit der unendlich fernen Ebene nicht bloss einen Projectionsstrahl dieser Reihen, sondern noch eine zweite Gerade gemein hat, lässt sich auch wie folgt nachweisen. Die Träger der erzeugenden Reihen nennen wir a', b', irgend zwei Projectionsstrahlen seien a, b, der unendlich ferne Projections-

strahl heisse u und die erzeugte Fläche F. Nach obigem Satze 10 kommt F auch durch eine Gerade zu Stande, welche längs den drei Geraden a, b, u hingleitet. Sämmtliche Gerade, welche a, b, u schneiden, bilden eine der zwei Schaaren von Geraden, die in F enthalten sind. Alle diese Geraden müssen zu ein und derselben Ebene parallel sein, nämlich zu irgend einer Ebene π, welche die Gerade u enthält, nachdem jede solche Gerade die Ebene π erst in unendlicher Entfernung trifft. Legt man durch jede Gerade, welche sämmtliche Projectionsstrahlen schneidet, eine durch u gehende Ebene, so sind alle diese Ebenen unter einander parallel, bilden also einen Parallel-Ebenenbüschel und schneiden je zwei Projectionsstrahlen in ähnlichen Punktreihen (Satz 63, 1. Abschnitt). Hieraus folgt, dass je zwei Projectionsstrahlen durch jene Schaar, zu der a' und b' gehören, in ähnlichen Punktreihen geschnitten werden. Wählt man nun zwei Reihen, deren Träger zwei beliebige Projectionsstrahlen bilden, als erzeugende Reihen der Fläche F, so ergibt sich als Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte dieser Reihen, weil letztere, wie eben gezeigt wurde ähnlich sind, eine zweite unendlich ferne Gerade u_1 der in Rede stehenden Fläche. Die unendlich ferne Ebene hat also mit jeder durch ähnliche Punktreihen erzeugten Regelfläche zweiter Ordnung zwei Gerade gemein, woraus folgt, dass diese Fläche ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Aus der eben durchgeführten Untersuchung ergibt sich auch, dass alle Geraden, welche derselben Schaar eines hyperbolischen Paraboloides angehören. zu ein und derselben Ebene parallel sind. Für die Schaar, welcher a' und b' angehören, wurde dies bereits bemerkt; dass es auch für die aus den Projectionsstrahlen von R und R_1 gebildete Schaar gilt, ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass jede Gerade dieser Schaar die gerade Erzeugende u_1 schneiden muss und dass irgend eine durch u_1 gehende Ebene jeden Projectionsstrahl erst in unendlicher Entfernung trifft. Es gilt somit der Satz:

13. Sämmtliche gerade Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloides, welche derselben Schaar angehören, sind parallel zu ein und derselben Ebene.

Jede Ebene, zu welcher sämmtliche Gerade einer Schaar eines hyperbolischen Paraboloides parallel sind, wird eine Richtebene oder auch eine Asymptotenebene genannt. Letztere Benennung findet ihre Rechtfertigung in dem Umstande, dass jede solche Ebene die Fläche in einem unendlich fernen Punkte berührt, nämlich im Schnittpunkte der Geraden u oder u_1 mit der zweiten geraden Erzeugenden, die in der Ebene gelegen ist.

Wenn die Richtebene der zwei Schaaren von geraden Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides auf einander senkrecht stehen, so wird die Fläche ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid genannt.

Der nachstehende Satz bedarf nun mit Rücksicht auf obige Untersuchung keines Beweises mehr:

14. **Je zwei Gerade der einen Schaar eines hyperbolischen Paraboloides werden durch die andere Schaar in ähnlichen Punktreihen geschnitten.**

Auch ist leicht einzusehen, dass ein hyperbolisches Paraboloid durch zwei sich nicht schneidende Gerade und eine diese letzteren schneidende Ebene, welche als Richtebene angenommen wird, vollkommen bestimmt ist.

Um einzelne gerade Erzeugende der Fläche zu erhalten, schneidet man die beiden gegebenen Geraden durch Ebenen, welche zur gegebenen Ebene parallel sind, und verbindet die so erhaltenen Schnittpunkte durch gerade Linien.

Durch drei beliebige Gerade, welche derselben Ebene parallel sind, wird ein hyperbolisches Paraboloid gleichfalls vollkommen bestimmt. Lässt man längs der drei gegebenen Geraden abc eine vierte Gerade a' hingleiten, so beschreibt letztere eine Regelfläche zweiter Ordnung (Satz 10, 4. Abschnitt). Irgend eine Lage der beweglichen Geraden a' wird erhalten, indem man etwa durch a eine beliebige Ebene π legt und die Schnittpunkte von π mit b und c durch eine Gerade verbindet. Alle durch a gehenden Ebenen π bilden nun einen Ebenenbüschel E, in welchem eine Ebene parallel zu b und c ist, daher werden b und c durch E in ähnlichen Punktreihen geschnitten (Vergleiche Satz 62, 1. Abschnitt), woraus folgt, dass die durch a' beschriebene Fläche ein hyperbolisches Paraboloid sein muss.

15. **Werden durch irgend einen Punkt zu allen geraden Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung parallele Gerade gezogen, so bilden die letzteren eine Kegelfläche zweiter Ordnung, oder ein System von zwei Ebenen, je nachdem die Regelfläche ein einfaches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid ist.**

Um sich hievon zu überzeugen, hat man nur zu berücksichtigen, dass ein einfaches Hyperboloid von der unendlich fernen Ebene in einem Kegelschnitte, das hyperbolische Paraboloid aber in zwei Geraden geschnitten wird und dass jede durch den bestimmten Punkt gehende Parallele einen Punkt dieses unendlich fernen Schnittes enthält.

Aus dem Umstande, dass je zwei Gerade derselben Schaar einer Regelfläche zweiter Ordnung als Träger von die Fläche erzeugenden Reihen angenommen werden können lässt sich leicht schliessen, dass im allgemeinen zu jeder Geraden der einen Schaar eine, aber auch nur eine Gerade der anderen Schaar parallel läuft. Sind nämlich a' und b' irgend zwei Gerade, welche derselben Schaar angehören, heissen R und R_1 die Reihen, deren Träger a' und b' bilden, und ist G der Gegenpunkt der Reihe R, so muss die Gerade, welche durch G parallel zu R_1 gezogen wird, ein Projectionsstrahl, also eine zu b' parallele gerade Erzeugende der Fläche sein. Liegt G unendlich ferne, so gehört

der durch G gehende Projectionsstrahl der unendlich fernen Ebene an, weil ja dem Punkte G ein ebenfalls unendlich ferner Punkt entspricht. Die Reihen R und R_1 sind dann ähnlich und erzeugen ein hyperbolisches Paraboloid. Diese Bemerkungen dürften nachstehenden Satz genügend rechtfertigen:

16. Jede gerade Erzeugende der einen Schaar eines einfachen Hyperboloides ist parallel zu einer, aber auch nur zu einer Geraden der anderen Schaar. Unter den geraden Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides sind keine zwei zu einander parallel.

c) Polar-Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung.

F sei irgend eine Fläche zweiter Ordnung, P ein beliebiger Punkt des Raumes und ε eine beliebige, durch P gehende Ebene, welche F in der Curve zweiter Ordnung K schneidet. Die Polare des Punktes P in Bezug auf K nennen wir p. Legt man durch P irgend eine zweite Ebene ε_1, welche F in einem Kegelschnitte K_1 schneidet, der K in den Punkten M und N trifft, so ist leicht einzusehen, dass die Polare p_1 des Punktes P in Bezug auf K_1 die Gerade p schneiden muss und zwar in jenem Punkte O, welcher von P durch M und N harmonisch getrennt wird. Durch p und p_1 lässt sich somit eine Ebene legen. Diese Ebene nennen wir π. Zieht man eine beliebige durch P gehende Secante der Fläche F, heissen die Schnittpunkte derselben mit der Fläche $M'N'$ und bezeichnet man ihren Schnittpunkt mit der Ebene π durch O', so bilden die vier Punkte $M'N'O'P$ eine harmonische Reihe. Dies ist leicht einzusehen, wenn man sich durch die Secante $M'N'$ irgend eine die Fläche F jedenfalls schneidende Ebene α gelegt denkt. Der Durchschnitt p_2 von α und π ist nämlich die Polare des Punktes P in Bezug auf die Curve zweiter Ordnung K_2, welche die Ebene α mit der Fläche F gemein hat, nachdem die zwei Sehnen der Curve K_2, welche P mit den Schnittpunkten von p, p_2 und p_1, p_2 verbinden, durch diese Schnittpunkte und den Punkt P harmonisch getheilt werden. Der Punkt O' ist nun der Durchschnittspunkt einer beliebigen durch P gehenden Secante der Fläche F, daher muss für die Schnittpunkte jeder solchen Secante mit der Ebene π dasselbe gelten, was bezüglich O' nachgewiesen wurde. Wir können also sagen:

Werden durch irgend einen Punkt P beliebig viele Secanten einer Fläche zweiter Ordnung gezogen, und bestimmt man in jeder dieser Secanten jenen Punkt, der von P durch die Schnittpunkte der Secante harmonisch getrennt wird, so liegen alle dadurch erhaltenen Punkte in ein und derselben Ebene.

Diese Ebene π wird die Polarebene des Punktes P und der letztere der Pol der Ebene π in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung genannt.

Demnach gilt der Satz:

17. **Pol und Polarebene theilen jede durch ersteren gehende Sehne der Fläche zweiter Ordnung harmonisch.**

Ist die Fläche eine Kegelfläche zweiter Ordnung (worunter wir im allgemeinen auch Cilinderflächen verstehen), so muss die Polarebene eines jeden Punktes der nicht mit dem Mittelpunkte der Kegelfläche zusammenfällt, durch diesen Mittelpunkt gehen. Nur der Mittelpunkt kann der Pol einer Ebene sein, welche nicht durch den Mittelpunkt geht. Wie man sich leicht überzeugt, hat eine durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche zweiter Ordnung gehende Ebene nicht nur einen, sondern unendlich viele Pole, welche alle auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden liegen. Diese Gerade wird die Polare der Ebene und die Ebene die Polarebene der Geraden in Bezug auf die Kegelfläche genannt.

Die Polarebene eines Punktes P wird auch erhalten, wenn man aus P mindestens drei berührende Gerade an die Fläche zieht und durch die erhaltenen Berührungspunkte eine Ebene legt. Diese Ebene ist dann die Polarebene von P, wie leicht einzusehen (Siehe Satz 8, 4. Abschnitt). Schneidet die Ebene π die Fläche zweiter Ordnung F, so kann der Pol von π einfach dadurch erhalten werden, dass man in mindestens drei Punkten des Schnittes von π und F berührende Ebenen construirt und den Durchschnittspunkt dieser Ebenen bestimmt. Der sich ergebende Punkt ist der Pol von π. Es gilt also der Satz:

18. **Die Ebene jener Curve, in welcher eine Fläche zweiter Ordnung von irgend einer Kegelfläche zweiter Ordnung berührt wird, ist die Polarebene des Mittelpunktes dieser Kegelfläche.**

Hieraus folgt, **dass der Pol einer Ebene, welche eine Fläche zweiter Ordnung berührt, der Berührungspunkt dieser Ebene sein muss.** Die berührende Kegelfläche ist nämlich in diesem Falle in eine Ebene übergegangen, deren Berührungspunkt der Mittelpunkt der Kegelfläche ist, während als Ebene der Berührungscurve die berührende Ebene angesehen werden muss.

Heisst man π irgend eine Ebene, P' einen beliebigen Punkt derselben und F irgend eine Fläche zweiter Ordnung, so geht die Polarebene von P' durch den Pol P der Ebene π. Um dies einzusehen denke man sich durch P und P' irgend eine die Fläche F in einer Curve zweiter Ordnung K schneidende Ebene α gelegt. Die Durchschnittslinie von α und π ist dann die Polare des Punktes P in Bezug auf K, wie sich mit Hilfe des obigen Satzes 17 leicht nachweisen lässt. Nun liegt P' auf dieser Polaren, daher muss auch P auf der Polaren von P' in Bezug auf K gelegen sein (Satz 30, 2. Abschnitt). Die Polare von P' gehört aber der Polarebene von P' an, folglich geht diese Polarebene durch P.

Ist umgekehrt P' irgend ein Punkt und π eine beliebige durch denselben gehende Ebene, so kann auf ganz ähnliche Art bewiesen werden, dass der Pol von π in der Polarebene von P' gelegen sein muss. Wir können somit behaupten:

19. Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene π, so geht seine Polarebene beständig durch den Pol von π.

Geht eine bewegliche Ebene beständig durch einen Punkt P, so bewegt sich ihr Pol in der Polarebene von P.

Mit Benützung dieser Sätze lassen sich die folgenden leicht nachweisen:

20. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden g, so geht seine Polarebene beständig durch ein und dieselbe Gerade g_1.

Geht eine bewegliche Ebene beständig durch ein und dieselbe Gerade g_1, so bewegt sich ihr Pol P auf einer Geraden g.

(Satz links). Der Punkt P bewegt sich nämlich in diesem Falle in zwei Ebenen zugleich, deren Durchschnitt die Gerade g bildet, daher muss die Polarebene von P nach Satz 19 durch die beiden Pole P', P'' dieser zwei Ebenen, also beständig durch die Gerade $P'P''$ gehen.

(Satz rechts). Die Ebene π geht beständig durch dieselben zwei Punkte von g, demnach muss ihr Pol zugleich in den Polarebenen π', π'' dieser zwei Punkte, also in der Durchschnittslinie von π' und π'' liegen.

Die Sätze 19 und 20 erleiden wesentliche Modificationen, wenn die Fläche zweiter Ordnung eine Kegel- oder Cilinderfläche ist.

Von zwei Geraden g und g_1, welche eine derartige Lage haben, dass die Polarebenen aller Punkte von g durch g_1 gehen, sagt man, dass jede derselben die Polare der anderen sei. Es gehen unter der gemachten Voraussetzung auch die Polarebenen aller Punkte von g_1 durch g. Dies leuchtet ein, wenn man die Gerade g_1 als die Durchschnittslinie zweier Ebenen π und π_1 auffasst, deren Pole P und P_1 in g liegen müssen (Satz 20). Denkt man sich nämlich einen Punkt auf g_1, also zugleich in π und π_1 fortbewegt, so geht nach Satz 19 die Polarebene dieses Punktes beständig durch die beiden Pole P und P_1, also durch die Gerade g, welche P und P_1 verbindet. Man kann demnach sagen:

Von zwei Geraden wird jede die Polare der anderen genannt, wenn die Polarebenen aller Punkte der einen Geraden durch die andere gehen.

Soll die Polare irgend einer Geraden g ermittelt werden, so wählt man zwei beliebige Punkte in g und bestimmt die zugehörigen Polarebenen. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist dann die verlangte Polare. Oder man legt durch g zwei beliebige Ebenen, bestimmt die Pole der letzteren und verbindet dieselben durch eine Gerade. Wenn sich durch g berührende Ebenen an die Fläche zweiter Ordnung legen lassen, so erhält man die Polare auch indem man durch g die zwei berührenden Ebenen an die Fläche legt und die sich ergebenden Berührungspunkte durch eine Gerade verbindet. Schneidet g

die Fläche, so ist die Durchschnittslinie jener zwei Ebenen, welche die Fläche in den Schnittpunkten von g berühren, die gesuchte Polare.

Man überzeugt sich leicht, dass von zwei Geraden, deren eine die Polare der anderen in Bezug auf eine Kegelfläche zweiter Ordnung ist, immer eine durch den Mittelpunkt der Fläche gehen muss. Ist a irgend eine durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Gerade, so gibt es unendlich viele Polare von a, welche alle in der Polarebene der Geraden a liegen.

Legt man durch eine von zwei Polaren g und g_1, etwa durch g, irgend eine Ebene, welche die Fläche zweiter Ordnung in einer Curve K und g_1 im Punkte P schneidet, so ist P der Pol von g in Bezug auf K. Dies wird klar, wenn man sich erinnert, dass Pol und Polarebene jede durch ersteren gehende Sehne der Fläche zweiter Ordnung harmonisch theilen. Die Polarebene des Punktes P geht nämlich nach Satz 20 durch g, also hat g eine solche Lage, dass jede durch P gehende Sehne der Curve K von P und g harmonisch getheilt wird, woraus folgt, dass P der Pol von g sein muss (Satz 29, 2. Abschnitt).

Mit Benützung der vorhergehenden Sätze dieses Kapitels fällt es nun nicht schwer auch die folgenden nachzuweisen:

21. Bewegt sich eine Gerade g in einer Ebene π, so geht die Polare von g beständig durch den Pol von π.

Geht eine bewegliche Gerade g beständig durch denselben Punkt P, so bewegt sich die Polare von g in der Polarebene von P.

Auch der folgende Satz lässt sich nun leicht begründen:

22. Die Polaren aller Strahlen eines Strahlenbüschels bilden gleichfalls einen Strahlenbüschel.

Der Beweis hiefür kann wie folgt gegeben werden. Heisst M der Mittelpunkt eines beliebigen Strahlenbüschels S und g irgend ein Strahl desselben, so erhält man die Polare von g, indem man die Polarebene μ von M und jene irgend eines zweiten Punktes der Geraden g bestimmt, der Durchschnitt dieser beiden Polarebenen ist die gewünschte Polare. Wird nun für irgend einen anderen Strahl des Büschels S die Polare in derselben Weise bestimmt, so ergibt sich diese Polare als Durchschnitt von μ mit irgend einer zweiten Ebene; sie liegt also jedenfalls in μ, woraus geschlossen werden kann, dass die Polaren aller Strahlen des Büschels S in μ liegen und gleichfalls einen Strahlenbüschel bilden, nachdem sie alle durch den Pol des Trägers von S gehen müssen (Satz 21).

Auch die Sätze 21 und 22 sind zu modificiren, wenn man sie auf Kegel- oder Cilinderflächen anwenden will.

Ist P irgend ein Punkt und π seine Polarebene, so sagt man, dass P und irgend ein beliebiger Punkt P' von π conjugirte Punkte in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung sind. Ebenso nennt man π und irgend eine durch

P gehende Ebene π' conjugirte Ebenen. Nachdem die Polarebene von P' durch P geht und der Pol von π' in π gelegen sein muss (Satz 19), so kann man auch sagen:

Zwei conjugirte Punkte in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung sind solche, deren jeder in der Polarebene des anderen liegt.

Zwei conjugirte Ebenen in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung sind solche, deren jede durch den Pol der anderen geht.

Die nachstehenden Definitionen bedürfen nun wohl keiner weitern Erklärung mehr:

Ein Punkt P und eine Gerade g heissen einander conjugirt, wenn P auf der Polaren von g liegt, also die Polarebene von P durch g geht (Satz 20).

Eine Ebene π und eine Gerade g heissen einander conjugirt, wenn π durch die Polare von g geht, also der Pol von π in g liegt (Satz 20.)

Ist g eine beliebige Gerade, g_1 ihre Polare in Bezug auf eine Fläche, zweiter Ordnung und bezeichnet a irgend eine Gerade, welche g_1 in einem Punkte schneidet, den wir durch P bezeichnen wollen, so nennt man g und a conjugirte Gerade. Die Polare a' von a schneidet g, denn a' ergibt sich, wenn man zu P und irgend einen zweiten Punkt der Geraden a die Polarebene sucht und den Durchschnitt dieser Ebenen bestimmt. Nachdem nun die Polarebene π von P durch g gehen muss, so liegen a' und g in derselben Ebene π und schneiden sich daher. Man kann also sagen:

Zwei Gerade heissen conjugirt, wenn jede derselben die Polare der anderen schneidet.

Für Kegel- und Cilinderflächen geben wir folgende Definition:

Zwei durch den Mittelpunkt einer Kegel- oder Cilinderfläche gehende Gerade heissen einander conjugirt, wenn jede in der Polarebene der anderen liegt.

Ist P irgend ein Punkt, π seine Polarebene und P' ein beliebiger Punkt der letzteren, so sind, wie bereits erklärt, P und P' conjugirte Punkte in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung F. Legt man durch die Verbindungslinie der Punkte P, P' irgend eine Ebene α, welche F in einer Curve K schneidet, so müssen P und P', auch in Bezug auf K einander conjugirt sein. Denn die Durchschnittslinie der Ebenen α und π ist, wie sich mit Hilfe des Satzes 17, 4. Abschnitt, leicht nachweisen lässt, die Polare des Punktes P in Bezug auf K und nachdem P' auf dieser Polaren liegt, so erscheint unsere Behauptung gerechtfertigt. — Heissen P und P' irgend zwei Punkte, welche einander in Bezug auf irgend eine ebene Schnittcurve K einer Fläche zweiter Ordnung F conjugirt sind, so müssen P und P' auch in Bezug auf die Fläche F einander conjugirt sein. Denn P' liegt auf der Polaren von P in Bezug auf K und diese Polare gehört der Polarebene des Punktes P an.

Wir können somit sagen:

23. Sind zwei Punkte P und P' einander in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirt, so sind sie es auch in Bezug auf jede Curve, in welcher eine beliebige durch PP' gehende Ebene die Fläche schneidet. Und sind zwei Punkte P und P' einander in Bezug auf irgend eine ebene Schnittcurve einer Fläche zweiter Ordnung conjugirt, so sind sie es auch in Bezug auf diese Fläche.

Ist P irgend ein Punkt einer Geraden g und heisst g_1 die Polare von g, so sind P und irgend ein beliebiger Punkt von g_1 conjugirte Punkte, nachdem die Polarebene von P dem Satze 20 zufolge durch g_1 geht. Es gilt somit der Satz:

24. Je zwei Punkte, von denen einer auf irgend einer Geraden g und der zweite auf der Polaren von g liegt, sind einander conjugirt.

Legt man durch eine von zwei Polaren g und g_1, etwa durch g, irgend eine Ebene α, welche g_1 in P schneidet, und zieht durch P eine beliebige Gerade a in α, so sind a und g conjugirte Gerade in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung; sie sind es aber auch in Bezug auf die Curve K, in welcher α diese Fläche schneidet, nachdem, wie oben bereits erklärt wurde, P der Pol der Geraden g in Bezug auf K ist und a durch P geht. — Heissen a und g irgend zwei in derselben Ebene α gelegene Gerade, welche einander in Bezug auf die Schnittcurve von α mit der Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, so müssen sie es auch in Bezug auf diese Fläche sein; denn die Polarebene des in a gelegenen Poles P von g geht, wie leicht einzusehen durch g, also muss die Polare von g durch P gehen (Satz 20) und folglich a schneiden.

Es gilt somit der Satz:

25. Sind zwei in derselben Ebene α gelegene Gerade einander in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirt, so sind sie es auch in Bezug auf die Schnittcurve der Ebene α mit der Fläche; und sind umgekehrt zwei in derselben Ebene α gelegene Gerade einander in Bezug auf die Schnittcurve von α mit der Fläche zweiter Ordnung conjugirt, so sind sie es auch in Bezug auf diese Fläche.

Wir wollen nun zeigen, dass wenn man zu allen Punkten und Geraden eines ebenen Systemes Σ die Polarebenen, beziehungsweise die Polaren bestimmt, alle diese Ebenen und Polaren einen Strahlenbündel s bilden, welcher mit Σ reciprok verwandt ist. Dabei schliessen wir jene Flächen zweiter Ordnung, welche zur Gattung der Kegelflächen gehören, aus.

Der Träger von Σ heisse π und den Pol von π nennen wir P. A sei irgend ein Punkt des Systemes Σ und g eine beliebige durch A gehende Gerade in Σ. Diesen Voraussetzungen zufolge geht die Polarebene α von A, durch P (Satz 19, 4. Abschnitt) und die Polare g_1 von g muss in der Ebene α liegen

und durch P hindurchgehen (Satz 21, 4. Abschnitt). A und g sind nun zwei beliebige Elemente des Systemes Σ, daher gehen die Polarebenen aller Punkte, sowie auch die Polaren aller Geraden von Σ durch den Punkt P und bilden also einen Strahlenbündel s mit dem Mittelpunkte P. Dass dieser Bündel mit dem Systeme Σ reciprok verwandt ist, wenn man jedem Punkte in Σ seine Polarebene und jeder Geraden in Σ ihre Polare als entsprechendes Element zuweist geht daraus hervor, dass je zwei ungleichartigen Elementen A und g in Σ, wovon A in g liegt, zwei ungleichartige Elemente α und g_1 in s entsprechen, von denen α durch g_1 geht (Siehe Kapitel e, 3. Abschnitt).

Der Träger π des ebenen Systemes Σ schneidet den Strahlenbündel s in einem ebenen Systeme Σ_1, welches mit Σ ein ebenes Polarsystem bildet, also gegen Σ involutorisch liegt, woraus folgt, dass auch Σ und s involutorisch liegen. Um dies nachzuweisen haben wir nur zu zeigen, dass jedem Punkte der Ebene π, welche den gemeinschaftlichen Träger von Σ und Σ_1 bildet, ein und dieselbe Gerade in π entspricht, ob man diesen Punkt als Element von Σ oder Σ_1 betrachtet. Dem beliebig gewählten Punkte A in Σ entspricht die Durchschnittslinie a der Ebenen α und π. Betrachtet man A als Element von Σ_1, nämlich als Durchschnitt des Strahles PA mit π, so entspricht dem Punkte A die Polare der Geraden PA. Diese Polare fällt aber mit a zusammen; denn die Polarebene von P ist π und die Polarebene von A ist α, daher entspricht dem beliebig gewählten Punkte A, ob man ihn als Element von Σ oder Σ_1 ansieht, die Gerade a, wie oben behauptet wurde, und Σ und Σ_1 müssen involutorisch gelegen sein. Aus dieser Untersuchung ergibt sich nun der Satz:

26. Ist Σ irgend ein ebenes System und P der Pol seines Trägers, so bilden die Polarebenen der Punkte und die Polaren der Geraden von Σ einen mit Σ reciprok verwandten Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt sich in P befindet, und welcher gegen Σ involutorisch liegt.

Dieser Satz gilt auch für Kegel- und Cilinderflächen zweiter Ordnung, wenn man unter P den Mittelpunkt der Fläche versteht und der Träger von Σ nicht durch diesen Mittelpunkt hindurchgeht.

Der Punkt A und die Gerade a sind einander conjugirt, nachdem A in der Polaren PA von a gelegen ist. Entsprechende Elemente von Σ und Σ_1 werden also durch irgend einen Punkt A der Ebene π und die in π befindliche, dem Punkte A conjugirte Gerade a gebildet. Schneidet π die Fläche zweiter Ordnung, so ist die Schnittcurve zugleich die Directrix des aus den Systemen Σ und Σ_1 bestehenden Polarsystemes, denn jedem Punkte dieser Schnittcurve ist, wie leicht einzusehen, eine durch ihn gehende Gerade der Ebene π conjugirt. Demnach gilt der Satz:

27. Jede Ebene ist der Träger eines ebenen Polarsystemes, in welchem je zwei entsprechende Elemente durch einen

Punkt und die demselben in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirte Gerade gebildet werden. Die Schnittcurve der Ebene und der Fläche zweiter Ordnung ist zugleich die Directrix dieses Polarsystemes.

Der Strahlenbündel s, welcher ein Schein des ebenen Systemes Σ_1 ist, und jener gegen s concentrisch liegende Strahlenbündel s_1, der einen Schein des Systemes Σ bildet, sind reciprok verwandt und liegen involutorisch; sie bilden also ein Polarsystem im Strahlenbündel. Entsprechende Elemente derselben sind je ein Strahl des einen Bündels und die ihm conjugirte Ebene des anderen. Diese Ebene ist vollkommen bestimmt, nachdem sie durch die Polare des Strahles und durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt P der beiden Bündel gehen muss. — Wir können nun folgenden Satz aufstellen, welcher dem unmittelbar vorhergehenden analog ist:

28. Jeder Punkt ist der Mittelpunkt eines Polarsystemes im Strahlenbündel, in welchem je zwei entsprechende Elemente durch eine Gerade und die ihr in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirte Ebene gebildet werden. Die Ordnungsfläche dieses Polarsystemes ist eine die Fläche zweiter Ordnung umhüllende Kegelfläche.

Die Sätze 27 und 28 gelten auch für Kegel- und Cilinderflächen, wenn man in dem ersteren statt „jede Ebene" jede nicht durch den Mittelpunkt gehende Ebene, und in dem letzteren statt „jeder Punkt" der Mittelpunkt einer Kegel- oder Cilinderfläche setzt.

Aus den Sätzen 47 und 55 des 3. Abschnittes und dem obigen Satze 26 ergeben sich unmittelbar die folgenden:

29. Jede Punktreihe ist mit jenem Ebenenbüschel projectivisch, welcher von den Polarebenen der Punkte dieser Reihe gebildet wird. Reihe und Büschel liegen involutorisch.

30. Jeder Strahlenbüschel und der aus den Polaren der Elemente desselben gebildete Strahlenbüschel sind projectivisch verwandt (Satz 22, 4. Abschnitt).

Aus den obigen Sätzen 27, 28 und dem Satze 56 des dritten Abschnittes folgt:

31. Alle Paare von Punkten, welche auf ein und derselben Geraden liegen und einander in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, bilden eine involutorische Punktreihe. Die Doppelpunkte dieser Reihe liegen auf der Fläche zweiter Ordnung.

Alle Paare von Ebenen, welche durch ein und dieselbe Gerade gehen und einander in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, bilden einen involutorischen Ebenenbüschel. Die Doppelebenen dieses Büschels berühren die Fläche zweiter Ordnung.

32. **Alle Paare von Geraden, welche einander in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, und ein und demselben Strahlenbüschel angehören, bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. Die Doppelstrahlen dieses Büschels berühren die Fläche zweiter Ordnung.**

Man überzeugt sich leicht, dass die Sätze 29 bis 32 im allgemeinen auch für Kegel- und Cilinderflächen Geltung haben.

A sei irgend ein Punkt und α seine Polarebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, welche nicht zur Gattung der Kegelflächen gehört. Durch A legen wir irgend eine Ebene β, bestimmen deren in α gelegenen Pol B und legen endlich durch die Gerade AB irgend eine dritte Ebene γ. Der Pol C von γ muss dann in der Durchschnittslinie der Ebenen α und β gelegen sein, denn γ geht durch A und B, also liegt der Pol von γ zugleich in den Polarebenen von A und B. Der Pol D der Ebene δ, welche durch A, B und C geht, ist wie leicht einzusehen, der Schnittpunkt der drei Ebenen α, β und γ. Die Punkte $ABCD$ bilden nun im allgemeinen ein Tetraeder, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite (Ebene) und jede Kante die Polare derjenigen Kante ist, welche von ihr nicht geschnitten wird. So z. B. ist CD die Polare der Kante AB, nachdem CD den Durchschnitt der Polarebenen von A und B bildet. Ein derartiges Tetraeder wird ein **Polartetraeder** genannt. Die drei Kanten und Ebenen, welche in irgend einem Eckpunkte eines Polartetraeders zusammentreffen, bilden ein sogenanntes **Polardreikant.** Ein derartiges Dreikant hat die Eigenschaft, dass jede Kante desselben der ihr gegenüberliegenden Seite in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung conjugirt ist.

Aus der eben erklärten Construction eines Polartetraeders folgt, dass jeder Punkt (A) als ein Eckpunkt unendlich vieler Polartetraeder, also auch unendlich vieler Polardreikante betrachtet werden kann.

Zunächst beweisen wir folgenden wichtigen Satz:

33. **Ist F irgend eine Fläche zweiter Ordnung, welche nicht zur Gattung der Kegelflächen gehört, und P ein beliebiger Punkt des Raumes, so gibt es entweder nur ein Polardreikant in Bezug auf F mit dem Eckpunkte P, dessen drei Kanten auf einander senkrecht stehen, oder es sind unendlich viele solche Polardreikante vorhanden.**

Versteht man unter P den Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung so gilt dieser Satz auch für Kegelflächen.

Nach Satz 28, 4. Abschnitt, ist P der Mittelpunkt eines Polarsystemes im Strahlenbündel, in welchem je zwei entsprechende Elemente durch eine Gerade und die ihr in Bezug auf F conjugirte Ebene gebildet werden. Dieses Polarsystem kann man sich durch die Vereinigung zweier reciproker Strahlenbündel s und s_1 entstanden denken, in welchem je zwei entsprechende Elemente —

Strahl und Ebene — einander in Bezug auf F conjugirt sind. Nun nehmen wir an, durch den Punkt P sei auf jeden Strahl des Bündels s eine senkrechte Ebene gelegt worden. Alle diese Ebenen bilden einen mit s reciprok verwandten Strahlenbündel s_2, wenn man je einen Strahl von s und die auf ihm senkrecht stehende Ebene als entsprechende Elemente von s und s_2 betrachtet. Denn ist α irgend eine Ebene von s und a ein in α gelegener Strahl, so entspricht dem Strahle a eine Ebene in s_2, welche durch den der Ebene α entsprechenden Strahl von s_2 hindurchgeht (Siehe Kapitel e, 3. Abschnitt).

Nachdem nun s sowohl mit s_1, als auch mit s_2 reciprok verwandt ist, so müssen s_1 und s_2 collinear verwandt sein (Satz 45, 3. Abschnitt). Schneidet man daher s_1 und s_2 durch eine beliebige Ebene, so ergeben sich als Schnitte zwei collineare ebene Systeme Σ_1 und Σ_2. Nach Satz 19, 3. Abschnitt, haben diese beiden Systeme im allgemeinen die Eckpunkte und Seiten eines Dreieckes entsprechend gemein, von welchem zwei Eckpunkte und die ihnen gegenüberliegenden Seiten imaginär sein können, oder die beiden Systeme sind identisch. Im ersteren Falle haben s_1 und s_2 die Kanten und Seiten eines Dreikantes, von welchem zwei Kanten und zwei Seiten imaginär sein können entsprechend gemein, im zweiten Falle coincidiren alle entsprechenden Elemente von s_1 und s_2. Hieraus kann man schliessen, dass wenn in den beiden reciproken Strahlenbündeln s und s_1 nicht alle entsprechenden Elemente auf einander senkrecht stehen doch mindestens zwei (reelle) entsprechende Elemente eine senkrechte Lage gegen einander haben. Diese Elemente wollen wir a und α nennen.

Alle in α gelegenen durch P gehenden Paare conjugirter Geraden bilden einen involutorischen Strahlenbüschel (Satz 32, 4. Abschnitt). In diesem Büschel gibt es immer zwei auf einander senkrecht stehende, sich entsprechende Strahlen b und c. Der Strahl a ist jeder der beiden Geraden b und c conjugirt, nachdem letztere in der Ebene α liegen, welche dem Strahle a conjugirt ist. Nachdem nun a und c der Geraden b conjugirt sind, so muss die durch a und c bestimmte Ebene dem Strahle b conjugirt sein; auch ist leicht einzusehen, dass c der Ebene der Geraden a und b conjugirt ist. Die drei sich in P schneidenden Geraden a, b und c bilden demnach die Kanten eines Polardreikantes. Jede Kante dieses Dreikantes steht auf der ihr gegenüberliegenden Seite senkrecht.

Ein derartiges Polardreikant wird ein rechtwinkliges genannt. Für jeden beliebigen Punkt P gibt es ein rechtwinkliges Polardreikant. In dem speciellen Falle aber, wenn die collinearen Strahlenbündel s_1 und s_2 identisch sind, gibt es unendlich viele solche Dreikante mit dem Eckpunkte P. — Damit erscheint nun obiger Satz gerechtfertigt. —

34. Sind F und F_1 irgend zwei Flächen zweiter Ordnung und construirt man zu allen berührenden Ebenen von F_1 die Pole in Bezug auf F, so

Sind F und F_1 irgend zwei Flächen zweiter Ordnung und construirt man zu allen Punkten von F_1 die Polarebenen in Bezug auf F, so berühren

liegen alle diese Pole auf ein und derselben Fläche zweiter Ordnung.

alle diese Ebenen eine und dieselbe Flächen zweiter Ordnung.

Um den Satz links nachzuweisen denken wir uns die Fläche F_1 als ein Erzeugniss zweier reciproker ebener Systeme Σ und Σ_1. Die Pole der Träger von Σ und Σ_1 nennen wir P und P_1. Bestimmt man zu allen Punkten von Σ und Σ_1 die Polarebenen und zu allen Geraden dieser beiden Systeme die Polaren, so erhält man nach Satz 26, 4. Abschnitt, zwei Strahlenbündel s und s_1 mit den Mittelpunkten P und P_1. Diese Bündel sind reciprok verwandt, nachdem auch Σ und Σ_1 reciprok sein müssen, wenn sie F_1 erzeugen sollen, daher erzeugen s und s_1 eine Fläche zweiter Ordnung F_2. Entsprechende Elemente von s und s_1 sind je eine Gerade a von s und eine Ebene α_1 von s_1, wenn a die Polare der Geraden a' in Σ und α_1 die Polarebene des Punktes A_1 in Σ_1 ist und wenn der Geraden a' in Σ der Punkt A_1 in Σ_1 entspricht. Die Ebene, welche durch a' und A_1 geht, ist eine berührende Ebene der durch Σ und Σ_1 erzeugten Fläche F_1 und der Pol dieser Ebene in Bezug auf F ist der Durchschnittspunkt von a und α_1, also ein Punkt der durch s und s_1 erzeugten Fläche F_2. Demnach liegt der Pol jeder berührenden Ebene von F_1 auf der Fläche F_2, wie oben behauptet wurde.

Auf ganz analoge Weise lässt sich der Satz rechts nachweisen.

d) Diametral-Ebenen, Durchmesser und Axen der Flächen zweiter Ordnung.

Ist P irgend ein unendlich ferner Punkt und π seine Polarebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung F, so geht π durch den Halbirungspunkt einer jeden Sehne von F, welche gegen P convergirt, nachdem Pol und Polarebene jede durch ersteren gehende Sehne harmonisch theilen (Satz 17, 4. Abschnitt und Satz 33, 1. Abschnitt). Die sämmtlichen gegen P convergirenden Sehnen sind einander parallel und ihre Richtung kann, da P als ein beliebiger unendlich ferner Punkt angenommen wurde, auch als eine beliebige betrachtet werden; daher gilt der Satz:

35. Die Halbirungspunkte aller Sehnen einer Fläche zweiter Ordnung, welche in irgend einer Richtung parallel zu einander gezogen werden können, liegen auf ein und derselben Ebene. Jede solche Ebene wird eine Diametral-Ebene genannt.

Eine Diametral-Ebene ist somit die Polarebene eines unendlich fernen Punktes und halbirt sämmtliche Sehnen, welche gegen diesen Punkt gerichtet, also der Ebene conjugirt sind.

Die Curve, in welcher eine Fläche zweiter Ordnung von irgend einer ihrer Diametral-Ebenen geschnitten wird, nennt man einen Diametralschnitt.

Die Polarebene eines beliebigen, ausserhalb einer Fläche zweiter Ordnung F gelegenen Punktes P wird bekanntlich auch erhalten, indem man jene Kegelfläche construirt, deren Mittelpunkt P ist und die Fläche F umhüllt; die Ebene der Berührungscurve beider Flächen ist dann die Polarebene von P (Satz 18, 4. Abschnitt). Liegt nun P in unendlicher Entfernung, so geht die berührende Kegelfläche in eine Cilinderfläche über. Man kann also schliessen:

36. Sämmtliche Ebenen, welche in den Punkten eines Diametralschnittes einer Fläche zweiter Ordnung berührend an die Fläche gelegt werden können, umhüllen eine Cilinderfläche, deren gerade Erzeugende zu jenen Sehnen parallel sind, die von der Ebene des Diametralschnittes halbirt werden. — Die Ebene jener Curve, in welcher eine Fläche zweiter Ordnung von einer Cilinderfläche berührt wird, ist eine den geraden Erzeugenden dieser Cilinderfläche conjugirte Diametral-Ebene.

Nimmt man ausser P noch zwei andere unendlich ferne Punkte an, deren Verbindungslinie nicht durch P geht, und construirt die Polarebene eines jeden derselben, so ergibt sich als Schnittpunkt dieser drei Polarebenen der Pol M der Ebene μ, in welcher die drei unendlich fernen Punkte liegen (Satz 19, 4. Abschnitt). Letztere Ebene ist nun die unendlich ferne Ebene des Raumes, nachdem alle ihre Punkte unendlich ferne liegen müssen, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man berücksichtigt, dass jede Gerade, welche zwei unendlich ferne Punkte enthält, ganz in unendlicher Entfernung liegt. Die Polarebenen sämmtlicher Punkte der Ebene μ sind demnach Diametral-Ebenen. Sie gehen alle durch den Punkt M und dieser Punkt wird der Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung genannt. Unter dem Mittelpunkte einer Fläche zweiter Ordnung versteht man also den Pol der unendlich fernen Ebene, oder was dasselbe ist, jenen Punkt, durch welchen sämmtliche Diametral-Ebenen der Fläche gehen.

Die Bezeichnung Mittelpunkt findet ihre Rechtfertigung in dem Umstande, dass dieser Punkt jede durch ihn gehende Sehne der Fläche halbirt, wie aus dem Satze 17, 4. Abschnitt, leicht gefolgert werden kann. Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne der Fläche wird ein Durchmesser der letzteren genannt. Nachdem jeder Durchmesser vom Mittelpunkte halbirt wird, so ist leicht einzusehen, dass der Mittelpunkt einer Fläche zweiter Ordnung auch der Mittelpunkt eines jeden Kegelschnittes sein muss, in welchem irgend eine Diametral-Ebene die Fläche zweiter Ordnung schneidet.

Dass je zwei Durchmesser, welche einander in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, es auch in Bezug auf die Diametral-Ebene sein müssen, welche durch dieselben bestimmt wird, folgt unmittelbar aus dem Satze 25, 4. Abschnitt.

Unter der Länge eines Durchmessers einer Fläche zweiter Ordnung, welcher die Fläche schneidet, versteht man den Abstand dieser Durchschnittspunkte von einander.

Das elliptische und hyperbolische Paraboloid werden von der unendlich fernen Ebene berührt. Der Pol der letzteren, also der Mittelpunkt der Fläche, ist daher der Berührungspunkt dieser Ebene. Daraus folgt, dass der Mittelpunkt eines elliptischen oder hyperbolischen Paraboloides unendlich ferne liegt, sowie dass sämmtliche Durchmesser einer solchen Fläche zu einander parallel laufen.

Ein Durchmesser und eine Diametral-Ebene sind einander conjugirt — d. h. der Durchmesser geht durch den Pol der Diametral-Ebene — wenn ersterer parallel zu jenen Sehnen ist, die von der letzteren halbirt werden.

Die Polare eines Durchmessers ist die Durchschnittslinie der Polarebene des Mittelpunktes und der Polarebene des unendlich fernen Punktes dieses Durchmessers, also die unendlich ferne Gerade der dem Durchmesser conjugirten Diametral-Ebene.

Legt man durch die unendlich ferne Polare a_1 irgend eines Durchmessers a eine beliebige Ebene, welche die Fläche zweiter Ordnung in einer Curve K und a im Punkte M schneidet, so ist wie oben erklärt wurde, M der Pol von a_1 in Bezug auf K (siehe die Erklärungen zu Satz 24, 4. Abschnitt). Nachdem aber a_1 unendlich ferne liegt, so muss M der Mittelpunkt der Curve K sein. Hieraus folgt:

37. Ist a irgend ein Durchmesser und α die ihm conjugirte Diametral-Ebene einer Fläche zweiter Ordnung, so liegt der Mittelpunkt einer jeden Curve, in welcher irgend eine zu α parallele Ebene die Fläche zweiter Ordnung schneidet, auf dem Durchmesser a. Schneidet a die Fläche, so sind die Ebenen, welche in diesen Schnittpunkten berührend an die Fläche gelegt werden können, parallel zu α.

Zu irgend einer Diametral-Ebene α kann man daher den conjugirten Durchmesser bestimmen, indem man zu α eine parallele Ebene legt, welche die Fläche zweiter Ordnung in einer Curve K schneidet, und den Mittelpunkt der Fläche mit jenem der Curve K verbindet.

Ist π irgend eine Ebene, welche die Fläche zweiter Ordnung F in einer Curve K schneidet, deren Mittelpunkt M heissen mag, so muss der durch M gehende Durchmesser d von F der Ebene π conjugirt sein. Denn ist α die zu π parallele Diametral-Ebene, so erhält man, wie eben erklärt wurde, den der Ebene α conjugirten Durchmesser, indem man F durch eine zu α parallele Ebene π schneidet und den Mittelpunkt M der so erhaltenen Schnittcurve K mit dem Mittelpunkte der Fläche verbindet. Dieser Durchmesser ist identisch mit d, woraus folgt, dass d der Ebene α, also auch der Ebene π conjugirt ist, nachdem α und π sich in der unendlich ferne liegenden Polaren des Durchmessers d

schneiden. — Ist π_1 irgend eine zu π parallele Ebene, welche F in einer Curve K_1 schneidet, so liegt dem Satze 37 zufolge, auch der Mittelpunkt von K_1 auf dem Durchmesser d, woraus man schliessen kann, dass die Mittelpunkte aller durch parallele Ebenen sich ergebenden Schnittcurven einer Fläche zweiter Ordnung auf ein und demselben Durchmesser liegen, der allen diesen Ebenen conjugirt ist.

Dass alle Curven, in welchen eine Fläche zweiter Ordnung von parallelen Ebenen geschnitten werden kann, unter einander ähnlich sind, lässt sich wie folgt zeigen:

π und π_1 seien irgend zwei parallele, die Fläche F beziehungsweise in den Curven K und K_1 schneidende Ebenen. Die Mittelpunkte von K und K_1 nennen wir M und M_1, irgend zwei conjugirte Durchmesser von K seien a, b und die zu a und b parallelen Durchmesser von K_1 bezeichnen wir durch a_1 und b_1. Dass die Gerade MM_1 ein Durchmesser der Fläche F ist, also die durch a, a_1 und b, b_1 bestimmten Ebenen Diametral-Ebenen sein müssen, wurde soeben erklärt. MM_1 ist nun einer jeden Geraden conjugirt, welche in π liegt, oder dieser Ebene parallel läuft; denn π ist der Geraden MM_1 conjugirt, sie enthält also die — in unendlicher Entfernung gelegene — Polare von MM_1 und jede zu π parallele Gerade schneidet diese Polare. Demzufolge ist a sowohl der Geraden b, als auch der Geraden MM_1 in Bezug auf die Fläche F conjugirt. MM_1 und b schneiden also die Polare von a und die Ebene, welche durch MM_1 und b, oder was dasselbe ist, durch b und b_1 bestimmt wird, enthält diese Polare, woraus man schliessen kann, dass die Ebene bb_1 der Geraden a conjugirt ist. Die parallelen Geraden a und a_1 convergiren demnach gegen den unendlich fernen Pol der Diametral-Ebene bb_1. Dieser Pol ist zugleich der Pol der Geraden b_1 in Bezug auf K_1, folglich sind a_1 und b_1 conjugirte Durchmesser der zuletzt genannten Curve.

Die conjugirten Durchmesser a, b wurden beliebig gewählt, es müssen daher je zwei beliebige conjugirte Durchmesser von K conjugirten Durchmessern von K_1 parallel sein, woraus folgt, dass K und K_1 ähnlich sind. Denn man kann sich eine der beiden Curven parallel zu sich selbst verschoben denken, bis sie in die Ebene der anderen gelangt und es gelten dann für K und K_1 die Sätze 88 und 89 des 2. Abschnittes.

Als Resultat unserer zuletzt angestellten Betrachtungen lässt sich nun folgender Satz aufstellen:

38. Schneidet man eine Fläche zweiter Ordnung durch parallele Ebenen, so sind alle sich ergebenden Schnittcurven einander ähnlich und die Mittelpunkte dieser Curven liegen alle auf jenem Durchmesser, der den schneidenden Ebenen conjugirt ist.

Wird die Fläche zweiter Ordnung von einer Kegelfläche in der Curve K berührt, so muss der Durchmesser MM_1, weil er der Ebene der Curve K con-

jugirt ist, durch den Pol dieser Ebene, nämlich durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehen. Wir können also behaupten:

39. Wird eine Fläche zweiter Ordnung von einer Kegelfläche, deren Mittelpunkt P heissen mag, in einer Curve K berührt, so ist die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte von K jener Durchmesser der Fläche zweiter Ordnung, welcher der Ebene von K conjugirt ist.

Nachdem eine Diametral-Ebene α, welche einem Durchmesser a conjugirt ist, durch die Polare von a geht, so ist a jedem in α gelegenen Durchmesser, sowie überhaupt jeder zu α parallelen Geraden conjugirt. Man kann also sagen:

40. Jeder Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung ist allen Geraden conjugirt, welche in der ihm conjugirten Diametral-Ebene liegen, oder zur letzteren parallel sind, also namentlich auch allen in dieser Ebene liegenden Durchmessern.

Irgend zwei conjugirte Durchmesser b und c der Diametral-Ebene α bilden mit a die Kanten eines Polardreikantes. Denn b ist der durch a, c und c der durch a, b bestimmten Ebene conjugirt, nachdem b sowohl dem Durchmesser a, als auch dem Durchmesser c, und c den Durchmessern a und b conjugirt ist. — Drei solche Durchmesser, von denen je zwei einander conjugirt sind, welche also die Kanten eines Polardreikantes bilden, nennt man drei conjugirte Durchmesser und die drei durch solche Durchmesser bestimmten Ebenen, drei conjugirte Diametral-Ebenen. Der folgende Satz ist nun leicht einzusehen:

41. Drei conjugirte Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung haben eine derartige gegenseitige Lage, dass alle Sehnen, welche zu einem derselben parallel gezogen werden können, von der Ebene der beiden anderen Durchmesser halbirt werden.

Drei conjugirte Durchmesser, von denen jeder auf den beiden anderen senkrecht steht, welche also die Kanten eines rechtwinkligen Polardreikantes bilden, heisst man die Axen der Fläche zweiter Ordnung. Jede durch zwei Axen bestimmte Ebene wird eine Hauptebene und die Curve, in welcher eine Hauptebene die Fläche schneidet, ein Hauptschnitt genannt. Nach Satz 33, 4. Abschnitt, hat eine Fläche zweiter Ordnung entweder nur drei Axen oder unendlich viele. Der letztere Fall ist als ein specieller aufzufassen. Bilden je drei conjugirte Durchmesser ein rechtwinkliges Polardreikant, so ist nämlich die Fläche eine Kugelfläche. Denn je zwei conjugirte Durchmesser ein und derselben beliebigen Diametral-Ebene stehen in diesem Falle auf einander senkrecht, woraus folgt, dass der Schnitt einer jeden solchen Ebene mit der Fläche ein Kreis ist.

Jeder reelle Durchschnittspunkt einer Axe mit der Fläche zweiter Ordnung, wird ein Scheitel der Fläche genannt.

Jede Ebene, welche eine Fläche zweiter Ordnung in einem ihrer Scheitel berührt, steht senkrecht auf der durch diesen Scheitel gehenden Axe, nachdem jede berührende Ebene einer solchen Fläche jenem Durchmesser conjugirt ist, der durch den Berührungspunkt geht (Satz 37).

Stehen je zwei in einer Hauptebene α befindliche conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht, so ist der in α gelegene Hauptschnitt ein Kreis. Nach Satz 38 ist aber dann auch jeder Schnitt der Fläche zweiter Ordnung mit irgend einer zu α parallelen Ebene ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Axe a liegt, die auf α senkrecht steht. Die Fläche zweiter Ordnung ist in diesem speciellen Falle eine Rotationsfläche, welche man sich durch Drehung eines Kegelschnittes um seine Axe a entstanden denken kann. Rotationsflächen können sein: Das Ellipsoid, das einfache und zweifache Hyperboloid, das elliptische Paraboloid, und die Kegelfläche zweiter Ordnung kurz solche Flächen zweiter Ordnung, welche man nach Ellipsen schneiden kann, nicht aber das hyperbolische Paraboloid, da diese Fläche keine elliptischen, also auch keine kreisförmigen Schnitte zulässt.

Aus dem Umstande, dass bei den Paraboloiden der Mittelpunkt in der unendlich fernen Ebene liegt, kann man schliessen, dass diese Flächen nur eine Axe besitzen, welche nicht in unendlicher Entfernung gelegen ist. Diese Axe wird in der Regel als die einzige Axe derartiger Flächen betrachtet. Führt man senkrecht auf die Richtung der Durchmesser eines Paraboloides einen ebenen Schnitt K und zieht durch den Mittelpunkt von K einen Durchmesser, so ist letzterer die Axe der Fläche. Diese Axe kann auch erhalten werden, indem man an die Fläche eine berührende Ebene legt, welche auf der Richtung der Durchmesser senkrecht steht, und durch den Berührungspunkt einen Durchmesser zieht.

Jede Ebene, welche auf einer Axe einer Fläche zweiter Ordnung senkrecht steht, ist dieser Axe conjugirt. Die Axe eines Paraboloides muss daher allen Geraden einer Ebene conjugirt sein, welche auf der Axe senkrecht steht. Ist α irgend eine solche Ebene, welche das Paraboloid in einer Curve K schneidet, so bilden alle Paare conjugirter Durchmesser von K einen involutorischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt sich in der Axe a der Fläche befindet. Jene zwei Ebenen, welche durch die Normalstrahlen dieses Büschels und die Axe a bestimmt werden, sind wie leicht einzusehen, einander conjugirt und da sie auf einander senkrecht stehen, so müssen sie Hauptebenen des Paraboloides sein.

Wenn das Paraboloid ein hyperbolisches ist, so wird es von α in einer Hyperbel geschnitten, deren Axen in den beiden Hauptebenen der Fläche liegen. Schneidet man letztere durch beliebig viele zu α parallele Ebenen, so erhält

man eine Reihe von ähnlichen Hyperbeln als Schnitte, deren Axen alle zu einander parallel sind, woraus folgt, dass auch die Asymptoten von je zwei dieser Hyperbeln einander parallel sein müssen. Durch die Asymptoten aller der in Rede stehenden Curven lassen sich daher zwei durch die Axe des Paraboloides gehende Ebenen legen. Diese Ebenen müssen Richtebenen sein, nachdem sie die Fläche erst in unendlicher Entfernung berühren. — Hieraus folgt:

42. Die zwei Hauptebenen eines hyperbolischen Paraboloides halbiren jene Flächenwinkel, welche von den zwei durch die Axe der Fläche gehenden Richtebenen gebildet werden.

Geht die Ebene α durch den Scheitel des hyperbolischen Paraboloides, so berührt sie die Fläche, weil sie der Axe conjugirt ist. Daher schneidet α die Fläche in diesem Falle in zwei geraden Erzeugenden (Satz 4, 4. Abschnitt). Diese zwei Erzeugenden stehen senkrecht auf der Axe des Paraboloides und schliessen mit den Hauptebenen gleiche Winkel ein, nachdem sie in den zwei durch die Axe gehenden Richtebenen liegen müssen. Es sind dies die einzigen geraden Erzeugenden, welche auf der Axe senkrecht stehen, denn gäbe es noch eine solche Erzeugende, so müsste sie parallel zu jener durch den Scheitel gehenden Erzeugenden sein, die mit ihr zu derselben Schaar gehört, was dem Satze 10 dieses Abschnittes widersprechen würde. Es gilt somit der Satz:

43. Die zwei durch den Scheitel eines hyperbolischen Paraboloides gehenden geraden Erzeugenden sind die einzigen, welche auf der Richtung der Axe senkrecht stehen. Sie schliessen mit den Hauptebenen gleiche Winkel ein.

Ein einfaches oder zweifaches Hyperboloid wird von der unendlich fernen Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten. Legt man in sämmtlichen Punkten dieser Curve berührende Ebenen an die Fläche, so umhüllen die so erhaltenen Ebenen eine Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt nach Satz 18, 4. Abschnitt, der Pol der unendlich fernen Ebene, also der Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung ist. Diese Kegelfläche, deren Berührungscurve in der unendlich fernen Ebene liegt und deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt des Hyperboloides ist, wird die Asymptoten-Kegelfläche genannt. Die Axen der Aymptoten-Kegelfläche fallen mit den Axen des Hyperboloides zusammen, wie man aus folgendem Satze schliessen kann:

44. Wird eine Fläche zweiter Ordnung F von einer Kegelfläche in einer Curve zweiter Ordnung berührt, so sind je zwei durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende in Bezug auf letztere Fläche conjugirte Gerade einander auch in Bezug auf die Fläche F conjugirt.

Ist nämlich K die Berührungscurve und heissen g, g' die beiden in Bezug auf die Kegelfläche conjugirten Geraden, so schneiden g und g' die Ebene von K in zwei Punkten P und Q, welche einander bezüglich der Curve K conjugirt

sind. Dem Satze 23, 4. Abschnitt, zufolge müssen P und Q einander auch in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung F conjugirt sein, daher geht die Polarebene von P in Bezug auf F durch Q. Nachdem aber P in der Ebene der Curve K liegt und der Mittelpunkt der berührenden Kegelfläche der Pol dieser Ebene ist, so muss die Polarebene von P in Bezug auf F sowohl durch Q, als auch durch den genannten Mittelpunkt gehen und daher die Gerade g' in sich enthalten.

Aus dem eben nachgewiesenen Satze ergibt sich, dass nicht bloss die Axen der Asymptoten-Kegelfläche mit jenen des Hyperboloides zusammenfallen, sondern dass auch irgend drei in Bezug auf die Asymptoten-Kegelfläche conjugirte Durchmesser einander in Bezug auf das Hyperboloid ebenfalls conjugirt sein müssen.

45. Wird eine Fläche zweiter Ordnung F von einer Kegelfläche in einer Curve zweiter Ordnung K berührt, und schneidet man beide Flächen durch eine Ebene, welche der Ebene von K parallel ist, so erhält man als Schnitte zwei ähnliche Curven, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt in jener Geraden liegt, welche die Kegelspitze mit dem Mittelpunkte der Curve K verbindet, also der Ebene dieser Curve conjugirt ist.

Der Beweis hiefür lässt sich mit Benützung des Satzes 38, 4. Abschnitt, leicht herstellen. Die Curve K ist zufolge dieses Satzes sowohl dem ebenen Schnitte der einen, wie der anderen Fläche ähnlich, daher müssen diese Schnitte auch unter sich ähnlich sein.

Aus dem Satze 45 kann man schliessen:

46. Schneidet man ein Hyperboloid und seine Asymptoten-Kegelfläche durch eine und dieselbe Ebene, so sind die Schnittcurven der beiden Flächen einander ähnlich und ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt liegt auf dem der schneidenden Ebene conjugirten Durchmesser.

Ist p irgend eine durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche zweiter Ordnung gehende Gerade und π ihre Polarebene, so muss p ganz ausserhalb der Fläche liegen, wenn π die letztere (in geraden Erzeugenden) schneidet, während p innerhalb der Fläche gelegen ist, sobald π mit der letzteren nur den Mittelpunkt gemein hat. Hieraus folgt, dass von den drei Axen einer Kegelfläche immer eine ganz innerhalb der Fläche liegt, während die beiden anderen sich ausserhalb befinden.

Legt man durch die innerhalb einer Asymptoten-Kegelfläche befindliche Axe, welche auch eine Axe des zugehörigen Hyperboloides ist, schneidende Ebenen, so wird die Kegelfläche von den letzteren in geraden Erzeugenden und das Hyperboloid in Hyperbeln geschnitten, deren Asymptoten die eben erwähnten Erzeugenden sind. Es können nun zwei Fälle eintreten: Entweder werden alle

so erhaltenen Hyperbeln von der innerhalb der Asymptoten-Kegelfläche befindlichen Axe in reellen Punkten getroffen, oder es ist dies nicht der Fall. Findet das erstere statt, so liegt das Hyperboloid ganz innerhalb der Asymptoten-Kegelfläche und besteht, wie leicht einzusehen, aus zwei getrennten Theilen, im zweiten Falle befinden sich alle Punkte des Hyperboloides ausserhalb der Asymptoten-Kegelfläche und das Hyperboloid ist ein einfaches, nur aus einem Flächentheile bestehendes.

Da man jeden Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung, welcher die Fläche in reellen Punkten schneidet, einen eigentlichen nennt, während solche Durchmesser, welche keine reellen Punkte mit der Fläche gemein haben, uneigentliche genannt werden, so hat dem Vorhergehenden zufolge, das einfache Hyperboloid zwei eigentliche und eine uneigentliche und das zweifache Hyperboloid eine eigentliche und zwei uneigentliche Axen.

Haben ein einfaches und ein zweifaches Hyperboloid dieselbe Asymptoten-Kegelfläche, so schneidet jede Ebene, welche durch die innerhalb der letzteren Fläche befindliche Axe geht, die beiden Hyperboloide in conjugirten Hyperbeln. Denn die beiden Schnittcurven haben dieselben Asymptoten, nämlich die in der schneidenden Ebene befindlichen geraden Erzeugenden der Asymptoten-Kegelfläche, und dieselben conjugirten Durchmesser.

Das einfache Hyperboloid wird von allen Ebenen, welche senkrecht auf der uneigentlichen Axe stehen, in Ellipsen geschnitten, während man bei dem zweifachen Hyperboloide durch schneidende Ebenen, welche auf der eigentlichen Axe senkrecht stehen, elliptische Schnitte erhält.

Jener Diametralschnitt eines einfachen Hyperboloides, in welchem die beiden eigentlichen Axen liegen, wird die Kehlellipse genannt. Ist dieser Schnitt ein Kreis, so muss die Fläche eine Rotationsfläche sein (Satz 38, 4. Abschnitt), welche man sich auch durch die Rotation einer Hyperbel um ihre uneigentliche Axe, oder durch Rotation einer geraden Erzeugenden des Hyperboloides um die uneigentliche Axe des letzteren entstanden denken kann.

Fünfter Abschnitt.

Das räumliche System.

---

a) Collineation und Reciprocität räumlicher Systeme.

Sind zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 derart auf einander bezogen, dass jedem Punkte P in Σ ein Punkt P_1 in Σ_1 und jeder durch P gehenden Geraden oder Ebene in Σ beziehungsweise eine durch P_1 gehende Gerade oder Ebene in Σ_1 entspricht, so nennt man die beiden Systeme collinear verwandt.

Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 sind reciprok verwandt, wenn jedem Punkte P in Σ eine Ebene π_1 in Σ_1 und jeder durch P gehenden Geraden oder Ebene in Σ beziehungsweise eine in π_1 liegende Gerade oder ein in π_1 befindlicher Punkt von Σ_1 entspricht.

Aus diesen Erklärungen folgt der Satz:

1. Sind zwei räumliche Systeme mit einem dritten collinear oder reciprok verwandt, so sind sie untereinander collinear und ist von zwei collinearen räumlichen Systemen das eine einem dritten reciprok, so ist es auch das andere.

Die obigen Erklärungen lassen uns auch schliessen, dass je zwei Grundgebilde der zweiten Stufe, welche aus entsprechenden Elementen collinearer oder reciproker räumlicher Systeme bestehen, collinear, beziehungsweise reciprok verwandt sind und dass also je zwei Grundgebilde der ersten Stufe, deren Elemente sich in collinearen oder reciproken räumlichen Systemen entsprechen, projectivisch sein müssen (Sätze 5 und 47, 3. Abschnitt). Nachdem man je zwei solche Grundgebilde der ersten oder zweiten Stufe entsprechende Grundgebilde räumlicher Systeme nennt, so kann man sagen:

2. Je zwei Grundgebilde der zweiten Stufe, welche sich in collinearen oder reciproken räumlichen Systemen entsprechen, sind collinear, beziehungsweise reciprok, daher müssen je zwei entsprechende einförmige Grundgebilde von collinearen oder reciproken räumlichen Systemen projectivisch sein.

Mit Rücksicht auf die Eigenschaften collinearer Grundgebilde der zweiten Stufe können wir behaupten, dass wenn a, a_1 zwei entsprechende Gerade und α, α_1 zwei entsprechende Ebenen collinearer räumlicher Systeme sind, jedem Punkte von a oder α ein beziehungsweise in a_1 oder α_1 gelegener Punkt entspricht, sowie auch, dass wenn a in α liegt, a_1 der Ebene α_1 angehören muss. Dem Schnittpunkte zweier Geraden des einen Systemes entspricht der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden des anderen, die Durchschnittslinie zweier Ebenen entspricht der Durchschnittslinie der zwei entsprechenden Ebenen u. s. w. Sind Σ und Σ_1 reciproke räumliche Systeme und bezeichnet man durch a eine beliebige Gerade in Σ, welche der Geraden a_1 in Σ_1 entspricht, so muss, jedem in a befindlichen Punkte eine durch a_1 gehende Ebene, jeder durch a gehenden Ebene ein in a_1 gelegener Punkt entsprechen. Der Verbindungslinie zweier Punkte in Σ entspricht die Durchschnittslinie der zwei diesen Punkten entsprechenden Ebenen in Σ_1, dem Durchschnittspunkte zweier Geraden in Σ entspricht in Σ_1 jene Ebene, welche durch die zwei diesen Geraden entsprechenden Linien bestimmt wird, u. s. w.

Bezeichnen Σ und Σ_1 zwei collineare räumliche Systeme, so entspricht der unendlich fernen Ebene in Σ eine im allgemeinen in endlicher Entfernung gelegene Ebene in Σ_1 und ebenso der unendlich fernen Ebene in Σ_1 eine in endlicher Entfernung befindliche Ebene von Σ. Diese Ebenen collinearer räumlicher Systeme, welche der unendlich fernen Ebene entsprechen, werden Gegenebenen genannt. Die Richtigkeit der folgenden Sätze kann nun leicht nachgewiesen werden:

3. In zwei collinearen räumlichen Systemen Σ und Σ_1 entsprechen parallelen Geraden und Ebenen von Σ Gerade und Ebenen von Σ_1, welche sich in der Gegenebene von Σ_1 schneiden. Umgekehrt entsprechen Geraden und Ebenen, welche sich in der Gegenebene von Σ schneiden, parallele Gerade und Ebenen des Systemes Σ_1.

Hieraus folgt:

4. Sind Σ und Σ_1 zwei collineare räumliche Systeme und γ, γ' ihre Gegenebenen, so entsprechen allen zu γ parallelen Geraden und Ebenen in Σ beziehungsweise Gerade und Ebenen in Σ_1, welche der Ebene γ' parallel sind. Liegen γ und γ' in endlicher Entfernung, so entsprechen parallelen Geraden und Ebenen in Σ nur dann parallele Gerade und Ebenen in Σ_1, wenn erstere eine parallele Lage zur Gegenebene γ haben.

Aus diesem und dem obigem Satze 2 kann man schliessen:

5. In collinearen räumlichen Systemen sind je zwei entsprechende ebene Systeme, deren Träger zu den Gegenebenen parallel liegen, affin verwandt.

Die Gegenaxen von zwei ebenen Systemen, welche sich in collinearen räumlichen Systemen entsprechen, liegen nämlich, wie leicht einzusehen, in den Gegenebenen und bilden also die Durchschnittslinien der Träger der ebenen Systeme mit den zugehörigen Gegenebenen. Sind daher die Träger von zwei solchen Systemen parallel zu den Gegenebenen, so liegen die betreffenden Gegenaxen in unendlicher Entfernung und die Systeme müssen affin sein.

Aus dem Satze 5 ergibt sich:

6. Sind Σ und Σ_1 zwei collineare räumliche Systeme und γ, γ' ihre Gegenebenen, so entsprechen allen Geraden in Σ, welche unter sich und zur Ebene γ parallel laufen, Gerade in Σ_1, welche ebenfalls unter sich und zur Gegenebene γ' parallel sein müssen.

Der folgende Satz kann leicht aus dem zweiten Theile des Satzes 4 gefolgert werden:

7. Zwei ebene Systeme, welche sich in collinearen räumlichen Systemen entsprechen, deren Gegenebenen in endlicher Entfernung liegen, können nur dann affin sein, wenn ihre Träger zu den Gegenebenen parallel sind.

In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht der unendlich fernen Ebene, als Element des einen Systemes betrachtet, ein Punkt des anderen, welcher der Mittelpunkt des letzteren genannt wird. Jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht, wird ein Durchmesser und jede durch den Mittelpunkt gehende Ebene eine Diametralebene genannt. Aus diesen und den obigen Erklärungen über reciproke räumliche Systeme ergibt sich der Satz:

8. In zwei reciproken räumlichen Systemen entsprechen parallelen Geraden des einen Systemes Gerade im anderen Systeme, welche ein und derselben Diametralebene angehören.

Diese Diametralebene entspricht nämlich dem unendlich fernen Durchschnittspunkte der parallelen Geraden.

9. In zwei reciproken räumlichen Systemen entsprechen parallelen Ebenen des einen Systemes Punkte des anderen, welche auf ein und demselben Durchmesser liegen.

Denn die Durchschnittslinie der parallelen Ebenen gehört der unendlich fernen Ebene an, daher muss ihr eine durch den Mittelpunkt gehenhe Gerade entsprechen.

Die Sätze 8 und 9 gelten selbstverständlich auch in ihrer Umkehrung.

Fallen zwei entsprechende Elemente collinearer räumlicher Systeme zusammen, so sagt man, dass letztere diese Elemente, welche dann eigentlich nur ein einziges bilden, entsprechend gemein haben. Kommen in zwei collinearen räumlichen Systemen entsprechende Grundgebilde der ersten oder zweiten Stufe vor, deren sämmtliche entsprechende Elemente coincidiren, so

sagt man ebenfalls, dass die räumlichen Systeme diese Gebilde entsprechend gemein haben.

Mit Hilfe des Satzes 7, 3. Abschnitt, und des obigen Satzes 2 lässt sich nun der folgende leicht nachweisen:

10. **Haben zwei räumliche Systeme fünf Punkte, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, oder fünf Ebenen, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein und sind somit identisch.**

Um diese Behauptung zu rechtfertigen nennen wir die beiden räumlichen Systeme Σ und Σ_1 und die fünf Punkte, welche sich selbst entsprechen, $ABCDE$. Die Verbindungslinie des Punktes A mit allen übrigen Punkten, des Systemes Σ bilden einen Strahlenbündel s, welcher mit jenem Bündel s_1 in Σ_1 identisch ist, der seinen Mittelpunkt ebenfalls in A hat und aus den Verbindungslinien des Punktes A mit sämmtlichen Punkten von Σ_1 besteht. Denn s und s_1 sind nach Satz 2, 5. Abschnitt, collinear und haben die vier Strahlen AB, AC, AD und AE entsprechend gemein (Satz 7, 3. Abschnitt). Es müssen daher auch jene zwei in Σ und Σ_1 sich entsprechenden Strahlenbündel s' und s'_1, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt B ist, identisch sein, woraus folgt, nachdem jeder Punkt von Σ als Schnittpunkt zweier Strahlen von s und s' betrachtet werden kann, dass alle Punkte von Σ mit den ihnen entsprechenden Punkten von Σ_1 zusammenfallen. — Der Beweis für den Fall, als die räumlichen Systeme fünf Ebenen entsprechend gemein haben, kann in ganz ähnlicher Weise geführt werden.

Der folgende Satz lässt sich mit Benützung des Satzes 8, 3. Abschnitt, und des obigen Satzes 2 ebenfalls leicht beweisen.

11. **Will man zwei räumliche Systeme collinear auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben fünf Punkte, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, oder fünf Ebenen von denen keine vier durch denselben Punkt gehen, beliebig wählen und einander als entsprechend zuweisen. Jedem Elemente des einen Systemes entspricht dann ein einziges, durch diese Annahmen vollständig bestimmtes Element des anderen.**

Heissen die beiden räumlichen Systeme Σ und Σ_1, die in Σ gewählten fünf Punkte $ABCDE$ und die fünf Punkte in Σ_1, welche den eben genannten als entsprechend zugewiesen wurden, $A_1B_1C_1D_1E_1$, so sind die sich entsprechenden Strahlenbündel s und s_1, deren Mittelpunkte sich in A und A_1 befinden, nach Satz 8, 3. Abschnitt, vollkommen bestimmt, da die vier Strahlen AB, AC, AD, AE in s den vier Strahlen A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1, A_1E_1 in s_1 zugewiesen erscheinen. Ebenso sind die in Σ und Σ_1 sich entsprechenden Strahlenbündel s' und s'_1, welche ihre Mittelpunkte in B und B_1 haben, vollkommen bestimmt,

folglich entspricht jedem Punkte P in Σ, da man P als Schnittpunkt zweier Strahlen p und q von s und s' ansehen kann, ein ganz bestimmter Punkt P_1 in Σ_1 und zwar der Schnittpunkt der den Geraden p und q entsprechenden Strahlen der Bündel s_1 und s'_1. — Auf ganz ähnliche Weise lässt sich obiger Satz für den Fall nachweisen, in welchem fünf beliebige Ebenen in Σ ebenso vielen Ebenen in Σ_1 als entsprechend zugewiesen werden.

12. Will man zwei räumliche Systeme reciprok auf einander beziehen, so kann man in dem einen fünf Punkte beliebig wählen, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, und ihnen fünf Ebenen des anderen Systemes, von denen keine vier durch denselben Punkt gehen, als entsprechend zuweisen. Jedem Elemente des einen Systemes entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des anderen.

Der Beweis hiefür kann auf folgende Art gegeben werden: Σ und Σ_1 seien die zwei räumlichen Systeme, $ABCDE$ die fünf Punkte von Σ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ die fünf diesen Punkten als entsprechend zugewiesenen Ebenen in Σ_1. Der Strahlenbündel, welcher aus den Verbindungslinien des Punktes A mit sämmtlichen übrigen Punkten von Σ besteht, heisse s und das diesem Bündel entsprechende ebene System in Σ_1, dessen Träger die Ebene α bildet, nennen wir e_1. Nach Satz 2, 5. Abschnitt, sind s und e_1 reciprok verwandt und jedem Elemente von s entspricht ein durch die Annahmen vollkommen bestimmtes Element in e_1, nachdem die vier Strahlen AB, AC, AD, AE den vier Geraden entsprechen müssen, in welchen α die Ebenen $\beta\gamma\delta\varepsilon$ schneidet (Satz 8, 3. Abschnitt). Der Strahlenbündel s', dessen Strahlen die Verbindungslinien des Punktes B mit allen übrigen Punkten von Σ bilden, ist ferner dem ihm entsprechenden ebenen Systeme e_1' in Σ_1 reciprok verwandt, dessen Träger die Ebene β bildet, und jedem Elemente von s' entspricht ein vollkommen bestimmtes Element von e_1'. Mann kann nun jeden Punkt von Σ als den Schnittpunkt zweier Strahlen p, q von s und s' betrachten und da diesen Strahlen vollkommen bestimmte Gerade p_1, q_1 in e_1 und e'_1 entsprechen, so muss jedem solchem Punkte eine durch p_1 und q_1 unzweideutig bestimmte Ebene in Σ_1 zugewiesen werden.

Von zwei collinearen räumlichen Systemen sagt man, dass sie perspectivisch gegen einander liegen, wenn sie ein ebenes System e und einen Strahlenbündel s entsprechend gemein haben. Der Träger des ebenen Systemes e wird die Collineationsebene, der Mittelpunkt des Bündels s das Collineationscentrum und jeder Strahl von s ein Collineationsstrahl genannt.

13. In zwei perspectivisch liegenden räumlichen Systemen schneiden sich je zwei entsprechende Gerade, sowie auch je zwei entsprechende Ebenen in der Colli-

neationsebene. Je zwei entsprechende Punkte liegen auf demselben Collineationsstrahle und je zwei entsprechende Gerade in derselben durch das Collineationscentrum gehenden Ebene.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass jedes in der Collineationsebene befindliche, sowie auch jedes durch das Collineationscentrum gehende Element der beiden räumlichen Systeme sich selbst entspricht.

Aus diesem Satze und den im 3. Abschnitte über die perspectivische Lage der Grundgebilde zweiter Stufe gegebenen Erklärungen folgt:

14. Je zwei Grundgebilde der ersten oder zweiten Stufe, welche sich in perspectivisch liegenden räumlichen Systemen entsprechen, liegen ebenfalls perspectivisch.

Die Collineationsaxe von zwei ebenen Systemen, welche sich in perspectivisch liegenden räumlichen Systemen entsprechen, liegt in der Collineationsebene und ihr Collineationscentrum fällt mit jenem der räumlichen Systeme zusammen. Der perspectivische Durchschnitt zweier Strahlenbündel, die sich in zwei solchen räumlichen Systemen entsprechen, befindet sich in der Collineationsebene und die Axe jenes Ebenenbüschels, welchen die Bündel entsprechend gemein haben, geht durch das Collineationscentrum.

Wird ein Strahlenbündel s, der aus den Verbindungslinien eines Punktes P mit sämmtlichen Punkten eines räumlichen Systemes Σ besteht, durch irgend eine Ebene α geschnitten, so erhält man als Schnitt ein ebenes System, welches man eine Projection des Systemes Σ nennt.

Den Strahlenbündel s bezeichnet man als einen Schein von Σ, oder auch als den projicirenden Bündel; jeden Strahl desselben als einen Projectionsstrahl, der Punkt P wird das Projectionscentrum und die Ebene α die Projectionsebene genannt. Liegt P in endlicher Entfernung, so heisst die Projection eine centrale, ist P unendlich ferne gelegen, so geht die centrale in eine Parallelprojection über, welche man eine schiefe oder orthogonale nennt, je nachdem die Projectionsstrahlen auf der Projectionsebene schief oder senkrecht stehen.

Liegt das Collineationscentrum zweier räumlicher Systeme in endlicher Entfernung, so nennt man jedes der beiden Systeme eine räumliche Centralprojection des anderen, und befindet sich das Collineationscentrum in unendlicher Entfernung, sind also alle Collineationsstrahlen unter einander parallel, so heisst jedes System eine räumliche Parallelprojection des anderen.

Sowie man unter gewissen Voraussetzungen die Projection irgend eines räumlichen Systemes Σ auf einer Ebene als ein Bild von Σ bezeichnet, so nennt man auch die räumliche Projection von Σ eine räumliche Abbildung oder ein Reliefbild des räumlichen Systemes.

15. **Sind Σ und Σ_1 zwei perspectivisch liegende collineare räumliche Systeme, P und P_1 irgend zwei sich entsprechende Punkte derselben, und projicirt man Σ und Σ_1 beziehungsweise aus P und P_1 auf irgend eine Ebene α, so erhält man als Projectionen zwei perspectivisch liegende ebene Systeme. Coincidirt α mit der Collineationsebene, oder fällt P, also auch P_1 mit dem Collineationscentrum zusammen, so sind die beiden Projectionen identisch.**

Der Beweis für den ersten Theil dieses Satzes ergibt sich aus Folgendem: Die beiden projicirenden Bündel sind entsprechende Gebilde der zwei räumlichen Systeme, daher liegen sie nach Satz 14, 5. Abschnitt, perspectivisch und haben also einen Ebenenbüschel E entsprechend gemein, dessen Axe der Collineationsstrahl PP_1 ist. Die Ebene α schneidet nun die beiden projicirenden Bündel in zwei collinearen ebenen Systemen e und e_1 und den Ebenenbüschel E in einem Strahlenbüschel S, welchen die Systeme e und e_1 entsprechend gemein haben, daher müssen diese Systeme perspectivisch liegen (Satz 13, 3. Abschnitt). — Fällt α mit der Collineationsebene zusammen, so werden e und e_1 identisch, nachdem je zwei entsprechende Strahlen der projicirenden Bündel dem Satze 13, 5. Abschnitt, zufolge sich in der Collineationsebene schneiden. — Coincidiren P und P_1 mit dem Collineationscentrum, so sind die beiden projicirenden Bündel identisch, nachdem sie alle ihre Strahlen (Collineationsstrahlen) entsprechend gemein haben, woraus folgt, dass auch die Schnitte derselben mit irgend einer Ebene identisch sein müssen.

Liegt der Punkt P in der Gegenebene von Σ, so muss P_1 unendlich entfernt sein und der Bündel, welcher das System Σ_1 projicirt, ist dann ein **Parallelstrahlenbündel**. Aus dem obigen Satze folgt demnach:

16. **Liegen zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 perspectivisch und projicirt man das eine, etwa Σ_1 durch parallele Strahlen auf die Collineationsebene, so ist diese Parallelprojection identisch mit der centralen Projection von Σ, deren Centrum in der Gegenebene von Σ und zugleich in jenem Collineationsstrahle liegt, der dem projicirenden Parallelstrahlenbündel parallel läuft.**

Bezeichnet Σ irgend ein räumliches Object, Σ_1 dessen Reliefbild, und liegen Σ und Σ_1 perspectivisch, so kann man diesem Satze zufolge die orthogonale Projection (im allgemeinen jede Parallelprojection) des Reliefbildes auf der Collineationsebene erhalten, indem man eine centrale Projection des Objectes Σ auf der Collineationsebene construirt. Das Centrum dieser centralen Projection liegt in der Gegenebene von Σ und zugleich in jenem Collineationsstrahle, welcher auf der Collineationsebene senkrecht steht. *)

---

*) Näheres über die Construction von Reliefbildern (und zwar ohne Benützung der Lehren der neueren Geometrie) findet man in einem vom Verfasser des vor-

Aus dem Umstande, dass jede Gerade, welche in der Collineationsebene liegt, sich selbst entspricht und dass eine Gerade, welche sich in einer Gegenebene befindet nur einer unendlich fernen Geraden entsprechen kann folgt, dass die Collineationsebene von den Gegenebenen in unendlicher Entfernung geschnitten wird, dass also die beiden Gegenebenen und die Collineationsebene zu einander parallel sind.

Ist a irgend eine durch das Collineationscentrum gehende Gerade, also ein Collineationsstrahl, so bilden alle Punkte von Σ, welche in a gelegen sind, und alle diesen Punkten entsprechenden von Σ_1 zwei conjectivische Punktreihen, deren Doppelpunkte das Collineationscentrum und der Schnittpunkt von a mit der Collineationsebene bilden (Sätze 13 und 14, 5. Abschnitt). Die Gegenpunkte dieser Reihen liegen, wie leicht einzusehen, in den Gegenebenen. Hieraus und aus den Sätzen 38 und 39, 1. Abschnitt, folgt nun, dass der Halbirungspunkt des Abstandes der beiden Gegenebenen auch den Abstand des Collineationscentrums von der Collineationsebene halbirt.

Die beiden conjectivischen Punktreihen können entgegengesetzt, oder einstimmig verlaufen. Im ersteren Falle sagt man, dass die zwei räumlichen Systeme **entgegengesetzt**, im zweiten, dass sie **einstimmig perspectivisch** liegen. Die conjectivischen Reihen, deren Träger Collineationsstrahlen bilden, müssen entweder alle entgegengesetzt, oder alle einstimmig verlaufen, denn sind R und R_1 zwei solche auf einem Collineationsstrahle a gelegene Reihen und verlaufen dieselben etwa entgegengesetzt, so liegen die Gegenebenen zwischen dem Collineationscentrum und der Collineationsebene (Satz 38, 1. Abschnitt), daher befinden sich die Gegenpunkte nicht nur der Reihen R und R_1, sondern auch von irgend zwei auf einem von a verschiedenen Collineationsstrahle gelegenen Reihen zwischen den Doppelpunkten, woraus geschlossen werden kann, dass letztere Reihen ebenfalls entgegengesetzt verlaufen. — Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

17. **Die Gegenebenen perspectivisch liegender räumlicher Systeme sind parallel zur Collineationsebene. Die eine von diesen Ebenen ist vom Collineationscentrum eben so weit entfernt als die andere von der Collineationsebene. Je nachdem die zwei räumlichen Systeme entgegengesetzt, oder einstimmig verlaufen, befinden sich das Collineationscentrum und die Collineationsebene ausserhalb, oder zwischen den beiden Gegenebenen.**

Schneidet man zwei perspectivisch liegende räumliche Systeme Σ und Σ_1 durch eine Ebene, welche durch das Collineationscentrum geht, so erhält man als Schnitt zwei in derselben Ebene befindliche collineare Systeme (Satz 14, 5. Abschnitt). Die Gegenaxen dieser Systeme liegen in den Gegenebenen, das

liegenden Buches veröffentlichten Werkchen: „**Grundzüge der Reliefperspective**". (Wien, 1868, bei L. W. **Seidel & Sohn**).

Collineationscentrum fällt mit jenem der räumlichen Systeme zusammen und die Collineationsaxe befindet sich in der Collineationsebene. Der Modolus der zwei ebenen Systeme ist nach Satz 18, 3. Abschnitt, gleich dem Verhältniss der Abstände der Gegenaxen von der Collineationsaxe, negativ genommen; daher muss der Modolus zweier ebener Systeme, welche man durch den Schnitt irgend einer durch das Collineationscentrum von Σ und Σ_1 gehenden Ebene erhält, gleich dem negativ genommenen Verhältniss der Abstände der Gegenebenen von der Collineationsebene sein. Dieses Verhältniss wird auch der Modolus der beiden räumlichen Systeme Σ und Σ_1 genannt. Mit Rücksicht auf den eben erwähnten Satz können wir nun behaupten:

18. Sind A und A_1 irgend zwei entsprechende Punkte perspectivisch liegender räumlicher Systeme, deren Collineationscentrum O ist, und bezeichnet man den Werth des Verhältnisses $\frac{AO}{A_1O}$ durch m, ferner den Werth des Verhältnisses der Abstände, welche A und A_1 von der Collineationsebene haben, durch n, so hat $\frac{m}{n}$ für jedes Paar entsprechender Punkte einen constanten Werth, der gleich dem Modolus der beiden räumlichen Systeme ist.

Haben zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 ein ebenes System e entsprechend gemein, so müssen sie auch einen Strahlenbündel entsprechend gemein haben, also perspectivisch liegen. Dies lässt sich wie folgt nachweisen. Sind e_1 und e_2 irgend zwei ebene Systeme, welche sich in Σ und Σ_1 entsprechen, so müssen diese Systeme collinear sein und sich in einer Geraden des Systemes e schneiden, weil jedes Element von e unserer Voraussetzung gemäss ein sich selbst entsprechendes ist. Die Systeme e_1 und e_2 haben daher eine Punktreihe entsprechend gemein und müssen nach Satz 13, 3. Abschnitt, perspectivisch liegen. Der Strahlenbündel s, dessen Schnitte e_1 und e_2 bilden, ist jener, welchen Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben, denn jeder Strahl von s verbindet ein in e gelegenes sich selbst entsprechendes Element mit zwei sich entsprechenden Elementen von e_1 und e_2, woraus man schliessen kann, dass jeder solche Strahl sich selbst entspricht. — Haben zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 einen Strahlenbündel s entsprechend gemein, so müssen sie auch ein ebenes System entsprechend gemein haben, also perspectivisch liegen, wie aus Folgendem hervorgeht. Irgend zwei sich in Σ und Σ_1 entsprechende Strahlenbündel s_1 und s_2 sind collinear verwandt und haben einen Ebenenbüschel entsprechend gemein. Letzteres ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte von s_1 und s_2 einen Strahl des Bündels s bilden muss und dass also jede durch diese Verbindungslinie gehende Ebene sich selbst entspricht. Nach Satz 13, 3. Abschnitt, liegen demnach s_1 und s_2 perspectivisch und sind Scheine eines und desselben ebenen Systemes e. Dieses

System ist dasjenige, welches Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben. In irgend einem Punkte A desselben schneidet nämlich ein sich selbst entsprechender Strahl a von s einen Strahl a_1 von s_1 und zugleich auch einen Strahl a_2 von s_2; daher entspricht der Punkt A sich selbst, nachdem der Schnittpunkt von a und a_1 dem Schnittpunkte von a und a_2 entsprechen muss. — Aus dieser Untersuchung ergibt sich nun der Satz:

19. Haben zwei collineare räumliche Systeme ein ebenes System entsprechend gemein, so haben sie auch einen Strahlenbündel entsprechend gemein und umgekehrt. Die beiden räumlichen Systeme liegen daher in jedem dieser zwei Fälle perspectivisch.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich der folgende leicht nachweisen, welcher dem Satze 14, 3. Abschnitt, analog ist:

20. Haben zwei Tetraeder, deren Eckpunkte $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ und deren Begrenzungsebenen $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ heissen, eine solche gegenseitige Lage, dass die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 in demselben Punkte zusammentreffen, so liegen die vier Geraden, in denen sich die Ebenen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ und $\delta\delta_1$ schneiden, in ein und derselben Ebene. Umgekehrt schneiden sich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 in demselben Punkte, wenn die Durchschnittslinien der Ebenen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ und $\delta\delta_1$ in derselben Ebene liegen.

Gehen nämlich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 durch denselben Punkt O, so kann man die beiden Tetraeder als Theile von zwei collinearen räumlichen Systemen ansehen (Satz 11, 5. Abschnitt), welche einen aus den genannten vier Geraden bestehenden Strahlenbündel entsprechend gemein haben, folglich perspectivisch liegen müssen. Das Collineationscentrum befindet sich in O. — Auf ganz ähnliche Weise lässt sich der zweite Theil des in Rede stehenden Satzes rechtfertigen.

Will man zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 perspectivisch auf einander beziehen, so kann man das Collineationscentrum O und die Collineationsebene e, sowie auch zwei Punkte A und A_1, welche einander entsprechen sollen, also in demselben Collineationsstrahle liegen müssen, beliebig annehmen; jedem Elemente des einen Systems entspricht dann ein durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des anderen. Durch drei Punkte BCD wird nämlich die Collineationsebene e bestimmt und den fünf Punkten $ABCDO$ können nach Satz 11, 5 Abschnitt, die Punkte A_1 $BCDO$ als entsprechend zugewiesen werden.

Liegen zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 perspectivisch und soll man zu irgend einer Geraden a von Σ die ihr entsprechende a_1 in Σ_1 ermitteln, so kann man wie folgt verfahren. Man sucht den Durchschnittspunkt D der Geraden a mit der Collineationsebene e; dieser Punkt muss auch ein

Punkt von a_1 sein. Dann zieht man durch das Collineationscentrum O eine Parallele zu a und verbindet den Schnittpunkt G' dieser Parallelen und der Gegenebene von Σ_1 mit D. Die Gerade DG' ist dann die gesuchte a_1; denn jene Gerade, welche durch O parallel zu a gezogen wurde, ist der durch den unendlich fernen Punkt von a gehende Collineationsstrahl und dieser unendlich ferne Punkt entspricht dem Punkte G', daher muss DG' die der Geraden a entsprechende sein.

Soll der Punkt A_1 in Σ_1 gefunden werden, welcher irgend einem bestimmten Punkte A in Σ entspricht, so führt im allgemeinen folgende Construction zum Ziele. Man zieht durch A zwei beliebige Gerade a und b, ermittelt die ihnen entsprechenden Geraden a_1 und b_1 in Σ_1 und bestimmt den Schnittpunkt von a_1 und b_1. Dieser Punkt ist dann wie leicht einzusehen der gesuchte. Um die Construction zu vereinfachen, kann man eine der beiden Geraden a, b durch den Collineationsstrahl AO ersetzen, wodurch man sich die Bestimmung einer von den zwei Geraden a_1, b_1 erspart.

Um zu einer Ebene α von Σ die entsprechende α_1 in Σ_1 zu erhalten bestimmt man die Durchschnittslinie d der Ebene α mit der Collineationsebene, legt durch O eine parallele Ebene zu α und sucht den Durchschnitt g' dieser Ebene mit der Gegenebene von Σ_1. Jene Ebene, welche durch die beiden parallelen Geraden d und g' bestimmmt wird, ist die gesuchte α_1, denn d entspricht sich selbst und die Gerade g' entspricht der unendlich fernen Geraden von α. —

Nachdem zwei collineare räumliche Systeme identisch sein müssen, wenn sie fünf Punkte entsprechend gemein haben, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, so gibt es in zwei solchen, von einander verschiedenen Systemen, auch wenn sie unendlich viele Punkte entsprechend gemein haben, keine fünf sich selbst entsprechende Punkte, unter denen nicht vier derselben Ebene angehören würden. Haben zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 vier nicht in derselben Ebene liegende Punkte entsprechend gemein, so muss durch je drei dieser Punkte eine sich selbst entsprechende Ebene gehen, die beiden Systeme haben also dann vier Punkte und vier Ebenen — die Ecken und Seitenflächen eines Tetraeders — entsprechend gemein. Liegen vier sich selbst entsprechende Punkte in derselben Ebene e, jedoch derart, dass keine drei sich auf derselben Geraden befinden, so haben Σ und Σ_1 alle Elemente von e entsprechend gemein (Satz 7, 3. Abschnitt) und liegen somit perspectivisch. Dies ist auch dann der Fall, wenn in Σ und Σ_1 vier sich selbst entsprechende Ebenen vorhanden sind, von denen keine drei sich in derselben Geraden schneiden, welche aber alle durch denselben Punkt gehen. — Σ und Σ_1 können auch zwei Punktreihen entsprechend gemein haben, ohne desshalb identisch zu sein; erst wenn sie ausser den Elementen dieser Reihen noch einen Punkt entsprechend gemein haben, fallen nach Satz 10, 5. Abschnitt, alle entsprechenden Elemente von Σ und Σ_1 zusammen. Schneiden sich die beiden Punktreihen, so

ist die durch ihre Träger bestimmte Ebene eine sich selbst entsprechende und jedes Element dieser Ebene muss nach Satz 7, 3. Abschnitt, mit dem ihm entsprechenden zusammenfallen. Σ und Σ_1 haben dann ein ebenes System entsprechend gemein und liegen perspectivisch.

Da es uns zu weit führen würde, alle möglichen Fälle, in denen zwei collineare räumliche Systeme zwei oder mehrere ihrer Elemente entsprechend gemein haben, zu erörtern, so bemerken wir über diesen Gegenstand nur noch Folgendes: Haben Σ und Σ_1 keinen Punkt entsprechend gemein, so können sie auch keine Ebene entsprechend gemein haben; denn jede sich selbst entsprechende Ebene ist der Träger von zwei collinearen ebenen Systemen, in denen es nach Satz 19, 3. Abschnitt, immer einen sich selbst entsprechenden Punkt gibt. Ist umgekehrt keine sich selbst entsprechende Ebene vorhanden, so gibt es auch keinen sich selbst entsprechenden Punkt; denn jeder solche Punkt ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt von zwei sich in Σ und Σ_1 entsprechenden, also collinearen Strahlenbündeln und in diesen Bündeln müsste es mindestens eine sich selbst entsprechende Ebene geben. Aus dem eben erwähnten Satze lässt sich auch schliessen, dass wenn Σ und Σ_1 einen Punkt entsprechend gemein haben, immer auch eine sich selbst entsprechende Ebene und Gerade vorhanden sein müssen und dass wenn in Σ und Σ_1 eine sich selbst entsprechende Ebene existirt, es immer auch mindestens einen Punkt und eine Gerade geben muss, welche sich selbst entsprechen.

Wir wollen nun untersuchen, welche gegenseitige Lage in zwei r e c i p r o k e n räumlichen Systemen Σ und Σ_1 alle Punkte haben, welche in der ihnen entsprechenden Ebene liegen, und alle Ebenen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen.

Ist α irgend eine Ebene von Σ, welche durch den ihr entsprechenden Punkt A_1 in Σ_1 geht, so muss dem Punkte A_1, als Element von Σ betrachtet, eine Ebene in Σ_1 entsprechen, welche durch den der Ebene α entsprechenden Punkt, nämlich durch A_1 geht, weil A_1 in α liegt. Der Punkt A_1 befindet sich also in der ihm entsprechenden Ebene, ob man ihn als Element von Σ oder Σ_1 betrachtet. Eine analoge Beziehung besteht auch für jede Ebene, welche durch den ihr entsprechenden Punkt geht, wie man sich leicht überzeugen kann, daher gilt der Satz:

21. In zwei reciproken räumlichen Systemen ist jeder Punkt des einen Systemes, welcher auf der ihm entsprechenden Ebene des andern liegt, auch als Punkt des andern Systemes auf der ihm entsprechenden Ebene gelegen und jede Ebene, welche als Element des einen Systemes durch den ihr entsprechenden Punkt geht, enthält auch als Element des andern Systemes betrachtet jenen Punkt, der ihr entspricht.

A sei irgend ein Punkt in Σ und α_1 die ihm entsprechende Ebene in Σ_1. Nach Satz 2, 5. Abschnitt, muss der in Σ befindliche Strahlenbündel s mit dem Mittelpunkte A jenem ebenen Systeme σ_1 reciprok verwandt sein, dessen Träger α_1 ist und welches durch die den Ebenen von s entsprechenden Punkte gebildet wird. Die Ebene α_1 schneidet den Bündel s in einem ebenen Systeme σ, welches mit σ_1 reciprok verwandt ist, und da σ und σ_1 in derselben Ebene liegen, so gilt für dieselben der Satz 60, 3. Abschnitt. Diesem Satze zufolge gehören alle Punkte von α_1, welche in den ihnen entsprechenden Geraden liegen, im allgemeinen einem Kegelschnitte k an und alle Geraden von α_1, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, berühren einen Kegelschnitt k_1. Diese zwei Kegelschnitte sind entweder beide reell oder beide imaginär und berühren sich im allgemeinen in zwei reellen oder imaginären Punkten. Kein Punkt der Curve k_1 liegt ausserhalb k. Da nun in jeder beliebigen Ebene α_1 sich zwei solche Kegelschnitte ergeben, so kann man schliessen, dass sämmtliche Punkte von Σ und Σ_1, welche auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, einer Fläche zweiter Ordnung angehören, weil nur eine Fläche zweiter Ordnung durch jede beliebige Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten werden kann. Es gilt somit der Satz:

22. **Sämmtliche Punkte, welche in zwei reciproken räumlichen Systemen auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, gehören im allgemeinen einer Fläche zweiter Ordnung an und alle Ebenen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, berühren eine Fläche zweiter Ordnung.**

Wir geben hier noch einige Definitionen über räumliche Gebilde.

Ein vollständiges $n$eck im Raume besteht aus n Punkten (Eckpunkten), von welchen im allgemeinen keine vier in derselben Ebene liegen, den Geraden (Kanten), deren jede zwei, und den Ebenen (Flächen), deren jede drei von den n Punkten verbindet. In jedem Eckpunkte schneiden sich $n-1$ Kanten, in jeder Kante $n-2$ Flächen, daher ist die Anzahl aller Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ und die Anzahl aller Flächen $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$.

Ein vollständiges $n$flach besteht aus n Ebenen (Flächen), von welchen im allgemeinen keine vier durch denselben Punkt gehen, den Geraden (Kanten), in deren jeder zwei, und den Punkten (Eckpunkten), in deren jedem drei von den n Ebenen sich schneiden. In jeder Fläche liegen $n-1$ Kanten, in jeder Kante $n-2$ Eckpunkte, daher ist die Anzahl aller Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ und die Anzahl aller Eckpunkte $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$.

Ist $n = 4$, so heisst das $n$eck Tetraeder und ist von dem Vierflach nicht verschieden.

b) Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz räumlicher Systeme.

Wenn zwei collineare räumliche Systeme die unendlich ferne Ebene entsprechend gemein haben, oder was dasselbe bedeutet, wenn ihre beiden Gegenebenen unendlich ferne liegen, so sagt man dass die zwei Systeme affin sind. Die Affinität ist also ein specieller Fall der Collineation. Aus dieser Erklärung und dem Satze 3, 5. Abschnitt, folgt unmittelbar:

23. In affinen räumlichen Systemen entsprechen parallelen Geraden oder parallelen Ebenen des einen Systemes parallele Gerade beziehungsweise parallele Ebenen des andern.

Aus dem Umstande, dass die Gegenaxen von je zwei ebenen Systemen, welche sich in collinearen räumlichen Systemen entsprechen, in den Gegenebenen von Σ und Σ_1 liegen müssen, kann man schliessen:

24. In affinen räumlichen Systemen sind je zwei entsprechende ebene Systeme affin und je zwei entsprechende Punktreihen einander ähnlich.

Nachdem in zwei affinen räumlichen Systemen die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht, so können nur mehr vier beliebige Ebenen des einen Systemes, welche nicht alle durch denselben Punkt gehen, vier solchen Ebenen des andern Systemes als entsprechend zugewiesen werden, wenn man zwei räumliche Systeme affin auf einander beziehen will (Satz 11, 5. Abschnitt). Es gilt also der Satz:

25. Will man zwei räumliche Systeme affin auf einander beziehen, so kann man in jedem derselben ein Tetraeder beliebig annehmen und die Seitenflächen des einen, den Seitenflächen des andern willkürlich als entsprechend zuweisen. Jedem Elemente des einen Systemes entspricht dann ein einziges, durch diese Annahmen vollkommen bestimmtes Element des andern.

Dass man statt der Seitenflächen auch die Eckpunkte der zwei Tetraeder einander beliebig als entsprechend zuweisen kann, ist selbstverständlich. Durch Zuweisung der Eckpunkte werden ja auch die Seitenflächen einander als entsprechend zugewiesen.

Sind $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ die Eckpunkte der zwei in den beiden räumlichen Systemen Σ und Σ_1 einander als entsprechend zugewiesenen Tetraeder und ist F irgend ein fünfter Punkt in Σ, so kann der diesem Punkte entsprechende in Σ_1 auf folgende Art bestimmt werden: Man legt durch F und irgend eine der Kanten des Tetraeders, etwa AB, eine Ebene. Der Schnittpunkt der letzteren mit der Kante CD, welche AB nicht schneidet, heisse G. In C_1D_1 ermittelt

man hierauf jenen Punkt G_1, der C_1D_1 in demselben Verhältnisse theilt, in welchem CD von G getheilt wird, so dass die Proportion erfüllt wird:

$$CG : GD = C_1G_1 : G_1D_1.$$

Endlich bestimmt man in der Ebene $A_1B_1G_1$ jenen Punkt F_1, welcher dem Punkte F entspricht, indem man ABG und $A_1B_1G_1$ als entsprechende Dreiecke zweier affiner ebener Systeme betrachtet und die im 3. Abschnitte (unter *b*) erklärte Construction durchführt. Dass durch diese Construction der dem Punkte F entsprechende F_1 erhalten wird, lässt sich mit Hilfe des obigen Satzes 24 leicht nachweisen.

Um zu irgend einer Geraden a des Systemes Σ die ihr entsprechende zu erhalten, wählt man zwei beliebige Punkte M, N in a und bestimmt auf die eben erklärte Weise zu diesen Punkten die entsprechenden M_1, N_1. Die Gerade M_1N_1 entspricht dann der Geraden a. — Soll jene Ebene in Σ_1 ermittelt werden, welche irgend einer gegebenen Ebene α des Systemes Σ entspricht, so wählt man drei beliebige Punkte in α — am einfachsten die Schnittpunkte MNO von α mit irgend drei Kanten des Tetraeders $ABCD$ — und bestimmt jene Punkte M_1, N_1, O_1, welche den Punkten M, N, O entsprechen. Dass die Ebene $M_1N_1O_1$ der Ebene α entsprechen muss, ist selbstverständlich.

Aus dem obigen Satze 25 ergeben sich unmittelbar die folgenden:

26. Zwei Tetraeder können immer als affine Gebilde betrachtet werden.

27. Zwei affine ebene Systeme sind identisch, wenn sie die Eckpunkte, also auch die Seitenflächen eines Tetraeders entsprechend gemein haben.

T und t seien zwei beliebige Tetraeder eines räumlichen Systemes Σ, welchen die Tetraeder T_1 und t_1 eines mit Σ collinear verwandten räumlichen Systemes Σ_1 entsprechen. G und g nennen wir zwei beliebige Seitenflächen beziehungsweise von T und t und die Flächen von T_1, t_1, welche den eben genannten entsprechen, bezeichnen wir durch G_1 und g_1. Die vier Tetraeder betrachten wir nun als Pyramiden, deren Grundflächen G, g, G_1 und g_1 sind, und legen durch die Spitzen dieser Pyramiden zu den Grundflächen parallele Ebenen. P sei ferner irgend ein Parallelepiped, von welchem vier Seitenflächen durch die Ebenen der Grundflächen G, g und die zu denselben parallel gelegten Ebenen gebildet werden; endlich nennen wir P_1 jenes Parallelepiped in Σ_1, welchem P entspricht. Nachdem T und P zwischen parallelen Ebenen liegen, also gleiche Höhe haben, so verhält sich der körperliche Inhalt von T zu jenem von P wie G zur dreifachen Grundfläche von P.*) Analoges gilt bezüglich T_1 und P_1. Die Grundflächen von T und P verhalten sich aber nach Satz 25, 3. Abschnitt, wie jene von T_1 und P_1, folglich besteht die Proportion:

*) Haben ein Parallelepiped und eine Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe, so ist der körperliche Inhalt des ersteren bekanntlich dreimal so gross, als jener der letzteren.



$$T : P = T_1 : P_1.$$

Auf ganz ähnliche Art kann man sich überzeugen, dass auch die Proportion

$$t : P = t_1 : P_1$$

bestehen muss: es ist also

$$T : T_1 = t : t_1,$$

oder $$T : t = T_1 : t_1.$$

Nachdem man sich nun jeden von Ebenen oder krummen Flächen begrenzten Körper aus Tetraedern zusammengesetzt denken kann, so folgt aus den letzteren zwei Proportionen:

28. In affinen räumlichen Systemen haben die Kubikinhalte von irgend zwei sich entsprechenden Körpern ein constantes Verhältniss und die Kubikinhalte von zwei beliebigen Körpern des einen Systemes verhalten sich zu einander wie jene der entsprechenden zwei Körper des anderen Systemes.

Sind T und T_1 irgend zwei Tetraeder, welche sich in collinearen räumlichen Systemen Σ und Σ_1 entsprechen, so müssen nach Satz 26, 3. Abschnitt, die Schwerpunkte irgend zweier entsprechender Seitenflächen von T und T_1 entsprechende Punkte sein. Verbindet man die Schwerpunkte von zwei Seitenflächen eines Tetraeders mit den diesen Flächen gegenüberliegenden Eckpunkten, so ergibt sich im Schnittpunkte der zwei Verbindungslinien bekanntlich der Schwerpunkt des Tetraeders. Werden nach dieser Methode die Schwerpunkte von T und T_1 bestimmt, und wählt man dabei entsprechende Seitenflächen von T und T_1, so ist leicht einzusehen, dass die Schwerpunkte der zwei Tetraeder sich entsprechen müssen. Da nun jeder beliebige Körper in Tetraeder zerlegt gedacht werden kann, so lässt sich hieraus schliessen:

29. In zwei affinen räumlichen Systemen sind die Schwerpunkte entsprechender Körper entsprechende Punkte.

Nach Satz 14, 5. Abschnitt, liegen je zwei Punktreihen, welche sich in perspectivischen räumlichen Systemen entsprechen, ebenfalls perspectivisch. Da nun je zwei entsprechende Punktreihen affiner räumlicher Systeme einander ähnlich sind (Satz 24), so muss das Projectionscentrum von je zwei solchen Reihen im allgemeinen unendlich weit entfernt sein, weil für ein in endlicher Entfernung gelegenes Centrum die Gegenpunkte beider Reihen nicht unendlich ferne liegen könnten. Nur wenn die Collineationsebene auch unendlich ferne gelegen ist, kann das Projectionscentrum in endlicher Entfernung liegen. Dieses Projectionscentrum ist aber identisch mit dem Collineationscentrum der zwei affinen räumlichen Systeme; wir können also behaupten: Das Collineationscentrum affiner räumlicher Systeme liegt immer unendlich ferne, wenn die Collineationsebene in endlicher Entfernung

gelegen ist. Befindet sich die Collineationsebene gleichfalls in unendlicher Entfernung, sind also je zwei entsprechende Gerade der räumlichen Systeme zu einander parallel, so kann das Collineationscentrum sowohl in endlicher, als auch in unendlicher Entfernung liegen.

Die Collineationsebene affiner räumlicher Systeme wird Affinitätsebene und jeder Collineationsstrahl solcher Systeme ein Affinitätsstrahl genannt. Im allgemeinen sind, wie eben erklärt wurde, alle Affinitätsstrahlen zu einander parallel und bilden jenen Parallel-Strahlenbündel, welcher für die beiden räumlichen Systeme projicirend ist. Dass man jedes von zwei solchen Systemen eine räumliche Parallel-Projection des anderen nennt, ist bereits erwähnt worden.

Gewöhnlich setzen wir voraus, wenn von perspectivisch liegenden affinen räumlichen Systemen die Rede ist, dass die Affinitätsebene in endlicher und das Affinitätscentrum in unendlicher Entfernung gelegen sei.

Sind AA_1 und BB_1 irgend zwei Paare von Punkten, die sich in affinen räumlichen Systemen, welche perspectivisch liegen entsprechen, so sind die Geraden AA_1 und BB_1 — als Affinitätsstrahlen — zu einander parallel und die Geraden AB, A_1B_1 müssen sich in ein und demselben Punkte der Affinitätsebene schneiden. Heissen daher M und N beziehungsweise die Schnittpunkte von AA_1 und BB_1 mit der Affinitätsebene, so besteht die Proportion:

$$AM : A_1M = BN : B_1N.$$

Wird das unendlich ferne Collineationscentrum durch O bezeichnet, so ist der Werth des Doppelverhältnisses

$$\frac{AO}{A_1O} : \frac{AM}{A_1M}$$

der Modulus der affinen Systeme (Satz 18, 5. Abschnitt) und nachdem $\frac{AO}{A_1O}$ gleich der Einheit ist, so muss

$$\frac{A_1M}{AM} = \frac{B_1M}{BM}$$

gleich diesem Modulus sein. Man kann also sagen:

30. In zwei affinen räumlichen Systemen, welche perspectivisch liegen, hat das Verhältniss der Abstände irgend zweier entsprechender Punkte von der Affinitätsebene einen constanten Werth, welcher gleich dem Modulus der beiden affinen Systeme ist.

Befinden sich zwei entsprechende Punkte der affinen Systeme zu verschiedenen Seiten der Affinitätsebene, so ist der Modulus negativ und man sagt, dass die beiden Systeme entgegengesetzt perspectivisch liegen. Befinden sich aber zwei entsprechende Punkte auf derselben Seite der

Affinitätsebene, so hat der Modulus einen positiven Werth und die beiden Systeme werden einstimmig perspectivisch liegend genannt.

Sind T und T_1 irgend zwei Tetraeder, welche sich in perspectivischen affinen Systemen entsprechen, so hat nach Satz 28, 5. Abschnitt, das Verhältniss der Kubikinhalte von T und T_1 einen constanten Werth. Dass dieser Werth gleich dem Modulus der beiden Systeme ist, ergibt sich aus Folgendem. Die Seitenflächen von T nennen wir $abcd$, die denselben entsprechenden von T_1 seien $a_1 b_1 c_1 d_1$ und die Eckpunkte, welche den Flächen d, d_1 gegenüberliegen, heissen wir D und D_1. Jedes von den drei Paaren sich entsprechender Ebenen aa_1, bb_1, cc_1 schneidet sich in einer Geraden, welche der Affinitätsebene angehört. Diese drei Durchschnittslinien bilden ein sich selbst entsprechendes Dreieck, dessen Eckpunkte wir MNO nennen wollen. Die zwei Tetraeder $DMNO$ und D_1MNO, welche wir der Kürze wegen beziehungsweise durch t und t_1 bezeichnen wollen, entsprechen sich; daher gilt dem eben erwähnten Satze zufolge die Proportion

$$T : T_1 = t : t_1.$$

Nachdem nun t und t_1 eine gemeinschaftliche Grundfläche MNO haben, so verhalten sich ihre Kubikinhalte wie ihre Höhen, nämlich wie die Abstände der entsprechenden Punkte D und D_1 von der Affinitätsebene. Das Verhältniss dieser Abstände ist aber gleich dem Modulus der beiden affinen Systeme, also muss das Verhältniss der Kubikinhalte von irgend zwei entsprechenden Tetraedern T und T_1 zweier perspectivisch liegender affiner Systeme gleich dem Modulus der letzteren sein. Hieraus folgt, da man sich jeden beliebigen Körper aus Tetraedern zusammengesetzt denken kann:

31. In zwei affinen räumlichen Systemen, welche perspectivisch liegen, ist das Verhältniss der Kubikinhalte von irgend zwei entsprechenden Körpern gleich dem Modulus der beiden Systeme.

Haben je zwei entsprechende Strecken affiner räumlicher Systemen dasselbe Längenverhältniss, so sagt man, dass die beiden Systeme einander ähnlich sind. Während also in affinen räumlichen Systemen nur solche entsprechende Strecken ein bestimmtes constantes Verhältniss haben, welche denselben sich entsprechenden Geraden parallel sind, so ist in ähnlichen räumlichen Systemen das Längenverhältniss von irgend zwei entsprechenden Strecken constant, welche auch ihre Richtungen sein mögen. Hieraus ist zu ersehen, dass die Aehnlichkeit einen speciellen Fall der Affinität bildet.

Aus dem Umstande, dass je zwei entsprechende Strecken ähnlicher räumlicher Systeme ein constantes Verhältniss haben folgt, dass je zwei entsprechende Dreiecke solcher Systeme ähnlich sein müssen. Daher sind in ähnlichen räumlichen Systemen je zwei entsprechende Winkel gleich gross und je zwei entsprechende Strahlenbüschel und Strahlenbündel congruent.

Wenn zwei ähnliche räumliche Systeme perspectivisch liegen, so haben sie im allgemeinen eine in unendlicher Entfernung liegende Collineationsebene; denn würde diese Ebene sich in endlicher Entfernung befinden, so müssten die Systeme, wie wir später sehen werden, entweder identisch, oder symetrisch sein, nachdem je zwei entsprechende Gerade sich in einem Punkte der Collineationsebene schneiden und mit ihr gleiche Winkel bilden. Die Collineationsebene ähnlicher räumlicher Systeme liegt somit in unendlicher Entfernung. Dass das Collineationscentrum solcher Systeme im allgemeinen in endlicher Entfernung gelegen ist, folgt aus dem Umstande, dass je zwei entsprechende Punktreihen derselben zu einander parallel und zugleich congruent sein müssten, wenn sowohl die Collineationsebene als auch das Collineationscentrum unendlich ferne liegen würden. Die beiden Systeme wären dann nicht bloss ähnlich, sondern congruent.

Man nennt das Collineationscentrum ähnlicher Systeme den Aehnlichkeitspunkt und die Collineationsstrahlen Aehnlichkeitsstrahlen.

Befinden sich je zwei entsprechende Punkte ähnlicher räumlicher Systeme, welche perspectivisch liegen, zu verschiedenen Seiten des Aehnlichkeitspunktes, so sagt man, dass die beiden Systeme entgegengesetzt perspectivisch liegen und wenn je zwei entsprechende Punkte auf derselben Seite des Aehnlichkeitspunktes gelegen sind, so werden die beiden Systeme einstimmig perspectivisch genannt. Im ersteren Falle heisst der Aehnlichkeitspunkt ein innerer, im zweiten ein äusserer.

Das Verhältniss der Abstände je zweier entsprechender Punkte von der unendlich fernen Collineationsebene ist gleich der Einheit, daher muss der Modulus ähnlicher räumlicher Systeme, welche perspectivisch liegen, gleich dem Verhältnisse der Abstände irgend zweier entsprechender Punkte vom Aehnlichkeitspunkt oder, was dasselbe ist, gleich dem Längenverhältniss irgend zweier entsprechender Strecken sein (Satz 18, 5. Abschnitt). Der Modulus einstimmig perspectivischer Systeme ist daher positiv, der Modulus entgegengesetzt perspectivischer Systeme aber negativ.

Ist in ähnlichen räumlichen Systemen das constante Längenverhältniss von je zwei entsprechenden Strecken gleich der Einheit, so nennt man die beiden Systeme congruent, wenn sie in eine solche Lage gebracht werden können, dass alle ihre entsprechenden Elemente zusammenfallen. Ist jedoch eine derartige Lage nicht möglich, so heissen die beiden Systeme symetrisch. Die Congruenz und Symetrie können demnach als specielle Fälle der Aehnlichkeit betrachtet werden. Sowohl in congruenten, als auch in symetrischen räumlichen Systemen sind je zwei entsprechende Strecken, je zwei entsprechende ebene Winkel und Flächenwinkel einander gleich. Dennoch besteht zwischen congruenten und symetrischen räumlichen Systemen ein wesentlicher Unterschied. Die rechte und linke Hand z. B. sind zwar symetrisch, aber nicht congruent.

Bezüglich der perspectivischen Lage von zwei symetrischen räumlichen Systemen sind nur zwei Fälle denkbar: Entweder liegt die Collineationsebene in endlicher Entfernung und das Collineationscentrum unendlich entfernt, oder umgekehrt. Denn würden Collineationsebene und Centrum in endlicher Entfernung liegen, so könnten nicht je zwei entsprechende Strecken gleiche Grösse haben und wenn Collineationsebene und Centrum unendlich ferne gelegen wären, so müssten die beiden Systeme congruent sein. Im ersteren Falle — wenn die Collineationsebene sich in endlicher Entfernung befindet — wird jede zwischen zwei entsprechenden Punkten gelegene Strecke von der Collineationsebene halbirt und alle Collineationsstrahlen stehen auf letzterer Ebene senkrecht. Im zweiten Falle — wenn das Collineationscentrum in endlicher Entfernung liegt — wird der Abstand je zweier entsprechender Punkte vom Collineationscentrum halbirt und je zwei entsprechende Gerade oder Ebenen sind zu einander parallel.

Bei congruenten räumlichen Systemen, welche perspectivisch liegen, ohne mit allen ihren entsprechenden Elementen zusammenzufallen, befinden sich die Collineationsebene und das Collineationscentrum in unendlicher Entfernung. Die Collineationsstrahlen, sowie auch je zwei entsprechende Gerade und Ebenen solcher Systeme sind daher zu einander parallel.

e) Involutorische räumliche Systeme.

Zwei collineare oder reciproke räumliche Systeme werden **involutorisch liegend**, oder **involutorisch** genannt, wenn jedes Element E demselben Elemente E_1 entspricht, ob man E als Element des einen oder des andern Systems betrachtet. Häufig werden je zwei solche Systeme als ein einziges aufgefasst und man nennt dann letzteres ein **involutorisches räumliches System**.

Zunächst untersuchen wir involutorische Systeme, welche aus zwei **collinearen** räumlichen Systemen bestehen.

Sind Σ und Σ_1 zwei collineare räumliche Systeme und AA_1, BB_1, CC_1 drei Paare entsprechender Punkte von Σ und Σ_1, welche nicht alle derselben Ebene angehören und so gelegen sind, dass A, B, C den Punkten A_1, B_1, C_1 entsprechen, ob man A, B, C als Elemente von Σ oder von Σ_1 betrachtet, so findet dieselbe Beziehung bei allen Paaren entsprechender Punkte statt, d. h. Σ und Σ_1 liegen involutorisch. Dies ergibt sich aus folgender Untersuchung.

Der Kürze wegen nennen wir die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 beziehungsweise a, b, c. Jede dieser drei Geraden entspricht sich selbst, daher ist jeder Schnittpunkt von zweien derselben ein selbstentsprechender Punkt und jede Ebene, welche zwei von ihnen enthält, eine selbstentsprechende Ebene. Bezüglich der gegenseitigen Lage von a, b, c können nun folgende Fälle eintreten:

1. a, b, c schneiden sich in ein und demselben Punkte.

2. Eine von den drei Geraden schneidet die beiden andern in verschiedenen Punkten.
3. Es schneiden sich nur zwei von den drei Geraden.
4. Keine zwei von den drei Geraden schneiden sich.

Im Falle 1 ist der Schnittpunkt O von a, b, c ein Doppelpunkt jeder der drei involutorischen Reihen R, R', R'', deren Träger a, b, c bilden (vergleiche Satz 2, 5. Abschnitt und Satz 51, 1. Abschnitt), und zugleich das Involutionscentrum eines jeden von den drei involutorischen ebenen Systemen, deren Träger die Ebenen ab, ac, bc sind (vergleiche Kapitel c des 3. Abschnittes). Die Involutionsaxe eines jeden solchen Systemes wird durch die Verbindungslinien je zweier Doppelpunkte der Reihen R, R', R'' gebildet, und jene Ebene J, welche durch die drei Involutionsaxen bestimmt wird, ist nicht nur eine sich selbst entsprechende, sondern jeder ihrer Punkte ist nach Satz 7, 3. Abschnitt, ein sich selbst entsprechendes Element von Σ und Σ_1. — Bezeichnet nun P irgend einen Punkt von Σ und π die durch a und P bestimmte Ebene, so muss π eine sich selbst entsprechende Ebene sein, welche den Punkt P_1 enthält, der dem Punkte P entspricht. π ist aber der Träger eines involutorischen ebenen Systems, dessen Axe sich in der Ebene J befindet und dessen Centrum der Punkt O bildet. Daher entspricht dem beliebig gewählten Punkte P derselbe Punkt P_1, ob man P als Element von Σ oder von Σ_1 betrachtet, d. h. die beiden räumlichen Systeme Σ und Σ_1 liegen involutorisch. Nachdem alle Elemente der Ebene J sich selbst entsprechen, so sind aber Σ und Σ_1 auch perspectivisch gelegen (Satz 19, 5. Abschnitt), daher sagt man, dass Σ und Σ_1 perspectivisch-involutorisch liegen. Das Collineationscentrum (O) solcher Systeme wird Involutionscentrum, die Collineationsebene (J) Involutionsebene und jeder Collineationsstrahl ein Involutionsstrahl genannt.

Für den Fall 2 nehmen wir an, die Gerade b werde von a und c beziehungsweise in den Punkten D und E geschnitten. Diese zwei Punkte bilden dann zugleich die Doppelpunkte jener involutorischen Reihe R', deren Träger b ist, sowie auch Doppelpunkte der auf a und c befindlichen Reihen R, R''; und zwar gehört D der Reihe R und E der Reihe R'' an. Die übrigen Doppelpunkte von R und R'' nennen wir beziehungsweise F und G. Die zwei durch a, b und b, c bestimmten Ebenen sind nun die Träger involutorischer ebener Systeme, deren Involutionscentra sich beziehungsweise in D und E befinden, während die Involutionsaxen durch die Geraden EF und DG gebildet werden. Ausser den sämmtlichen Punkten dieser Axen, welche wir durch l und l' bezeichnen wollen, können Σ und Σ_1 keine Punkte mehr entsprechend gemein haben, da sie sonst identisch sein müssten (Satz 10, 5. Abschnitt). Jede Ebene, welche durch l oder l' geht, ist eine selbst entsprechende, denn ist z. B. α irgend eine durch l gehende Ebene, so schneidet dieselbe l' in einem selbstentsprechenden Punkte und muss demnach der durch letzteren Punkt und die Gerade l bestimmten Ebene entsprechen.

Der Durchschnitt der Ebene ab oder bc mit einer beziehungsweise durch l' oder l gehenden Ebene ist der Träger einer involutorischen Reihe, daher bildet jede durch l oder l' gelegte Ebene den Träger eines involutorischen Systemes, dessen Axe beziehungsweise l oder l' ist und sein Centrum in l' oder l hat. — Ist nun P irgend ein Punkt von Σ, so muss demselben ein in der Ebene Pl gelegener Punkt P_1 von Σ_1 entsprechen und da diese Ebene den Träger eines involutorischen Systemes bildet, so entspricht dem beliebig gewählten Punkte P derselbe Punkt P_1, ob man P als Element von Σ oder von Σ_1 betrachtet, d. h, Σ und Σ_1 liegen involutorisch. Man nennt zwei derartige involutorisch liegende räumliche Systeme, welche alle Punkte zweier sich nicht schneidender Geraden (l und l') entsprechend gemein haben, geschaart-involutorische Systeme, zum Unterschiede von jenen involutorischen Systemen, die zugleich auch perspectivisch liegen. Die beiden Geraden l und l' heissen die Involutionsaxen und jede Gerade, welche l und l' schneidet, also sich selbst entspricht, wird ein Leitstrahl genannt.

Bezüglich des Falles 3 wollen wir annehmen, die zwei sich schneidenden Geraden seien a und b. Ihren Schnittpunkt, welcher zugleich ein Doppelpunkt der auf a und b befindlichen involutorischen Reihen R und R' ist, bezeichnen wir durch D; die zwei übrigen Doppelpunkte der genannten Reihen nennen wir beziehungsweise E und F. Nachdem die Ebene ab eine sich selbst entsprechende ist und auch die Gerade c sich selbst entspricht, so muss der Schnittpunkt dieser Ebene mit c ein selbstentsprechender Punkt sein. In der Ebene ab, als Träger eines involutorischen ebenen Systemes, gibt es aber ausser D und den Punkten der Involutionsaxe EF keine weiteren selbstentsprechenden Punkte, daher kann c die Ebene ab nur in einem Punkte der Geraden EF schneiden. — Die Fälle, in denen c durch D, E oder F geht, wurden bereits unter 1 und 2 in Betracht gezogen. — Der Schnittpunkt O von c und EF ist einer der Doppelpunkte jener involutorischen Reihe, welche sich auf c befindet. Den zweiten Doppelpunkt nennen wir G. Die Ebene, welche durch D und c bestimmt wird, bildet den Träger eines involutorischen ebenen Systemes, dessen Centrum sich in O befindet und das seine Involutionsaxe in DG hat. Die zwei sich nicht schneidenden Geraden EF und DG sind demnach Träger von Punktreihen, deren sämmtliche Punkte sich selbst entsprechen. Ausser diesen Punkten können Σ und Σ_1 keine weiteren Punkte entsprechend gemein haben, ohne identisch zu sein. Aus denselben Gründen, welche wir gelegentlich der Untersuchung des Falles 2 angeführt haben, ist jede durch eine der Geraden EF oder DG gehende Ebene der Träger eines involutorischen Systemes und irgend einem Punkte P muss derselbe Punkt P_1 entsprechen, ob man P als Element von Σ oder von Σ_1 betrachtet. Der in Rede stehende Fall ist also von dem vorhergehenden nicht wesentlich verschieden. Die Systeme Σ und Σ_1 liegen gleichfalls geschaart-involutorisch.

Wenn keine zwei von den drei Geraden a, b, c sich schneiden, so können zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder alle drei involutorischen Reihen

R, R', R'', deren Träger a, b, c bilden, verlaufen entgegengesetzt und haben somit reelle Doppelpunkte, oder sie verlaufen einstimmig und ihre Doppelpunkte sind imaginär. Um dies einzusehen nehmen wir an, eine von den genannten drei Reihen, etwa die auf a befindliche R, habe reelle Doppelpunkte. Jede Ebene, welche durch einen dieser Punkte und die Gerade b geht, ist eine sich selbst entsprechende und schneidet die dritte Gerade c in einem selbstentsprechenden Punkte. Ebenso wird die Gerade b von den zwei Ebenen, welche durch c und die Doppelpunkte von R gehen, in selbstentsprechenden Punkten geschnitten. Ist hingegen in einer der drei Reihen, etwa in R, kein reeller Doppelpunkt vorhanden, so gibt es auch in R' und R'' keine solchen Punkte; denn wäre z. B. D ein reeller Doppelpunkt von R', so würde a von der sich selbst entsprechenden Ebene Dc in einem selbstentsprechenden Punkte geschnitten, was gegen die Voraussetzung ist. Auch sieht man nun leicht ein, dass wenn in einer der drei Reihen, also in jeder derselben nur imaginäre Doppelpunkte vorkommen, in den beiden räumlichen Systemen Σ und Σ_1 überhaupt keine reellen Punkte und Ebenen existiren können, welche sich selbst entsprechen.

Jede der drei Geraden a, b, c bildet die Axe eines Ebenenbüschels, welcher gegen die auf den beiden anderen Geraden befindlichen involutorischen Reihen perspectivisch liegt. Daher ist jeder solche Büschel selbst involutorisch und besitzt reelle oder imaginäre Doppelebenen je nachdem in R, R', R'' reelle oder imaginäre Doppelpunkte vorhanden sind. Ist nun δ eine reelle Doppelebene des Büschels, welcher seine Axe in a hat, so werden b und c von δ in selbstentsprechenden Punkten geschnitten, deren Verbindungslinie l in δ liegt, also a in einem Doppelpunkte schneidet. Die Gerade l enthält demnach drei sich selbst entsprechende Punkte, woraus man schliessen kann, dass Σ und Σ_1 sämmtliche Punkte von l entsprechend gemein haben. Bezüglich der zweiten Doppelebene des Büschels mit der Axe a gilt dasselbe, daher haben Σ und Σ_1 alle Punkte von zwei sich nicht schneidenden Geraden l und l' entsprechend gemein, wie in den Fällen 2 und 3. Diese beiden Geraden werden von a, b und c geschnitten. — Dass Σ und Σ_1 ein g e s c h a a r t - i n v o l u t o r i s c h e s S y s t e m bilden wenn l und l' reell sind, lässt sich wie in den bereits betrachteten Fällen nachweisen.

Haben Σ und Σ_1 keinen reellen Punkt entsprechend gemein, so liegen sie ebenfalls involutorisch. Irgend ein Punkt P von Σ kann nämlich als der Durchschnittspunkt von drei Ebenen α, β, γ betrachtet werden, von denen jede beziehungsweise einem der drei involutorischen Büschel mit den Axen a, b, c angehört. Sind daher $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die den Ebenen α, β, γ entsprechenden, so ist der dem Punkte P entsprechende P_1 der Schnittpunkt von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und P_1 entspricht dem Punkte P doppelt, da auch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und α, β, γ sich doppelt entsprechen. — Zwei solche involutorische räumliche Systeme, welche keinen reellen Punkt entsprechend gemein haben, werden ebenfalls g e s c h a a r t - i n v o l u t o r i s c h e S y s t e m e genannt. Ihre Involutionsaxen sind imaginär.

Die wichtigsten Eigenschaften perspectivisch-involutorischer räumlicher Systeme drückt folgender Satz aus:

32. Liegen zwei collineare räumliche Systeme perspectivisch-involutorisch so coincidiren ihre Gegenebenen und halbiren den Abstand des Involutionscentrums von der Involutionsebene. Der Modulus solcher Systeme ist demnach immer gleich -1 und je zwei entsprechende Punkte, Gerade oder Ebenen derselben werden durch das Centrum und die Involutionsebene harmonisch getrennt. Jeder Involutionsstrahl ist der Träger einer involutorischen Punktreihe und jede durch das Centrum gehende Ebene der Träger eines involutorischen ebenen Systemes. Zwei perspectivische räumliche Systeme liegen immer involutorisch, wenn ihre Gegenebenen coincidiren.

Wir überlassen es dem Leser jene speciellen Fälle zu untersuchen, in welchen entweder das Centrum, oder die Involutionsebene, oder beide zugleich in unendlicher Entfernung liegen.

Bezüglich der geschaart-involutorischen räumlichen Systeme gilt der Satz:

33. In einem geschaart-involutorischen räumlichen Systeme gibt es entweder keine reellen sich selbst entsprechenden Punkte und Ebenen oder sämmtliche Punkte von zwei sich nicht schneidenden Geraden, welche die Involutionsaxen genannt werden, entsprechen sich selbst. Im letzteren Falle schneidet jede Verbindungslinie zweier sich entsprechender Punkte beide Involutionsaxen und je zwei solche Punkte werden durch diese Axen harmonisch getrennt. Jede durch eine Involutionsaxe l gehende Ebene bildet den Träger eines involutorischen ebenen Systemes, dessen Axe l ist und welches sein Centrum in der zweiten Involutionsaxe l' hat. Die Verbindungslinie irgend zweier entsprechender Punkte geschaart-involutorischer Systeme bildet den Träger einer involutorischen Punktreihe, daher coincidiren die Gegenebenen solcher Systeme.

In dem speciellen Falle, wenn eine der Involutionsaxen in unendlicher Entfernung gelegen ist, halbirt die andere Axe die Entfernung von je zwei entsprechenden Punkten.

Ist m irgend eine Gerade, welche keine von den zwei Involutionsaxen schneidet, so bilden sämmtliche diese Gerade schneidenden Leitstrahlen eine Regelfläche, auf welcher sich auch die der Geraden m entsprechende m_1 befindet. m und m_1 gehören zu einer Schaar von Erzeugenden, der auch die Axen angehören, während die andere Schaar von sämmtlichen die Gerade m schneidenden Leitstrahlen gebildet wird.

Wir gehen nun zur Betrachtung der reciproken involutorisch liegenden räumlichen Systeme über. Vor allem bemerken wir, dass man zwei solche Systeme sehr häufig als ein einziges auffasst, welches dann ein räumliches Polarsystem genannt wird.

34. **Wenn in zwei reciproken räumlichen Systemen Σ und Σ_1 den Eckpunkten eines Tetraeders die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen entsprechen, so liegen Σ und Σ_1 involutorisch und bilden also ein räumliches Polarsystem.**

Die Eckpunkte eines solchen Tetraeders, als Punkte von Σ betrachtet, nennen wir A, B, C, D und die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen beziehungsweise α_1, β_1, γ_1, δ_1. Nachdem der Punkt A, als Element von Σ_1, den Schnittpunkt von β_1, γ_1, δ_1 bildet, so entspricht ihm jene Ebene in Σ_1, welche durch die den Ebenen β_1, γ_1, δ_1 entsprechenden Punkte geht; also wieder die Ebene α_1. Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass auch jedem der übrigen drei Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seitenfläche doppelt entspricht. — Man nennt ein solches Tetraeder ein Polartetraeder. — Jeder durch die Kante AB gehenden Ebene entspricht ein Punkt, welcher in der Schnittlinie CD der den Punkten A und B entsprechenden Ebenen α_1, β_1 liegt, daher entspricht einem Ebenenbüschel E mit der Axe AB eine auf CD gelegene Punktreihe R_1. Der Büschel E und die Reihe R_1 sind nach Satz 2, 5. Abschnitt, projectivisch und da die Reihe R, in welcher E von CD geschnitten wird, gegen R_1 involutorisch liegt, weil sich die Punkte C und D in R und R_1 doppelt entsprechen, so liegen auch E und R_1 involutorisch. Daraus folgt, dass jeder durch AB gehenden Ebene, als Element von Σ oder von Σ_1 betrachtet ein und derselbe in CD gelegene Punkt entspricht. Bezüglich jeder anderen Kante des Polartetraeders gilt dasselbe, was eben für AB nachgewiesen wurde, daher liegt jeder Ebenenbüschel, dessen Axe eine Kante des Tetraeders bildet, gegen die ihm entsprechende Punktreihe involutorisch. Letztere Reihe befindet sich auf jener Kante, welche von der Axe des Büschels nicht geschnitten wird, ihr also gegenüberliegt. Irgend ein Punkt P des Systemes Σ kann nun als der Durchschnitt von drei Ebenen μ, ν, ω dreier Büschel betrachtet werden, deren Axen drei beliebige Kanten des Polartetraeders bilden. Daher entspricht dem Punkte P jene Ebene, welche durch die den Ebenen μ, ν, ω entsprechenden Punkte M, N, O gehen; und weil diese Ebenen und diese Punkte sich doppelt entsprechen, so entspricht auch der Punkt P der Ebene MNO doppelt. Der Punkt P ist aber ein ganz beliebiger, folglich liegen Σ und Σ_1 involutorisch.

Aus dem Satze 12, 5. Abschnitt, ergibt sich unmittelbar der folgende:

35. **Ein räumliches Polarsystem ist durch irgend ein Polartetraeder und einen ausserhalb der Seitenflächen des Tetraeders liegenden Punkt mit der ihm entsprechenden**

Ebene, welche durch keinen der Eckpunkte des Tetraeders geht, vollkommen bestimmt.

Die Möglichkeit der involutorischen Lage zweier reciproker räumlicher Systeme ist durch diesen und den vorhergehenden Satz nachgewiesen. Man kann ja zwei solche Systeme dem Satze 12 dieses Abschnittes zufolge immer derart auf einander beziehen, dass den Ecken eines Tetraeders die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen entsprechen und irgend einem auf keiner dieser Seitenflächen liegenden Punkte eine durch keinen der Eckpunkte gehende Ebene entspricht.

Jeder Punkt eines räumlichen Polarsystemes wird der Pol der ihm entsprechenden Ebene, jede Ebene die Polarebene des ihr entsprechenden Punktes und jede Gerade die Polare der ihr entsprechenden Geraden genannt.

Zwei Punkte eines räumlichen Polarsystemes heissen einander conjugirt, wenn einer, also jeder von ihnen in der Polarebene des anderen liegt.

Zwei Ebenen eines räumlichen Polarsystemes heissen einander conjugirt, wenn eine, also jede von ihnen durch den Pol der anderen geht.

Einen Punkt und eine Gerade nennt man conjugirte Elemente eines räumlichen Polarsystemes, wenn die Gerade in der Polarebene des Punktes, also der Punkt in der Polaren der Geraden liegt.

Eine Ebene und eine Gerade nennt man conjugirte Elemente eines räumlichen Polarsystemes, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene, also die Ebene durch die Polare der Geraden geht.

Zwei Gerade eines räumlichen Polarsystemes werden conjugirt genannt, wenn eine, also jede von ihnen die Polare der anderen schneidet.

Diesen Erklärungen zufolge ist ein Punkt allen Punkten und Geraden seiner Polarebene, eine Ebene allen durch ihren Pol gehenden Ebenen und Geraden, endlich eine Gerade allen Punkten ihrer Polaren, sowie auch allen Ebenen, welche durch diese Polare gehen, und allen die letztere schneidenden Geraden conjugirt.

Liegt ein Punkt auf seiner Polarebene, so ist sowohl der Punkt, als auch die Ebene sich selbst conjugirt. Eine Gerade ist sich selbst conjugirt, wenn sie entweder sich selbst entspricht, oder wenn sie ihre Polare schneidet.

Jeder Punkt A eines räumlichen Polarsystemes kann als ein Eckpunkt eines Polartetraeders betrachtet werden. Die Polarebene α_1 von A bildet die dem Eckpunkte A gegenüberliegende Seitenfläche. Eine beliebige durch A gehende Ebene β_1 bildet eine zweite Seitenfläche und der in α_1 gelegene Pol B von β_1 einen zweiten Eckpunkt. Irgend eine durch die Kante AB gehende Ebene kann ferner als eine dritte Seitenfläche γ_1 angenommen werden. Der im Durchschnitte von α_1 und β_1 liegende Pol C der Ebene γ_1 bildet einen dritten Eckpunkt. Der vierte Eckpunkt endlich ist der Schnittpunkt D der drei Ebenen α_1, β_1, γ_1 und die vierte Seitenfläche δ_1 ist die durch AB und C bestimmte Ebene. — Diesen

Erklärungen zufolge kann man auch jede beliebige Ebene als Seitenfläche und jede beliebige Gerade als Kante eines Polartetraeders betrachten, woraus hervorgeht, dass es in einem räumlichen Polarsysteme unendlich viele Polartetraeder gibt.

Wir haben bereits nachgewiesen, dass jeder Ebenenbüschel, dessen Axe eine Kante eines Polartetraeders bildet, gegen die ihm entsprechende Punktreihe involutorisch gelegen ist. Nachdem nun jede Gerade als Axe eines solchen Büschels betrachtet werden kann, so liegt jeder Ebenenbüschel eines räumlichen Polarsystemes gegen die ihm entsprechende Punktreihe involutorisch. Dies gilt jedoch in dem speciellen Falle nicht, wenn der Träger der Reihe die Axe des Büschels schneidet, also sich selbst conjugirt ist.

Dass auch jeder Strahlenbündel gegen das ihm entsprechende ebene Systeme involutorisch liegt, wenn der Träger des letzteren nicht durch den Mittelpunkt des ersteren geht, lässt sich wie folgt zeigen. Die Eckpunkte eines Polartetraeders seien A, B, C, D und die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen beziehungsweise α_1, β_1, γ_1, δ_1. Durch s bezeichnen wir einen Strahlenbündel dessen Mittelpunkt A ist. Das diesem Bündel entsprechende ebene System, dessen Träger α_1 sein muss, heisse σ_1 und jenes ebene System, welches durch den Schnitt des Bündels s mit der Ebene α_1 entsteht, heisse σ. Nachdem σ und σ_1 reciprok verwandt sind und jedem Eckpunkte des Dreieckes BCD die ihm gegenüberliegende Seite entspricht, so liegen σ und σ_1, also auch σ_1 und s involutorisch (Sats 52, 3. Abschnitt). Der Mittelpunkt A des Bündels s kann nun als ein beliebiger Punkt des räumlichen Polarsystemes betrachtet werden, daher erscheint obige Behauptung gerechtfertigt. Es gilt also der Satz:

36. Je zwei ungleichartige Grundgebilde der ersten oder zweiten Stufe, welche sich in einem räumlichen Polarsysteme entsprechen, liegen im allgemeinen involutorisch.

Auch die folgenden Sätze sind nun leicht einzusehen (vergleiche die Sätze 27 bis 32 des 4. Abschnittes):

37. In einem räumlichen Polarsysteme bilden alle Paare conjugirter Punkte, welche auf ein und derselben Geraden liegen, eine involutorische Punktreihe, alle durch ein und dieselbe Gerade gehenden Paare conjugirter Ebenen einen involutorischen Ebenenbüschel und alle durch ein und denselben Punkt gehenden und in derselben Ebene liegenden Paare conjugirter Geraden einen involutorischen Strahlenbüschel.

38. Jede Ebene eines räumlichen Polarsystemes ist der Träger eines ebenen Polarsystemes, in welchem je zwei entsprechende Ele-

Jeder Punkt eines räumlichen Polarsystemes ist der Mittelpunkt eines Polarsystemes im Strahlenbündel, in welchem je zwei entspre-

mente einander in Bezug auf das räumliche Polarsystem conjugirt sind.

chende Elemente einander in Bezug auf das räumliche Polarsystem conjugirt sind.

Aus dem Satze 61, 3. Abschnitt, und dem zuletzt aufgestellten Satze (links) ergibt sich unmittelbar:

39. Alle Punkte eines räumlichen Polarsystemes, welche auf der ihnen entsprechenden Ebene liegen, gehören im allgemeinen einer (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung an, welche von jeder Ebene die durch ihren Pol geht, in diesem Pole berührt wird.

Diese Fläche nennt man die Ordnungsfläche oder Directrix des räumlichen Polarsystemes (vergleiche Satz 22 dieses Abschnittes).

Es fällt nun nicht schwer sich zu überzeugen, dass jede Fläche zweiter Ordnung als Directrix eines räumlichen Polarsystemes betrachtet werden kann und dass je ein Punkt und seine Polarebene in Bezug auf diese Fläche entsprechende Elemente des Polarsystemes bilden.

Ein räumliches Polarsystem wird ein Nullsystem genannt, wenn jeder Punkt desselben in seiner Polarebene liegt. Von der Möglichkeit eines solchen Systemes kann man sich durch folgende Betrachtung überzeugen. m und n seien zwei beliebige sich nicht schneidende Gerade, A, B, C drei beliebige Punkte von m und D, E, F drei beliebige Punkte von n. Irgend einen bestimmten Punkt der Geraden CF nennen wir P und eine beliebige durch CF gehende Ebene sei π. Zwei reciproke räumliche Systeme Σ und Σ_1 können nun derart auf einander bezogen werden, dass den fünf Punkten A, B, D, E, P beziehungsweise die fünf Ebenen An, Bn, Dm, Em, π entsprechen (Satz 12, 5. Abschnitt). Es müssen sich dann auch die Geraden m und n entsprechen, nachdem der Verbindungslinie der Punkte A, B die Durchschnittslinie n der diesen Punkten entsprechenden Ebenen entspricht. Auch ist leicht einzusehen, dass die Geraden AD und BE selbstentsprechende Gerade sein müssen. Die Gerade EF entspricht gleichfalls sich selbst; denn der Ebene Pm, weil sie durch P und m geht, muss ein in π und n gelegener Punkt, also der Punkt F entsprechen, und der Schnittlinie CF der Ebenen Pm, π entspricht die Verbindungslinie der diesen Ebenen zugewiesenen Punkte F, P. Die Punkte A, B, G, sowie auch die Punkte D, E, F, liegen demnach auf den ihnen entsprechenden Ebenen, woraus folgt, dass sämmtliche Punkte von m und n auf den ihnen entsprechenden Ebenen gelegen sind (Satz 74, 1. Abschnitt), also jede Gerade, welche m und n schneidet, sich selbst entspricht. Ist nun Q irgend ein Punkt des Raumes, so kann durch denselben eine (aber auch nur eine) m und n schneidende, folglich sich selbst entsprechende Gerade gezogen werden; daher entspricht dem Punkte Q eine durch diese Gerade, also auch durch Q gehende Ebene. — Damit ist nun bewiesen, dass in den reciproken Systemen Σ und Σ_1 jeder Punkt

in der ihm entsprechenden Ebene liegt und wir haben jetzt noch zu zeigen, dass Σ und Σ_1 involutorisch gelegen sind.

Zunächst weisen wir nach, dass irgend zwei entsprechende Gerade a und a_1 von Σ und Σ_1 nicht in derselben Ebene liegen können, ohne zusammen zu fallen. Liegen nämlich a und a_1 in derselben Ebene, so entspricht dem Schnittpunkte von a und a_1 als Element von Σ eine durch a_1, also durch den ihr entsprechenden Punkt gehende Ebene. Irgend einem anderen Punkte von a, ausser diesem Schnittpunkte und jenem, welcher der Ebene aa_1 entspricht, kann aber keine durch ihn gehende Ebene entsprechen, wenn a und a_1 nicht zusammenfallen, weil jede solche Ebene durch a_1 gehen muss. Heisst P irgend ein Punkt von Σ und π_1 die ihm entsprechende, folglich durch ihn gehende Ebene, so fällt jede in π_1 gelegene und durch P gehende Gerade mit der ihr entsprechenden zusammen. Sind a und b zwei solche Gerade, so entspricht ihrer Ebene π_1 als Element von Σ der Schnittpunkt P dieser zwei Geraden; es entsprechen sich also der beliebig gewählte Punkt P und die Ebene π_1 doppelt, daher liegen Σ und Σ_1 involutorisch und bilden ein Nullsystem.

Jede sich selbst entsprechende Gerade eines Nullsystemes wird ein Leitstrahl desselben genannt.

Wir können nun den Satz aufstellen:

40. In einem Nullsystem ist jede Gerade, welche zwei sich entsprechende, nicht coincidirende Gerade schneidet, ein Leitstrahl. Jede Punktreihe, deren Träger kein Leitstrahl ist, liegt gegen den ihr entsprechenden Ebenenbüschel perspectivisch. Alle in ein und derselben Ebene befindlichen Leitstrahlen bilden einen Strahlenbüschel dessen Mittelpunkt der Pol dieser Ebene ist. Schneidet ein Leitstrahl eine von zwei sich entsprechenden Geraden, so schneidet er auch die andere. Zwei beliebige Paare sich entsprechender Geraden gehören einer Schaar von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung an, deren zweite Schaar aus Leitstrahlen besteht.

d) Collineation und Reciprocität von Curven und Flächen.

Bevor wir die gegenseitigen Beziehungen von Curven untersuchen, welche sich in collinearen, oder reciproken räumlichen Systemen entsprechen, ist es nothwendig einige Erklärungen vorauszuschicken.

Eine Curve, bei welcher nicht sämmtliche Punkte in ein und derselben Ebene liegen, wird eine Raumcurve oder eine gewundene Curve genannt. Verbindet man irgend einen Punkt P einer Raumcurve C mit sämmtlichen Punkten von C durch gerade Linien, so bilden letztere eine Kegelfläche mit dem Mittelpunkte P. Stellt man sich vor, ein Punkt Q durchlaufe die Curve C,

so ist leicht einzusehen, dass die Secante PQ in eine Tangente der Curve übergeht, sobald Q dem Punkte P unendlich nahe gekommen ist. Die Tangente t in P bildet also ebenfalls eine Erzeugende der erwähnten Kegelfläche. Wird durch die Tangente t und jede Lage des die Curve durchlaufenden Punktes Q je eine Ebene gelegt, so bilden alle dadurch erhaltenen Ebenen einen Ebenenbüschel mit der Axe t. Ist Q dem Punkte P unendlich nahe gekommen, so enthält die durch t und Q gelegte Ebene drei einander unendlich nahe Elemente von C. Man nennt diese Ebene die Osculations- oder Schmiegungsebene der Curve C im Punkte P, und P den Osculationspunkt dieser Ebene.

Die Gesammtheit aller Tangenten einer Raumcurve kann als ein Strahlenbüschel und die Gesammtheit aller osculirenden Ebenen einer solchen Curve als ein Ebenenbüschel höherer Art aufgefasst werden. Zwei unendlich nahe Tangenten schneiden sich in einem Punkte der Curve (dem Berührungspunkte), zwei unendlich nahe Osculationsebenen in einer Tangente (der Tangente im Osculationspunkte) und drei einander unendlich nahe Osculationsebenen schneiden sich ebenfalls in einem Curvenpunkte (dem Osculationspunkte).

Wird eine Raumcurve von keiner Ebene in mehr als n Punkten geschnitten, so nennt man sie eine Raumcurve $n$ter Ordnung, und lassen sich aus keinem Punkte mehr als n Osculationsebenen an die Curve legen, so heisst letztere eine Raumcurve $n$ter Classe. —

Gehören zwei Curven C und C_1 zwei collinearen räumlichen Systemen an und ist jede derselben die Verbindungslinie jener Punkte, welche den Punkten der anderen Curve entsprechen, so nennt man die beiden Curven collinear. Wird C von irgend einer Ebene α in n Punkten geschnitten, so schneidet die der Ebene α entsprechende die Curve C_1 ebenfalls in n Punkten und lassen sich aus einem Punkte A an C n Tangenten und Osculationsebenen legen, so gehen auch durch jenen Punkt, welcher dem Punkte A entspricht, n Tangenten und Osculationsebenen der Curve C_1. Es gilt somit der Satz:

41. Zwei collineare Curven sind immer von derselben Ordnung und Classe.

Sind γ und γ' die Gegenebenen der beiden Systeme, in welchen sich die Curven C und C_1 entsprechen, und schneidet C die Ebene γ in n Punkten, so entsprechen den letzteren n unendlich ferne Punkte von C_1 und den n Tangenten, welche C in ihren Schnittpunkten mit γ berühren, entsprechen n Asymptoten der Curve C_1. Schneidet C die Ebene γ nicht, so kann C_1 keine unendlich fernen Punkte besitzen.

In zwei reciproken räumlichen Systemen Σ und Σ_1 entspricht der stetigen Aufeinanderfolge von Punkten einer Curve des einen Systemes eine stetige Aufeinanderfolge von Ebenen des anderen Systemes. Ist also C irgend eine Curve von Σ, so entspricht derselben ein Ebenenbüschel E — im allgemeinen Sinne des Wortes — von Σ_1. Der Verbindungslinie zweier unendlich naher Punkte

von C, also einer Tangente, entspricht die Durchschnittslinie von zwei unendlich nahen Ebenen des Büschels E. Nachdem je zwei unendlich nahe Tangenten von C sich schneiden, so liegen je zwei solche unendlich nahe Durchschnittslinien in derselben Ebene und bilden daher im allgemeinen ebenfalls Tangenten einer Curve C_1. Die Curven C und C_1 werden reciproke Curven genannt. Dem Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Tangenten der Curve C, also einem Punkte von C entspricht jene Ebene, welche durch die den zwei Tangenten von C entsprechenden Tangenten von C_1 bestimmt wird. Nachdem nun jede durch zwei unendlich nahe Tangenten gelegte Ebene eine osculirende ist, so entspricht jedem Punkte und der durch ihn gehenden osculirenden Ebene von C beziehungsweise eine osculirende Ebene und ihr Osculationspunkt in C_1. — Einer ebenen Curve entspricht ein System von Ebenen, welche alle ein und dieselbe Kegelfläche berühren. Der Mittelpunkt dieser Fläche repräsentirt den obigen Erklärungen zufolge jene Curve, welche der Curve C_1 reciprok ist.

Wird eine von zwei reciproken Curven durch eine Ebene α in n Punkten geschnitten, so lassen sich aus dem der Ebene α entsprechenden Punkte n osculirende Ebenen an die andere Curve legen, daher gilt der Satz:

42. Sind zwei Curven reciprok, so ist die Ordnungszahl der einen gleich der Classenzahl der anderen.

Zwei Curven, welche sich in involutorischen collinearen oder reciproken Systemen entsprechen, werden involutorisch liegende Curven genannt.

Sind Σ und Σ_1 zwei collineare räumliche Systeme, bezeichnet ferner F irgend eine Fläche in Σ und F_1 jene Fläche, auf welcher sämmtliche den Punkten von F entsprechende Punkte von Σ_1 liegen, so werden die Flächen F und F_1 collinear genannt. Schneidet irgend eine Gerade die Fläche F in n Punkten, so wird auch F_1 von jener Geraden g_1, welche der Geraden g entspricht, in n Punkten geschnitten, und lassen sich durch g an die Fläche F n berührende Ebenen legen, so können auch aus g_1 n berührende Ebenen an F_1 gelegt werden, daher kann man behaupten:

43. Zwei collineare Flächen sind immer von derselben Ordnung und Classe.

Nachdem in collinearen Systemen einer Geraden nur wieder eine Gerade entspricht, so kann einer Regelfläche nur eine Regelfläche entsprechen. Zwei Flächen zweiter Ordnung, wovon die eine zur Gattung der Regelflächen gehört, während die andere keine geradlinigen Erzeugenden besitzt, können daher nicht collinear sein, wohl aber ist eine Fläche zweiter Ordnung nur wieder einer Fläche zweiter Ordnung collinear. Sind γ und γ' die Gegenebenen von zwei collinearen Systemen, in welchen sich zwei Flächen zweiter Ordnung F und F_1 entsprechen, von denen wir annehmen wollen, dass sie keine Kegel- oder Cilinderflächen sind, so ist F_1 ein Ellipsoid, wenn F mit der Ebene γ keinen reellen Punkt gemein hat. Schneidet jedoch F die Ebene γ in einem Kegelschnitte, so ist F_1 ein einfaches oder ein zweifaches Hyperboloid, je nachdem F eine Regel-

fläche ist, oder keine geradlinigen Erzeugenden besitzt. Schneiden sich F und γ in zwei geraden Linien, deren Schnittpunkt bekanntlich der Berührungspunkt von F und γ sein muss, so ist F_1 ein hyperbolisches Paraboloid, und berührt F die Ebene γ, ohne sie zu schneiden, so muss F_1 ein elliptisches Paraboloid sein.

In zwei affinen räumlichen Systemen können sich nur zwei Ellipsoide, zwei einfache oder zwei zweifache Hyperboloide, zwei elliptische oder zwei hyperbolische Paraboloide entsprechen, nachdem die unendlich fernen Punkte der einen Fläche den unendlich fernen Punkten der anderen entsprechen müssen. Zwei Flächen zweiter Ordnung, welche sich in affinen räumlichen Systemen entsprechen, werden affin genannt.

44. Die Mittelpunkte affiner Flächen der zweiten Ordnung sind entsprechende Punkte der Systeme, welchen die Flächen angehören. Jedem Durchmesser und jeder Diametral-Ebene der einen Fläche entspricht daher beziehungsweise ein Durchmesser und eine Diametral-Ebene der anderen.

Um dies einzusehen, hat man nur zu berücksichtigen, dass zwei parallelen berührenden Ebenen der einen Fläche zwei parallele berührende Ebenen der anderen entsprechen und dass die Verbindungslinie der Berührungspunkte solcher Ebenen immer durch den Mittelpunkt geht.

45. Wenn die Mittelpunkte von zwei collinearen Flächen der zweiten Ordnung sich entsprechen, so sind die letzteren auch affin.

Jrgend zwei sich entsprechende Durchmesser der beiden Flächen sind nämlich die Träger ähnlicher Punktreihen, daher entsprechen sich die unendlich fernen Punkte der beiden Systeme, denen die zwei Flächen angehören (vergleiche Satz 36, 3. Abschnitt).

46. Zwei Ellipsoide, sowie auch zwei einfache, oder zwei zweifache Hyperboloide könnnen immer dadurch affin auf einander bezogen werden, dass man drei conjugirte Durchmesser der einen Fläche drei conjugirten Durchmessern der anderen Fläche derart als entsprechend zuweist, dass den eigentlichen Durchmessern, wieder eigentliche entsprechen.

Nach Satz 25, 5. Abschnitt, kann man, um zwei räumliche Systeme affin auf einander zu beziehen, den Eckpunkten eines Tetraeders die Eckpunkte eines zweiten Tetraeders willkürlich als entsprechend zuweisen. Der Mittelpunkt und drei Endpunkte dreier conjugirter Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung bilden nun Eckpunkte eines Tetraeders, man kann also drei conjugirten Durchmessern einer Fläche zweiter Ordnung F drei solche Durchmesser einer anderen Fläche zweiter Ordnung F_1 als entsprechende Elemente affiner Systeme einander zuordnen. Der Fläche F des einen Systemes entspricht eine Fläche

zweiter Ordnung F_2 derart, dass jedem eigentlichen oder uneigentlichen Durchmesser von F beziehungsweise ein eigentlicher oder uneigentlicher Durchmesser von F_2 zugewiesen erscheint. Drei conjugirte Durchmesser von F_1 fallen nun mit drei eben solchen Durchmessern zusammen und zwar coincidiren je zwei eigentliche und je zwei uneigentliche von ihnen, daher sind F_1 und F_2 identisch. Hieraus folgt, dass F und F_1 affin sein müssen, da wir ja angenommen haben F und F_2 seien affin.

Dem eben nachgewiesenen Satze zufolge kann man jede Kugelfläche auf ein Ellipsoid affin beziehen. Nachdem alle Würfel, welche ein und derselben Kugelfläche umschrieben sind, gleichen Rauminhalt haben und jedem solchen Würfel ein Parallelepiped entspricht, welches das der Kugelfläche affine Ellipsoid in den Endpunkten dreier conjugirter Durchmesser berührt, so kann man mit Rücksicht auf den Satz 28, 5. Abschnitt, schliessen:

47. Alle Parallelepipeda, deren Seitenflächen ein und dasselbe Ellipsoid in den Endpunkten von drei beliebigen, einander conjugirten Durchmessern berühren, haben gleichen Rauminhalt.

Bezüglich zweier Paraboloide gilt folgender hieher gehöriger Satz, dessen leicht herzustellenden Beweis wir übergehen:

48. Zwei elliptische oder zwei hyperbolische Paraboloide P und P_1 können affin auf einander bezogen werden, indem man einen Durchmesser d und einen ebenen krummlinigen Schnitt von P, dessen Ebene dem Durchmesser d conjugirt ist, beziehungsweise einem Durchmesser d_1 und einem ebenen krummlinigen Schnitte von P_1, dessen Ebene dem Durchmesser d_1 conjugirt ist, als entsprechend zuweist.

Ist F irgend eine Fläche eines räumlichen Systemes Σ und bezeichnet Σ_1 ein mit Σ reciprok verwandtes räumliches System, so entspricht der Gesammtheit der auf F befindlichen Punkte ein System von Ebenen in Σ_1, welche alle eine Fläche F_1 berühren. Die Flächen F und F_1 werden reciprok genannt. Jedem Punkte von F entspricht eine berührende Ebene von F_1. Zwei unendlich nahen Punkten von F entsprechen zwei unendlich nahe Ebenen von F_1, daher entspricht einer Tangente der einen Fläche auch eine Tangente der anderen. Drei einander unendlich nahen Punkten von F sind drei einander unendlich nahe berührende Ebenen von F_1 zugewiesen, somit entspricht jeder berührenden Ebene von F ein Punkt von F_1. Man kann also sagen:

49. Sind zwei Flächen reciprok, so entspricht jedem Punkte und der durch ihn gehenden berührenden Ebene der einen Fläche beziehungsweise eine berührende Ebene und ihr Berührungspunkt der anderen Fläche. Jeder Tangente und ihrem Berührungspunkte entspricht bezie-

hungsweise eine Tangente und die durch sie gehende Berührungsebene.

Hieraus lässt sich schliessen, dass wenn F von einer Geraden g in n Punkten geschnitten wird, an die Fläche F_1 sich n berührende Ebenen legen lassen, welche durch die der Geraden g entsprechende g_1 gehen. Auch ist leicht einzusehen, dass wenn durch g n berührende Ebenen an F gelegt werden können, die Fläche F_1 von g_1 in nPunkten geschnitten wird. Es gilt somit der Satz:

50. Sind zwei Flächen reciprok, so ist die Ordnungszahl der einen gleich der Classenzahl der anderen.

Daraus folgt, dass eine Fläche zweiter Ordnung nur wieder einer Fläche zweiter Ordnung reciprok sein kann, nachdem aber in zwei reciproken räumlichen Systemen jede Gerade wieder einer Geraden entspricht, so können sich in zwei solchen Systemen nur zwei Flächen zweiter Ordnung entsprechen, welche beide Regelflächen sind, oder beide keine geraden Erzeugenden besitzen.

e) Raumcurven dritter Ordnung.

Sind s und s_1 zwei collineare Strahlenbündel, welche weder perspectivisch noch concentrisch liegen, und weder einen Strahl noch eine Ebene entsprechend gemein haben, so ist die Verbindungslinie aller Schnittpunkte von je zwei sich entsprechenden Strahlen dieser Bündel eine Raumcurve dritter Ordnung. Letztere wird ein Erzeugniss der beiden Bündel genannt.

Um nachzuweisen, dass diese Curve von keiner Ebene in mehr als drei Punkten geschnitten wird, bezeichnen wir durch M, M_1 die Mittelpunkte der erzeugenden Bündel und nennen irgend eine Ebene, von der wir zunächst voraussetzen wollen, dass sie durch keinen der Punkte M oder M_1 geht, α. Jede solche Ebene schneidet die beiden Bündel in zwei collinearen ebenen Systemen, welche weder identisch sein, noch perspectivisch liegen können. Denn im ersten Falle würden die Bündel s und s_1 perspectivisch liegen, im zweiten müssten sie eine Ebene entsprechend gemein haben, was gegen unsere Voraussetzungen wäre. Dass s und s_1 im zweiten Falle eine Ebene entsprechend gemein hätten wird klar, wenn man bedenkt, dass die beiden in α gelegenen perspectivischen Systeme einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben würden, in welchem sich zwei entsprechende perspectivisch liegende Ebenenbüschel von s und s_1 schneiden müssten. Nach Satz 19, 3. Abschnitt, haben also die zwei in α gelegenen Systeme mindestens einen, aber höchstens drei Punkte entsprechend gemein und da sich in jedem solchen Punkte zwei entsprechende Strahlen von s und s_1 schneiden, so ist obige Behauptung für jede Ebene gerechtfertigt, welche nicht durch M oder M_1 geht. — Enthält α einen der Mittelpunkte, etwa M, so entspricht dem in α gelegenen Strahlenbüschel S von

s ein Strahlenbüschel S_1 von s_1. Die Strahlenbüschel S und S_1 liegen derart, dass sich höchstens zwei Paare entsprechender Strahlen derselben schneiden. Denn würden sich drei Paare solcher Strahlen schneiden, so müssten S und S_1 perspectivisch liegen und die erzeugenden Bündel hätten, wie leicht gefolgert werden kann, eine Ebene entsprechend gemein. Die Ebene α enthält daher höchstens drei Punkte aber mindestens einen Punkt (M) der fraglichen Curve, nachdem jeder der Mittelpunkte M und M_1 dieser Curve angehören muss. — Dass auch in dem Falle, wenn α beide Mittelpunkte enthält, höchstens drei Schnittpunkte entsprechender Strahlen in α liegen, bedarf wohl keiner weiteren Erklärungen. Es gilt somit der Satz:

51. **Sämmtliche Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Strahlen zweier collinearer Strahlenbündel liegen im allgemeinen auf einer Raumcurve dritter Ordnung, welche auch durch die Mittelpunkte der Bündel geht.**

Eine Raumcurve kann von keiner niedrigeren als der dritten Ordnung sein, denn in jeder nicht ebenen Curve kann man drei Punkte beliebig wählen, in denen die Curve von einer Ebene geschnitten wird.

Keine Gerade schneidet eine Raumcurve dritter Ordnung in mehr als zwei Punkten, denn hätte eine Gerade drei Punkte mit der Curve gemein, so würde eine durch dieselbe und durch irgend einen vierten Punkt der Curve gelegte Ebene mehr als drei Curvenpunkte enthalten.

52. **Drei projectivische Ebenenbüschel erzeugen im allgemeinen eine Raumcurve dritter Ordnung.**

Um dies einzusehen denken wir uns drei projectivische Ebenenbüschel E, E_1, E_2 durch irgend eine Ebene α geschnitten. Es ergeben sich dadurch drei projectivische Strahlenbüschel S, S_1, S_2, deren Mittelpunkte M, M_1, M_2 die Schnittpunkte der Ebene α mit den Axen der drei Büschel sind. S und S_1 erzeugen nun einen Kegelschnitt K, welcher durch M und M_1 geht, ebenso erzeugen S und S_2 einen durch M und M_2 gehenden Kegelschnitt K_1. Die beiden Kegelschnitte haben den Punkt M gemein und schneiden sich daher mindestens noch in einem, aber höchstens noch in drei reellen Punkten, welche dem Erzeugnisse der drei Büschel angehören, weil sich in jedem dieser Punkte drei entsprechende Ebenen von E, E_1 und E_2 schneiden. Dieses Erzeugniss ist also eine Raumcurve dritter Ordnung. — Wäre M auch ein Punkt, in welchem sich drei entsprechende Ebenen von E, E_1, E_2 schneiden, so hätten K und K_1, wie man sich leicht überzeugen kann, in M eine gemeinschaftliche Tangente und könnten sich demnach höchstens noch in zwei Punkten schneiden.

53. **Wenn zwei Regelflächen, oder eine Regelfläche und eine Kegelfläche, oder auch zwei Kegelflächen zweiter Ordnung eine gerade Erzeugende gemein haben, so schneiden sie sich im allgemeinen noch in einer Raumcurve dritter Ordnung.**

Der Beweis hiefür kann wie folgt gegeben werden. Die beiden sich schneidenden Flächen nennen wir F und F_1, ihre gemeinschaftliche gerade Erzeugende a und irgend eine Ebene, welche F und F_1 schneidet, heisse α. Die Schnitte von α mit F und F_1 sind Curven zweiter Ordnung, also Curven, welche höchstens vier reelle Punkte gemein haben können. Einer dieser vier Punkte liegt in a, daher gehören die übrigen drei Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung an, wie wir behauptet haben.

54. Zwei Ebenenbüschel, deren Axen zwei beliebige Secanten irgend einer Raumcurve dritter Ordnung bilden und welche derart auf einander bezogen werden, dass die Durchschnittslinien von je zwei entsprechenden Ebenen die Curve schneiden, sind projectivisch.

Die zwei Büschel müssen nämlich projectivisch sein, weil jedem Elemente des einen nur ein einziges Element des anderen als entsprechendes zugewiesen erscheint (Satz 73, 1. Abschnitt). Denn jede durch eine Secante einer Raumcurve dritter Ordnung gehende Ebene schneidet die Curve nur mehr in einem Punkte.

Wenn die beiden Secanten, welche Axen der zwei Ebenenbüschel bilden, sich in einem Punkte S der Curve schneiden, so erzeugen diese Büschel eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze S, auf welcher Fläche die Curve dritter Ordnung liegen muss. Es gilt somit der Satz:

55. Eine Raumcurve dritter Ordnung wird aus jedem ihrer Punkte durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projicirt, daher ist die Projection einer solchen Curve aus jedem ihrer Punkte auf irgend eine Ebene eine Curve zweiter Ordnung.

Man nennt die Raumcurven dritter Ordnung mit Rücksicht auf diese Eigenschaft auch kubische Kegelschnitte.

Um in irgend einem Punkte A einer Raumcurve dritter Ordnung k die Osculationsebene zu construiren kann man wie folgt verfahren: Man zieht im Punkte A die Tangente t, legt durch A und die Curve k eine Kegelfläche K (auf welcher auch t gelegen ist) und ermittelt jene Ebene ω, welche die Kegelfläche K in t berührt. ω ist dann die verlangte osculirende Ebene. Legt man nämlich durch t und einen Punkt P der Raumcurve eine Ebene und lässt P die Curve durchlaufen, während die durch ihn gehende Ebene sich um t dreht, so osculirt diese Ebene mit k im Punkte A, sobald P mit A zusammenfällt, denn sie hat dann drei einander unendlich nahe Punkte mit der Curve gemein. — Um die Tangente t zu erhalten, lege man durch k zwei beliebige Kegelflächen zweiter Ordnung und bestimme die Durchschnittslinie jener zwei Ebenen, welche die beiden Kegelflächen in den durch A gehenden geraden Erzeugenden berühren. Diese zwei Ebenen schneiden sich in der Tangente t, weil jede derselben t enthalten muss.

Aus dem Satze 54 lässt sich ferner schliessen:

56. Jede Raumcurve dritter Ordnung kann als ein Erzeugniss von drei projectivischen Ebenenbüscheln betrachtet werden, deren Axen drei beliebige Secanten der Curve sein können.

Ist nämlich k irgend eine Raumcurve dritter Ordnung und heissen a, b, c drei beliebige Secanten derselben, so kann man dem Satze 54 zufolge drei Ebenenbüschel mit den Axen a, b, c derart projectivisch auf einander beziehen, dass sich je drei entsprechende Elemente derselben in einem Punkte von k schneiden.

Nachdem je zwei solche Ebenenbüschel sich in einer Regelfläche oder, wenn ihre Axen sich treffen, in einer Kegelfläche zweiter Ordnung schneiden, auf welcher die Raumcurve dritter Ordnung gelegen sein muss, so gilt der Satz:

57. Jede Raumcurve dritter Ordnung kann als der Durchschnitt zweier Regelflächen, oder einer Regelfläche und einer Kegelfläche oder auch zweier Kegelflächen zweiter Ordnung betrachtet werden, unter der Voraussetzung, dass die zwei sich schneidenden Flächen eine gerade Erzeugende gemein haben.

Diese Voraussetzung muss gemacht werden, weil die Durchschnittscurve von zwei Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen vierter Ordnung ist (Siehe den Beweis für Satz 53). Uebrigens ergibt sich dies auch aus der Erzeugungsart einer Raumcurve dritter Ordnung durch drei projectivische Ebenenbüschel. Sind nämlich $ABCDEF$ beliebige sechs Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung K, so kann man die Secanten AB, CD und EF als Axen von drei die Curve K erzeugenden Büscheln α, β, γ ansehen. Je zwei dieser Büschel erzeugen eine Regelfläche zweiter Ordnung und je zwei dieser Flächen schneiden sich ausser in der Curve k auch noch in einer der drei Secanten AB, CD oder EF. Nimmt man an, die Secanten AB, AC und CD seien die Axen der Büschel α, β, γ, so erzeugen α und γ eine Regelfläche, α und β aber eine Kegelfläche zweiter Ordnung. Beide Flächen enthalten die Gerade AB. Betrachtet man endlich AB, AC und BC als Axen, so erzeugen je zwei von den drei Ebenenbüscheln eine Kegelfläche zweiter Ordnung. Je zwei dieser Flächen schneiden sich ausser in der Curve k auch noch in einer der drei Geraden AB, AC oder BC.

58. Eine Raumcurve dritter Ordnung wird durch sechs ihrer Punkte, also durch sechs Punkte, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, vollkommen bestimmt.

Sind nämlich $ABCDEF$ sechs solche Punkte und verbindet man A mit den übrigen Punkten durch gerade Linien, so erhält man ein Fünfkant, durch welches eine Kegelfläche zweiter Ordnung K vollkommen bestimmt wird. Diese Kegelfläche, deren Spitze A ist, geht durch die genannten sechs Punkte und

muss nach Satz 55 jede Raumcurve dritter Ordnung, welche allenfalls durch *ABCDEF* gelegt werden kann, in sich enthalten. Vertauscht man *A* etwa mit *B*, so ergibt sich eine zweite Kegelfläche zweiter Ordnung K_1, für welche dasselbe gilt, was bezüglich der Fläche *K* bemerkt wurde. *K* und K_1 haben nun eine gerade Erzeugende, nämlich *AB*, und die genannten sechs Punkte gemein, daher schneiden sie sich in einer durch diese Punkte gehenden Raumcurve dritter Ordnung. Letztere wird also durch *ABCDEF* vollkommen bestimmt.

Bezüglich dieser sechs Punkte kann auch angenommen werden, dass je zwei von ihnen coincidiren. Die Verbindungslinie solcher zwei Punkte geht dann in eine Tangente der Raumcurve über, daher ist eine derartige Curve z. B. auch durch vier Punkte und eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte vollkommen bestimmt.

Der folgende Satz lässt sich nun leicht nachweisen:

59. Je zwei beliebige Punkte irgend einer Raumcurve dritter Ordnung können als die Mittelpunkte von zwei collinearen Strahlenbündeln betrachtet werden, welche diese Curve erzeugen.

Sind *ABCDEF* sechs beliebige Punkte einer solchen Curve *k*, so kann man etwa *A* und *B* als Mittelpunkte zweier Strahlenbündel *s* und s_1 betrachten und diese Bündel derart collinear auf einander beziehen, dass den vier durch *CDEF* gehenden Strahlen in *s* beziehungsweise die vier durch dieselben Punkte *CDEF* gehenden Strahlen in s_1 entsprechen. Nach Satz 8, 3. Abschnitt, ist dies gestattet. *s* und s_1 werden demselben Satze zufolge durch die vier Paare entsprechender Strahlen vollkommen bestimmt und erzeugen also eine ebenfalls vollkommen bestimmte Raumcurve dritter Ordnung, welche durch *ABCDEF* geht und daher keine andere sein kann, als *k*. Damit ist obiger Satz bewiesen.

In jeder Secante einer Raumcurve dritter Ordnung *k* schneiden sich zwei entsprechende Ebenen jener zwei Strahlenbündel *s* und s_1 , durch welche *k* erzeugt wird. Ausser den Durchschnittslinien entsprechender Ebenen von *s* und s_1, welche zugleich Secanten der Curve *k* bilden, gibt es auch solche, die mit *k* keinen reellen Punkt gemein haben. Sie werden uneigentliche Secanten der Raumcurve dritter Ordnung genannt, im Gegensatze zu den eigentlichen, deren zwei Schnittpunkte mit der Curve reell sind. Dass jede uneigentliche Secante die Curve in zwei imaginären Punkten schneidet, ergibt sich aus Folgendem. Sind α und α_1 irgend zwei entsprechende Ebenen von *s* und s_1, welche sich in der Geraden *a* schneiden, so bilden α und α_1 die Träger von zwei sich entsprechenden Strahlenbüscheln *S* und S_1, durch deren Schnitt mit *a* zwei projectivische Punktreihen zu Stande kommen. Diese Reihen haben entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelpunkte, welche der Curve *k* angehören. Im ersteren Falle ist *a* eine eigentliche, im zweiten eine uneigentliche Secante. — Jede Tangente von *k* kann als Verbindungslinie von zwei

unendlich nahen Punkten der Curve, somit auch als Durchschnittslinie von zwei entsprechenden Ebenen der Bündel s und s_1 betrachtet werden.

Die Gesammtheit der Geraden, in welchen sich je zwei entsprechende Ebenen von zwei collinearen Strahlenbündeln s und s_1 schneiden, wird ein Secantensystem dritter Ordnung, und die durch s und s_1 erzeugte Raumcurve dritter Ordnung die Ordnungscurve dieses Systemes genannt. Die sämmtlichen eigentlichen und uneigentlichen Secanten und die Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung k bilden also ein Secantensystem dritter Ordnung, dessen Ordnungscurve k ist.

Aus dem Satze 59 kann geschlossen werden, dass wenn man zwei beliebige Punkte A, B einer Raumcurve dritter Ordnung k als Mittelpunkte von zwei die Curve k erzeugenden Strahlenbündeln annimmt und durch irgend eine eigentliche Secante a der Curve und die Punkte A, B je eine Ebene legt, diese Ebenen sich in den erzeugenden Bündeln entsprechen müssen. Dies gilt auch dann, wenn a eine uneigentliche Secante ist, wie wir nun zeigen wollen.

Wir setzen voraus, die Curve k sei durch zwei Strahlenbündel s und s_1 erzeugt worden, deren Mittelpunkte M und M_1 heissen mögen. Die uneigentliche Secante a sei der Durchschnitt der sich entsprechenden Ebenen α, α_1 und p, p_1 irgend ein in diesen Ebenen gelegenes Paar entsprechender Strahlen. — Jede der Ebenen α und α_1 hat dann mit der Raumcurve nur einen Punkt (M, M_1) gemein und auch jede der Geraden p, p_1 schneidet die Curve nur in einem Punkte. — Letztere Gerade bilden die Axen von zwei Ebenenbüscheln, welche sich in s und s_1 entsprechen, also projectivisch sind und eine Regelfläche zweiter Ordnung F erzeugen. Diese Regelfläche enthält die Curve k und die drei Geraden a, p, p_1. Zur einen Schaar von geraden Erzeugenden der Fläche F gehören alle eigentlichen und uneigentlichen Secanten von k, welche p und p_1 schneiden, also auch a, zur anderen Schaar die Geraden p, p_1. Die Fläche F wird durch p und die Curve k allein vollkommen bestimmt, denn gerade Erzeugende derselben werden erhalten, indem man durch p beliebige Ebenen legt, welche k ausser in M noch in zwei anderen Punkten schneiden, und letztere Punkte durch gerade Linien verbindet. Es gilt also der Satz:

60. Durch eine Raumcurve dritter Ordnung und irgend eine Gerade p, welche mit der Curve nur einen Punkt gemein hat, kann eine einzige Regelfläche gelegt werden. Eine Schaar von geraden Erzeugenden dieser Fläche besteht aus den eigentlichen und uneigentlichen Secanten, welche p schneiden, der andern gehört p an.

Ist nun q irgend eine zweite durch M gehende, in der Ebene α liegende Gerade, so bestimmt q mit der Curve k eine Regelfläche zweiter Ordnung F_1, welche durch k geht und die Geraden a und q enthält. Die uneigentliche Secante

a liegt also auf beiden Regelflächen F, F_1 und wird daher durch diese ganz unabhängig von der Lage des Punktes M_1 vollkommen bestimmt. Statt M_1 kann somit jeder beliebige Punkt der Curve k als Mittelpunkt des zweiten erzeugenden Bündels s_1 angenommen werden, ohne dass a aufhören würde, eine uneigentliche Secante von k zu sein. Jede Ebene eines jeden dieser Strahlenbündel s_1, welche der Ebene α in s entspricht, geht durch a; wählt man daher beide Mittelpunkte der erzeugenden Bündel beliebig in der Curve, so bildet a stets den Durchschnitt von zwei entsprechenden Ebenen und bleibt eine uneigentliche Secante von k. — Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

61. Je zwei beliebige Punkte der Ordnungscurve eines Secantensystemes dritter Ordnung können als die Mittelpunkte von zwei collinearen Strahlenbündeln betrachtet werden, welche dieses System erzeugen.

Aus dem Satze 55 dieses Abschnittes und dem Pascal'schen folgt unmittelbar:

62. Jedes, einer Raumcurve dritter Ordnung eingeschriebene Sechseck wird aus irgend einem Curvenpunkte A durch ein Sechskant projicirt, dessen drei Paare gegenüberliegender Seiten sich in Geraden schneiden, welche ein und derselben durch A gehenden Ebene angehören.

Nimmt man an, dass drei Paare von Eckpunkten des eingeschriebenen Sechseckes coincidiren, so kann der folgende Satz aus dem vorhergehenden abgeleitet werden:

63. Sind $ABCD$ die Eckpunkte eines einer Raumcurve dritter Ordnung eingeschriebenen Tetraeders und $A_1B_1C_1D_1$ die Durchschnitte der in den Punkten $ABCD$ berührenden Tangenten mit den Tetraederflächen, welche diesen Punkten gegenüberliegen, so bilden $A_1B_1C_1D_1$ die Eckpunkte eines zweiten Tetraeders, das dem ersteren eingeschrieben und zugleich umschrieben ist.

Die Verbindungslinien des Punktes A mit B, C, D bilden Kanten eines Dreikants und die drei Ebenen, welche durch die Tangenten in B, C, D und den Punkt A bestimmt werden, kann man als Seiten eines dem ersteren umschriebenen Dreikants betrachten. Jene Kegelfläche zweiter Ordnung, welche ihre Spitze in A hat und die Raumcurve dritter Ordnung enthält, ist dem einen Dreikant umschrieben und dem anderen eingeschrieben; sie berührt die Seiten des letzteren in den Kanten des ersteren. Jeder der Punkte $B_1C_1D_1$ liegt sowohl auf einer Seite des einen, wie auch auf einer Seite des anderen Dreikants und die Geraden AB_1, AC_1, AD_1 bilden die Durchschnittslinien von je zwei solchen Seiten. Da nun dem Satze 62 zufolge die Geraden AB_1, AC_1, AD_1 in ein und derselben Ebene liegen (Vergleiche auch Satz 15, 2. Abschnitt), so muss die Ebene $B_1C_1D_1$ durch A gehen. In derselben Weise kann man sich über-

zeugen, dass die Ebenen $A_1B_1C_1$, $A_1B_1D_1$ und $A_1C_1D_1$ beziehungsweise durch D, C und B gehen. Diese Ebenen bilden aber Seitenflächen des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$, welches dem Tetraeder $ABCD$ eingeschrieben ist, daher erscheint obiger Satz gerechtfertigt.

Wählt man statt A irgend einen anderen Curvenpunkt A', so erhält man statt der Ebene $AB_1C_1D_1$ eine andere $A'B'_1C'_1D'_1$. Diese beiden Ebenen müssen sich in den beiden Strahlenbündeln entsprechen, welche ihre Mittelpunkte in A, A' haben und die Raumcurve erzeugen. Denn der Geraden AB_1 (als Durchschnitt der Ebenen ABB_1 und ACD) entspricht die Gerade $A'B'_1$ (als Durchschnitt der Ebenen $A'BB_1$) und $A'CD$) und der Geraden AC_1 (als Durchschnitt der Ebenen ACC_1 und ABD) entspricht die Gerade $A'C'_1$ (als Durchschnitt der Ebenen $A'CC_1$ und $A'BD$). Die beiden sich entsprechenden Ebenen AB_1C_1 und $A'B'_1C'_1$ schneiden sich in einer uneigentlichen Secante a der Raumcurve k. Lässt man daher den Punkt A die Curve k durchlaufen, so dreht sich die Ebene AB_1C_1 um a. Nachdem eine eigentliche und eine uneigentliche Secante sich nicht schneiden können, wie aus obigem Satze 60 hervorgeht, so kann a nicht in der Ebene BCD liegen. Den Durchschnittspunkt von a mit dieser Ebene nennen wir P.

Die Durchschnittslinie s der Ebenen ABB_1 und ACD wird von a immer geschnitten, wo man auch A in k annehmen mag, denn a und s liegen stets in derselben Ebene AB_1C_1. Coincidirt A mit B, so liegt s in der Ebene BCD und kann daher die Secante a nur im Punkte P schneiden. Die Ebene ABB_1, welche s ebenfalls enthält, osculirt dann mit der Curve k im Punkte B, woraus folgt, dass die Osculationsebene dieses Punktes durch P gehen muss. — Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass auch die Osculationsebenen der Punkte C und D durch den Punkt P gehen; es gilt somit der Satz:

64. Die Osculationsebenen von drei beliebigen Punkten einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden sich in einem Punkte der Ebene dieser drei Punkte.

Hieraus kann man schliessen, dass jede Raumcurve dritter Ordnung auch dritter Classe ist. Würden nämlich durch irgend einen Punkt P vier Osculationsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung gehen, deren Osculationspunkte wir $ABCD$ nennen wollen, so müsste P in der Ebene ABC, aber auch in den Ebenen ABD, ACD und BCD liegen, was nur möglich ist, wenn alle vier Curvenpunkte $ABCD$ derselben Ebene angehören. Die Raumcurven dritter Ordnung können aber von keiner Ebene in mehr als drei Punkten geschnitten werden, folglich gehen durch keinen Punkt P mehr als drei Osculationsebenen einer solchen Curve.

Nach den Gesetzen der Reciprocität ist jeder Raumcurve dritter Ordnung eine Raumcurve dritter Classe reciprok und umgekehrt. Da nun jede Raumcurve dritter Ordnung zugleich dritter Classe ist, so muss auch jede Raumcurve dritter Classe zugleich dritter Ordnung sein. Es gilt also der Satz:

65. **Die Raumcurven dritter Ordnung und jene dritter Classe sind identisch.**

Die Gesammtheit der Osculationsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung wird ein **Ebenenbüschel dritter Ordnung** genannt, da ein solcher Büschel dem eben aufgestellten Satze zufolge die Eigenschaft hat, dass durch keine Gerade mehr als drei Ebenen des Büschels gehen.

Mit Hilfe der Gesetze der Reciprocität können nun aus den Sätzen 51 bis 55 dieses Abschnittes die folgenden abgeleitet werden:

66. **Sämmtliche Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Gerade von zwei collinearen ebenen Systemen gehen, bilden im allgemeinen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, dem auch die Träger der beiden ebenen Systeme angehören.**

67. **Drei projectivische Punktreihen erzeugen im allgemeinen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.**

68. **Wenn zwei Kegelschnittslinien von einer Geraden gemeinschaftlich berührt werden, so bilden alle Ebenen, welche beide Curven zugleich berühren im allgemeinen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.**

69. **Je zwei Gerade, in welchen sich zwei osculirende Ebenen einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden, werden von allen übrigen osculirenden Ebenen der Curve in projectivischen Punktreihen geschnitten.**

70. **Jede osculirende Ebene einer Raumcurve dritter Ordnung wird von allen übrigen osculirenden Ebenen dieser Curve in Geraden geschnitten, welche einen Kegelschnitt umhüllen.**

Aus dem Satze 58 ergibt sich:

71. **Eine Raumcurve dritter Ordnung wird durch sechs ihrer Osculationsebenen, also durch sechs Ebenen, von welchen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, vollkommen bestimmt.**

Da alle unendlich fernen Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung, so wie überhaupt alle unendlich fernen Punkte des Raumes, in derselben Ebene liegen, so können bezüglich der Anzahl und gegenseitigen Lage der unendlich fernen Punkte einer solchen Curve nur vier verschiedene Fälle eintreten: Entweder sind drei unendlich ferne, von einander gesonderte, reelle Punkte vorhanden, oder es coincidiren zwei von diesen Punkten, oder alle drei fallen zusammen, oder es gibt nur einen reellen unendlich fernen Curvenpunkt. Im zweiten Falle enthält die unendlich ferne Ebene eine Tangente der Curve, im dritten ist diese Ebene zugleich eine Osculationsebene. Man unterscheidet demgemäss folgende vier Arten von Raumcurven dritter Ordnung:

1. Die räumliche Hyperbel, welche drei unendlich ferne Punkte besitzt.

2. Die parabolische Hyperbel, welche von der unendlich fernen Ebene in einem Punkte berührt und in einem zweiten geschnitten wird.

3. Die räumliche Parabel. Sie hat nur einen unendlich fernen Punkt, in welchem die unendlich ferne Ebene mit ihr osculirt.

4. Die räumliche Ellipse. Sie wird von der unendlich fernen Ebene nur in einem Punkte geschnitten.

Nachdem eine Raumcurve dritter Ordnung aus jedem ihrer unendlich fernen Punkte durch eine Cilinderfläche zweiter Ordnung projicirt wird, so gehen durch die räumliche Hyperbel drei Cilinderflächen, welche hyperbolisch sein müssen, da jede derselben zwei unendlich ferne gerade Erzeugende besitzt. Durch die parabolische Hyperbel geht eine hyperbolische und eine parabolische Cilinderfläche. Die Erzeugenden der ersteren convergiren gegen die zusammenfallenden unendlich fernen Punkte, jene der letzteren gegen den dritten unendlich fernen Punkt. Durch eine räumliche Ellipse geht nur eine Cilinderfläche und zwar eine elliptische.

Die räumliche Hyperbel hat drei in endlicher Entfernung gelegene Asymptoten und Asymptotenebenen. — Jede Osculationsebene eines unendlich fernen Punktes irgend einer Raumcurve wird nämlich eine Asymptotenebene der letzteren genannt. — Die parabolische Hyperbel hat zwei Asymptoten und ebenso viele Asymptotenebenen. Von den ersteren liegt eine in unendlicher Entfernung, während die letzteren beide in endlicher Entfernung gelegen sind. Die räumliche Parabel besitzt nur eine Asymptote und eine Asymptotenebene, welche sich beide in endlicher Entfernung befinden.

Wir stellen nun noch einige auf die Erzeugung von Raumcurven dritter Ordnung bezügliche Sätze auf, welche Beispiele liefern, dass anscheinend schwierig zu beweisende Sätze häufig ihre einfache Erklärung in der Entstehung dieser Curven durch projectivische oder collineare Grundgebilde finden. Zugleich mögen diese Sätze dazu dienen, um auf die zwischen ebenen und kubischen Kegelschnittslinien bestehende Analogie aufmerksam zu machen.

Dem auf ebene Kegelschnitte sich beziehenden Satze von Newton (Satz 26, 2. Abschnitt) ist der folgende analog:

72. Wenn drei Flächenwinkel von constanter Grösse sich um ihre Kanten drehen, während der Schnittpunkt von drei ihrer Seitenflächen sich auf einer Geraden bewegt, so beschreibt der Durchschnittspunkt der drei übrigen Seitenflächen eine Raumcurve dritter Ordnung. Die drei Kanten bilden Secanten dieser Curve.

Der auf einer Geraden sich bewegende Schnittpunkt von drei Seitenflächen bildet in seinen verschiedenen Lagen die Elemente einer Punktreihe, gegen welche die von letzteren Flächen erzeugten Ebenenbüschel perspectivisch

liegen. Diese drei Ebenenbüschel sind somit unter einander projectivisch, woraus folgt, dass auch jene drei Ebenenbüschel, welche durch die übrigen Seitenflächen entstehen, projectivisch sind, also eine Raumcurve dritter Ordnung erzeugen.

Einer Specialität des Satzes von Braikenridge und Mac-Laurin (Satz 28, 2. Abschnitt) ist der nachstehende analog:

73. Wenn die vier Seitenflächen eines veränderlichen Tetraeders sich um vier in ihnen gelegene Gerade drehen, während drei Eckpunkte des Tetraeders beständig auf denselben drei Geraden bleiben, so beschreibt der vierte Eckpunkt eine Raumcurve dritter Ordnung.

Der vierte Eckpunkt bildet nämlich den Durchschnitt von drei entsprechenden Ebenen dreier Ebenenbüschel, welche projectivisch sein müssen, nachdem je zwei von den durch die Seitenflächen des Tetraeders entstehenden Ebenenbüscheln dieselbe Punktreihe projiciren.

Dem eben aufgestellten Satze ist der folgende reciprok:

74. Wenn die vier Eckpunkte eines veränderlichen Tetraeders sich auf vier Geraden bewegen, während drei Seitenflächen des Tetraeders sich um drei in ihnen gelegene Gerade drehen, so osculirt die vierte Seite beständig eine Raumcurve dritter Ordnung.

Dies wird klar wenn man berücksichtigt, dass je zwei Punktreihen, deren Träger jene Geraden bilden, welche durch die Eckpunkte gehen, Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, also projectivisch sein müssen. Die vierte Seitenfläche geht durch entsprechende Punkte von drei solchen Reihen, daher osculirt sie nach Satz 67 während ihrer Bewegung beständig ein und dieselbe Raumcurve dritter Ordnung.

75. Wenn die Spitze eines Dreikants sich in einer Geraden bewegt, während dessen Kanten sich um drei ihrer Punkte drehen, so bestimmen die Schnittpunkte der drei Kanten mit irgend drei festen Ebenen eine Ebene, welche beständig dieselbe Raumcurve dritter Ordnung osculirt.

Um dies nachzuweisen bezeichnen wir die Gerade, in der sich die Spitze bewegt, durch g und die Punkte, um welche sich die Kanten drehen, durch A, B, C. Sämmtliche Schnittpunkte der durch A gehenden Kante mit einer der drei festen Ebenen α liegen in einer Geraden a, nämlich in der Schnittlinie von α mit der durch A und g bestimmten Ebene, und ebenso befinden sich die Schnittpunkte der übrigen zwei Kanten alle auf zwei Geraden b, c, von denen die eine der Ebene Bg, die andere der Ebene Cg angehört. Auf den Geraden a, b, c kommen nun drei Punktreihen zu Stande, welche alle gegen eine auf g befindliche Reihe perspectivisch liegen. Diese drei Punktreihen müssen also projectivisch sein und ihr Erzeugniss ist daher ein Ebenenbüschel dritter Ordnung.

76. **Sind A, B, C drei beliebige Punkte, α, β, γ drei beliebige Ebenen und a, b, c die Schnittlinien von α, β, γ mit einer beweglichen Ebene, welche beständig durch dieselbe Gerade geht, so beschreibt der Schnittpunkt der drei Ebenen Aa, Bb, Cc im allgemeinen eine Raumcurve dritter Ordnung.**

Die Gerade, um welche sich die bewegliche Ebene dreht, schneidet nämlich α, β, γ in Punkten M, N, O, durch welche a, b, c beständig gehen. Sämmtliche Ebenen Aa, Bb, Cc bilden daher drei Ebenenbüschel mit den Axen AM, BN, CO. Diese drei Ebenenbüschel sind projectivisch, weil jeder derselben gegen den durch die bewegliche Ebene entstehenden Ebenenbüschel perspectivisch liegt, folglich erzeugen dieselben eine Raumcurve dritter Ordnung.

Die Analogie zwischen Curven zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung spricht sich auch in folgendem Satze aus:

77. **Eine Raumcurve dritter Ordnung k und der aus ihren Osculationsebenen bestehende Ebenenbüschel dritter Ordnung können als zwei sich entsprechende Gebilde eines Nullsystems betrachtet werden, in welchem jeder Punkt von k seiner Osculationsebene und jede Tangente von k sich selbst entspricht. Durch eine Raumcurve dritter Ordnung wird demnach ein Nullsystem bestimmt.**

Der Beweis hiefür kann wie folgt gegeben werden. Sind $ABCDE$ fünf beliebige Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung k und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ beziehungsweise ihre Osculationsebenen, so können zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 derart reciprok auf einander bezogen werden, dass diesen fünf Punkten die genannten fünf Ebenen entsprechen. Die Durchschnittslinie der Ebenen α und β bildet den Träger einer Punktreihe R_1 in Σ_1, welcher ein Ebenenbüschel mit der Axe AB in Σ entspricht. Dieser Büschel liegt gegen R_1 perspectivisch, d. h. jede seiner Ebenen geht durch den ihr entsprechenden Punkt, weil dies bei drei Ebenen stattfindet (Satz 74, 1. Abschnitt), nämlich bei den Ebenen ABC, ABD, ABE (Satz 64, 5. Abschnitt). Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass die Punktreihe, deren Träger die Schnittlinie von irgend zweien der fünf Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ bilden, gegen den ihr entsprechenden Ebenenbüschel perspectivisch liegt. In jeder der Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ sind also vier Gerade vorhanden, deren sämmtliche Punkte auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen. In zwei reciproken räumlichen Systemen liegen nun entweder sämmtliche Punkte auf den ihnen entsprechenden Ebenen, d. h. die beiden Systeme bilden ein Nullsystem, oder alle Punkte, welche in ihren entsprechenden Ebenen gelegen sind, gehören einer Fläche zweiter Ordnung (oder Specialitäten einer solchen Fläche) an. Einer Fläche zweiter Ordnung können die in Σ auf ihren entsprechenden Ebenen befindlichen Punkte nicht angehören, weil diese Fläche mit jeder der fünf Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$

vier Gerade gemein haben müsste, was unmöglich ist, daher bilden Σ und Σ_1 ein Nullsystem.

Ist nun P ein beliebiger Punkt der Curve k, so entspricht demselben eine durch ihn gehende Ebene π. Nachdem P in der Ebene ABP gelegen ist, so geht π durch die Schnittlinie der den Punkten A und B entsprechenden Ebenen, also auch durch jenen Punkt Q, in welchem diese Schnittlinie die Ebene ABP trifft. Durch Q geht aber auch die Osculationsebene π' des Punktes P und nachdem π und π' je einen Punkt der Ebenen ACP und ADP ebenfalls gemein haben, so fallen π und π' zusammen, d. h. jene Ebene, welche dem beliebig gewählten Punkte P der Curve k entspricht, ist die Osculationsebene dieses Punktes.

Der Tangente in P, also der Verbindungslinie zweier unendlich naher Curvenpunkte entspricht die Durchschnittslinie von zwei unendlich nahen Osculationsebenen, nämlich wieder die Tangente in P. Es entspricht somit jede Tangente von k sich selbst und bildet einen Leitstrahl des Nullsystems.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass durch eine Raumcurve dritter Ordnung ein Nullsystem vollkommen bestimmt wird, ebenso wie ein ebenes Polarsystem durch seine Directrix. Man nennt daher eine Raumcurve dritter Ordnung insoferne sie ein Nullsystem bestimmt, auch die Directrix oder Ordnungscurve dieses Systems. Doch ist nicht zu übersehen, dass im ebenen Polarsysteme ausserhalb der Directrix kein Punkt existirt, der auf seiner entsprechenden Geraden gelegen wäre, indess im Nullsysteme jeder Punkt auf der ihm entsprechenden Ebene liegt.

Eine wichtige Eigenschaft der Raumcurven dritter Ordnung drückt auch folgender Satz aus.

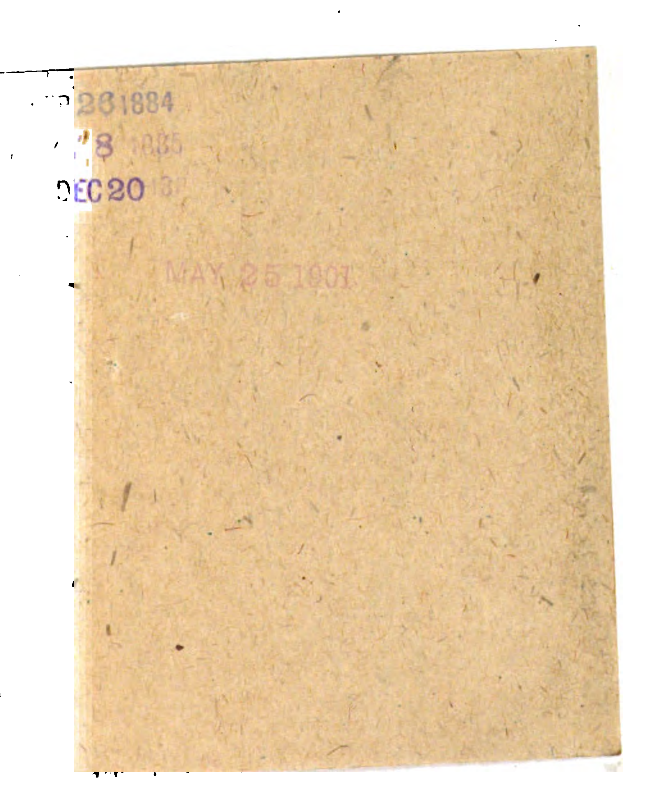
78. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P in Bezug auf sämmtliche Flächen zweiter Ordnung, welche durch eine Raumcurve dritter Ordnung gelegt werden können, schneiden sich in ein und demselben Punkte der durch P gehenden Secante der Curve.

Durch irgend einen Punkt P geht eine einzige eigentliche oder uneigentliche Secante s der Raumcurve dritter Ordnung k, wenn P nicht auf k liegt. Denn gäbe es zwei durch P gehende Secanten, so hätte jene Ebene, welche durch dieselben bestimmt wird, vier (reelle oder imaginäre) Punkte mit der Curve gemein. Sind nun D, D' die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte von s mit k, so enthalten alle durch k gelegten Flächen zweiter Ordnung diese Punkte und der Punkt P' in s, welcher von P durch D und D' harmonisch getrennt wird, muss sämmtlichen Polarebenen von P in Bezug auf die genannten Flächen zweiter Ordnung angehören. Geht die Secante s in eine Tangente über, so berührt sie auch jede durch k gelegte Fläche und jede Polarebene von P muss durch den Berührungspunkt dieser Tangente gehen. Liegt P in der Curve k selbst, so gehört er auch allen durch k gelegten Flächen an, und jede Polarebene

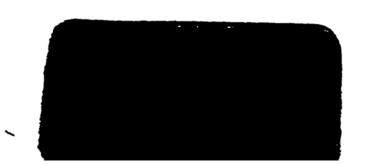
von P berührt die betreffende Fläche in P. Es gehen somit auch in diesem Falle sämmtliche Polarebenen durch denselben Punkt. Nachdem alle Berührungsebenen in P durch jene Tangente gehen müssen, welche k, also auch alle Flächen zweiter Ordnung in P berührt, so schneiden sich in diesem Falle sämmtliche Polarebenen von P in der genannten Tangente.

Die Polarebenen des Punktes P' gehen selbstverständlich alle durch P. Man nennt je zwei solche Punkte P und P', von denen jeder der Schnittpunkt der Polarebenen des andern ist, conjugirte Punkte in Bezug auf die Raumcurve dritter Ordnung. Jedem Punkte einer Tangente der Raumcurve ist der Berührungspunkt dieser Tangente und jedem Curvenpunkte sind alle Punkte der Tangente desselben conjugirt.

Druck von L. W. Seidel & Sohn in Wien.


26 1884
8 1885
DEC 20
MAY 25 1901






Math 5158.70
Lehrbuch der neueren Geometrie.
Cabot Science 003349539
3 2044 091 920 058
Digitized by Google